第42卷 第3期　　北 京 工 业 大 学 学 报　　Vol. 42 No. 3
2016年 3月　　JOURNAL OF BEIJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY　　Mar. 2016

近似对偶标架的表达及扰动

张　伟[1]，付艳玲[2]
（1. 北京工业大学应用数理学院，北京　100124；2. 河南财政税务高等专科学校信息工程系，郑州　451464）

摘　要：为了研究 Hibert 空间中近似标架的性质，基于 Hibert 空间中通常标架的理论，运用对偶标架的构造方法，引入了近似标架对偶标架的概念，给出了近似对偶标架的 2 个明确表达，得到了近似对偶标架的一些扰动结果.

关键词：近似标架；近似对偶标架；扰动
中图分类号：O 174.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0254-0037(2016)03-0473-08
doi：10.11936/bjutxb2015080028

Expression and Perturbation of Approximative Dual Frames

ZHANG Wei[1], FU Yanling[2]
(1. College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;
2. Department of Information Engineering Henan Finance and Taxation College, Zhengzhou 451464, China)

Abstract: Based on the frame theory of Hilbert space and by using the method of construction of dual frames, the notion of approximative dual frame was introduced, two explicit expressions of an arbitrary approximative frame were established, some perturbation results of approximative dual frames were obtained.

Key words: approximative frame; approximative dual frame; perturbation

Duffin 等[1]于 1952 年在研究非调和 Fourier 级数时引入了 Hilbert 空间中的标架概念. 标架可以看作标准正交基的推广，可以用稳定的方式表示空间中的任意元素但不要求是正交并且表达不一定唯一. 小波分析[2]诞生以后，标架理论引起了众多学者的关注. 它已被广泛地应用到信号处理、采样理论及神经网络等诸多领域. 随着对 Hilbert 空间中标架理论及其应用研究的不断深入，出现了许多标架的推广形式，例如：子空间标架(Fusion 标架)、g-标架、K-标架等[3-5]，这些推广极大地丰富了标架理论.

稀疏性在计算数学、计算机科学以及电子工程等诸多领域扮演着举足轻重的角色，选取一组适当的基(标架)，利用稀释信号处理的方法，可以将许多类型的信号通过很少几个非零系数来表示. 据此，2014 年 Sharma 等在文献[6]中给出了通常标架的另外一种推广形式，提出了近似标架的概念. 标架的对偶问题[7]是标架理论中一个活跃的研究方向，选择恰当的对偶标架是它的一个核心问题. 本文首先引入了近似对偶标架的概念，并给出了 2 种明确的表达；与经典情形相比，不但将经典情形推广到近似标架，而且还利用算子理论，从另外的角度给出了近似对偶标架的另外一种精确表达(详见定理 3、4)；得到了近似对偶标架的一些扰动结果.

1　预备知识

文中 H 表示无限维的 Hilbert 空间，$\{m_n\}$ 表示$\mathbb{N}$中无限递增序列，$\mathscr{K}$ 表示$\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$ 上的标量域. 定义

收稿日期：2015-08-11
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11271037)
作者简介：张　伟(1979—)，男，讲师，博士研究生，主要从事小波分析及应用、标架理论及应用方面的研究，E-mail：zwfylhappy@126.com

空间 $l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$

$$l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})=\left\{\alpha=\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}:\right.$$

$$\left.\alpha_{n,i}\in\mathscr{K},\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\alpha_{n,i}|^2<\infty\right\}$$

在其上定义内积

$$\left\langle\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}},\ \{\beta_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\right\rangle_{l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}\bar{\beta}_{n,i}$$

那么 $l^2(1,2,\cdots,m_n;\ n\in\mathbb{N})$ 是一个 Hilbert 空间[6]. 定义 $l^2(1,2,\cdots,m_n;\ n\in\mathbb{N})$ 的子空间

$$l_0(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N}):$$

$$l_0(1,2,\cdots,m_n;\ n\in\mathbb{N})=$$

$$\{\alpha=\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}:\exists N\in\mathbb{N},$$

$$\forall n>N,1\leqslant i\leqslant m_n,\alpha_{n,i}=0\}$$

定义 1[6] 设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 中的序列,如果存在常数 $0<A\leqslant B<\infty$ 使得对任意的 $x\in H$ 有

$$A\|x\|^2\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,x_{n,i}\rangle|^2\leqslant B\|x\|^2 \quad (1)$$

那么称 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的近似标架,A、B 分别称为其下、上界(约定为最优界);如果 $A=B$,则称 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的紧近似标架;如果 $A=B=1$,则称 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的 Parseval 近似标架;如果式(1)仅有右不等式成立,则称 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的近似 Bessel 序列.

对于近似 Bessel 序列 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$,称有界算子

$$T:\ l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})\to H$$

$$\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\to\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}x_{n,i}$$

$$\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\in l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$$

为准(近似)标架算子;它的伴随算子

$$T^*:\ H\to l^2(1,2,\cdots,m_n;\ n\in\mathbb{N}),$$

$$x\to\{\langle x,x_{n,i}\rangle\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}},\ x\in H$$

为(近似)分析算子;对于近似标架 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$,称有界算子

$$S=TT^*:H\to H,\ x\to\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle x_{n,i}$$

式中:$x\in H$ 为(近似)标架算子;S 是一个线性有界、自伴、正的可逆算子. 特别地,如果 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的标架界是 A、B,则

$$\{\tilde{x}_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}=\{S^{-1}x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$$

也是 H 上的近似标架,标架界分别为 $\frac{1}{B}$、$\frac{1}{A}$,并且该近似标架的标架算子是 S^{-1},称 $\{\tilde{x}_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似典范对偶[6].

定理 1[6] 设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 中的序列,则 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 中界为 B 的近似 Bessel 序列当且仅当算子

$$T:l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})\to H$$

$$T(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}x_{n,i}$$

$$\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\in l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$$

是有意义的、线性有界且 $\|T\|\leqslant\sqrt{B}$.

定理 2[6] 设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 中的序列,则 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 中近似标架当且仅当算子

$$T:l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})\to H$$

$$T(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}x_{n,i}$$

$$\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\in l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$$

是有意义的、线性有界且到上的.

引理 1[8] 假设 X 是 Banach 空间,T 是 X 上的线性算子. 如果 $\|I-T\|<1$,则 T 是 X 上的线性有界可逆算子且 $T^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(I-T)^k$,其中 I 是 X 上的恒等算子.

引理 2[9] 设 $x,y\in B$,其中 B 是具有单位元 e 的 Banach 代数,$\|\cdot\|_B$ 表示其上的范数,如果 y 是可逆的,$\alpha<1$ 满足

$$\|x-y\|_B\leqslant\alpha\|y^{-1}\|_B^{-1}$$

则 x 是可逆的且

$$\|x^{-1}-y^{-1}\|_B\leqslant\|y^{-1}\|_B^{-1}\alpha(1-\alpha)^{-1}$$

2 近似对偶标架的刻画

与 Hilbert 空间上通常对偶标架一样,首先给出近似标架的对偶标架的概念.

定义 2 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的近似标架,如果存在 H 的近似标架 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$,使得对任意的

$x\in H$ 有

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle x_{n,i} \tag{2}$$

则称 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为近似标架 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架.

由定理 1 知，如果 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 均为 H 的近似 Bessel 序列，则对任意的 $x\in H$，级数 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle x_{n,i}$ 收敛，从而式(2)有意义.

注 1　如果 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架，则容易证明 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 也为 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架. 可以称 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为相互近似对偶标架；如果 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的准标架算子分别为 T、U，则式(2)意味着 $TU^*=I$，其中 I 是 H 上的恒等算子.

注 2　若 S 是近似标架 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似标架算子，$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似典范对偶标架满足式(2)，即

$$x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,\tilde{x}_{n,i}\rangle x_{n,i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle\tilde{x}_{n,i},\quad x\in H$$

因此满足式(2)中 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的存在性是不容置疑的.

首先给出一些近似对偶标架的等价表达.

引理 3　假设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 均是 H 的近似 Bessel 序列，那么下面 3 条等价：

1）$\forall x\in H,\quad x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle x_{n,i}$

2）$\forall x\in H,\quad x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle y_{n,i}$

3）$\forall x,y\in H,\quad \langle x,y\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle\langle y_{n,i},y\rangle$

更多地，3 个条件中的任何一个成立都能推出 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的相互近似对偶标架.

证明：1)⇒2) 对任意的 $y\in H$，由于

$$\{\langle y,x_{n,i}\rangle\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\in l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$$

因此由近似 Bessel 序列的性质知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n}\langle y,x_{n,i}\rangle y_{n,i}$ 收敛. 令

$$\tilde{y}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle y,x_{n,i}\rangle y_{n,i}$$

对任意的 $x\in H$

$$\langle x,y\rangle=\lim_{n\to\infty}\left\langle\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle x_{n,i},y\right\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle\langle x_{n,i},y\rangle=\lim_{n\to\infty}\left\langle x,\sum_{i=1}^{m_n}\langle y,x_{n,i}\rangle y_{n,i}\right\rangle=\langle x,\tilde{y}\rangle$$

所以 $y=\tilde{y}$，即 2) 成立.

2）⇒3）显然成立.

3）⇒1）类似 1)⇒2) 中的证明知，任意的 $x\in H$，级数 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle x_{n,i}$ 收敛. 令

$$\tilde{x}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle x_{n,i}$$

由 3) 知，对任意的 $y\in H$

$$\langle y,x\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle y,x_{n,i}\rangle\langle y_{n,i},x\rangle=\lim_{n\to\infty}\left\langle y,\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle x_{n,i}\right\rangle=\langle y,\tilde{x}\rangle$$

由 y 的任意性知，$x=\tilde{x}$. 故 1) 成立.

在 3 个条件中任一个成立的前提下，对任意的 $x\in H$ 有

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,y_{n,i}\rangle\langle x_{n,i},x\rangle\leqslant\\&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,y_{n,i}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x_{n,i},x\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\\&\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,y_{n,i}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}(B_1\|x\|^2)^{\frac{1}{2}}\\&\left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,x_{n,i}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}(B_2\|x\|^2)^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

其中 B_1、B_2 分别为近似 Bessel 序列 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的界. 由式(3)知，$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 均是 H 的近似标架.

证毕.

注 3　由注 1 可知如果 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和

$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的准标架算子分别为 T、U，则式(2)意味着 $TU^*=I$，则 $(TU^*=I)^*=UT^*=I$，这意味着 1)⇒2).

引理 4 假设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的近似标架，T 为其准标架算子，$\{\delta_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$ 的标准正交基，其中 $\delta_{n,i}$ 是 Kronecker 符号，那么 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架当且仅当 $y_{n,i}=V\delta_{n,i}(i=1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$，其中 $V:l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})\to H$ 是 T^* 的线性有界左逆算子.

证明：设 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架，则 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的近似标架. 设其准标架算子为 U，这样由式(2)知

$$TU^*=I \text{ 或者 } UT^*=I \tag{4}$$

又 $U\delta_{n,i}=y_{n,i}$，所以要找的 $V=U$，且式(4)表明 V 是 T^* 的左逆算子.

反过来，设 $V:l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})\to H$ 是 T^* 的线性有界左逆算子且 $y_{n,i}=V\delta_{n,i}$，$(i=1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$，注意到 $VT^*=I$，所以 V 为线性有界满射算子，从而由定理 2 知，$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的近似标架，再由 $VT^*=I$ 知，对任意的 $x\in H$ 有

$$x=VT^*x=V(\{\langle x,x_{n,i}\rangle\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})=$$
$$V\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle\delta_{n,i}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle y_{n,i}$$

因此由引理 3 知，$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架.

证毕.

由引理 4 可以看出，得到近似标架 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的关键是得到 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的准标架算子 T 的共轭算子 T^* 的左逆算子，那么 T^* 的左逆算子具有什么样的形式呢？

引理 5 假设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的近似标架，T 为其准标架算子. 那么 V 为 T^* 的线性有界左逆算子当且仅当

$$V=S^{-1}T+W(I-T^*S^{-1}T)$$

其中 S 为 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似标架算子，$W:l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})\to H$ 为线性有界算子，I 为 $l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$ 上的恒等算子.

证明：设 V 是 T^* 的线性有界左逆算子，令 $W=V$，则

$$S^{-1}T+W(I-T^*S^{-1}T)=$$
$$S^{-1}T+V(I-T^*S^{-1}T)=$$
$$S^{-1}T+V-VT^*S^{-1}T=$$
$$S^{-1}T+V-S^{-1}T=V$$

反过来，设

$$V=S^{-1}T+W(I-T^*S^{-1}T)$$

则

$$VT^*=S^{-1}TT^*+W(I-T^*S^{-1}T)T^*=$$
$$S^{-1}S+W(T^*-T^*S^{-1}TT^*)=$$
$$S^{-1}S+W(T^*-T^*S^{-1}S)=I$$

因此 V 是 T^* 的线性有界左逆算子.

证毕.

定理 3 假设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的近似标架，T、S 分别为其准标架算子和标架算子，$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 中的序列. 那么 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架当且仅当存在 H 中的近似 Bessel 序列 $\{z_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$，使得对任意的 $x\in H$ 有

$$y_{n,i}=S^{-1}x_{n,i}+z_{n,i}-\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle z_{k,j} \tag{5}$$

证明：必要性. 设 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架，则由引理 4 和引理 5 知

$$y_{n,i}=[S^{-1}T+W(I-T^*S^{-1}T)]\delta_{n,i} \tag{6}$$

式中：$W:l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})\to H$ 为线性有界算子；I 为 $l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$ 上的恒等算子；$\{\delta_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$ 的标准正交基. 令 $z_{n,i}=W\delta_{n,i}$，由定理 1 知，$\{z_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 的近似 Bessel 序列. 由式(6)知

$$y_{n,i}=S^{-1}T\delta_{n,i}+W\delta_{n,i}-WT^*S^{-1}T\delta_{n,i}=$$
$$S^{-1}x_{n,i}+z_{n,i}-WT^*S^{-1}x_{n,i}=$$
$$S^{-1}x_{n,i}+z_{n,i}-W(\{\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle\}_{\substack{j=1,2,\cdots,m_k\\ k\in\mathbb{N}}})=$$
$$S^{-1}x_{n,i}+z_{n,i}-W\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle\delta_{k,j}\right)=$$
$$S^{-1}x_{n,i}+z_{n,i}-\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle W\delta_{k,j}=$$
$$S^{-1}x_{n,i}+z_{n,i}-\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle z_{k,j}$$

充分性. 设式(6)成立. 注意到对任意的 $i=1,2,\cdots,m_n$, $n\in\mathbb{N}$, $\{\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle\}_{\substack{j=1,2,\cdots,m_k\\ k\in\mathbb{N}}}\in l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$, 所以由 $\{z_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 中的近似 Bessel 序列知, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{m_k}\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle z_{k,j}$ 收敛, 并且对于任意的 $x\in H$, $x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle S^{-1}x_{n,i}$, 因此对于任意的 $x\in H$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\left\langle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\right\rangle z_{k,j}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle z_{k,j}$$

从而对于任意的 $x\in H$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle y_{n,i}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle S^{-1}x_{n,i}+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle z_{n,i}-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\langle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\rangle z_{k,j}=$$
$$x+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle z_{n,i}-\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\left\langle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle S^{-1}x_{n,i},x_{k,j}\right\rangle z_{k,j}=$$
$$x+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle z_{n,i}-\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{m_k}\langle x,x_{k,j}\rangle z_{k,j}=x$$

因此由引理 3 知, 只需要证明 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 中的近似 Bessel 序列.

事实上, 由式(5)知, 对任意的 $x\in H$

$$|\langle x,y_{n,i}\rangle|^2=\left|\langle x,S^{-1}x_{n,i}\rangle+\langle x,z_{n,i}\rangle-\lim_{k\to\infty}\left\langle\sum_{j=1}^{m_k}\langle x,z_{k,j}\rangle x_{k,j},S^{-1}x_{n,i}\right\rangle\right|^2\leqslant$$
$$C\left(|\langle x,S^{-1}x_{n,i}\rangle|^2+|\langle x,z_{n,i}\rangle|^2+\left|\lim_{k\to\infty}\left\langle\sum_{j=1}^{m_k}\langle x,z_{k,j}\rangle x_{k,j},S^{-1}x_{n,i}\right\rangle\right|^2\right)$$

从而由 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{S^{-1}x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 均是 H 中的近似标架

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,y_{n,i}\rangle|^2$$
$$\leqslant C\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S^{-1}x_{n,i}\rangle|^2+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,z_{n,i}\rangle|^2+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\left|\lim_{k\to\infty}\left\langle\sum_{j=1}^{m_k}\langle x,z_{k,j}\rangle x_{k,j},S^{-1}x_{n,i}\right\rangle\right|^2\right)\leqslant$$
$$C_1\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S^{-1}x_{n,i}\rangle|^2+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,z_{n,i}\rangle|^2+\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{m_k}\langle x,z_{k,j}\rangle x_{k,j}\right\|^2\right)\leqslant$$
$$C_2\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S^{-1}x_{n,i}\rangle|^2+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,z_{n,i}\rangle|^2\right)$$
$$\leqslant C_3\|x\|^2$$

这里 C、C_1、C_2、C_3 均是常数. 所以 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 H 中的近似 Bessel 序列.

证毕.

定理 4 假设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的近似标架, 其标架界分别是 A、B, 标架算子和准标架算子分别为 S、T, 则 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似对偶标架当且仅当存在算子

$$\Psi\in B(H,l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N}))$$

满足 $T\Psi=0$ 使得

$$y_{n,i}=S^{-1}x_{n,i}+\Psi^*(\delta_{n,i})$$

其中 $\{\delta_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$ 的标准正交基, $\delta_{n,i}$ 是 Kronecker 符号.

证明: 首先假设 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的一个近似对偶标架, 令它的准标架算子为 U, 定义算子 $\Psi:H\to l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$

$$x\in H,\ \Psi x=U^*x-T^*(TT^*)^{-1}x$$

易知, Ψ 是有界的算子, 由引理 3 知

$$T\Psi x=TU^*x-TT^*(TT^*)^{-1}x=x-x=0$$

由 $\Psi x=U^*x-T^*(TT^*)^{-1}x$ 可知

$$\Psi^*=U-S^{-1}T$$

这样 $\Psi^*(\delta_{n,i})=U(\delta_{n,i})-S^{-1}T(\delta_{n,i})$ 即有

$$y_{n,i}=S^{-1}x_{n,i}+\Psi^*(\delta_{n,i})$$

反之, 设 $\Psi\in B(H,l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N}))$ 满足 $T\Psi=0$ 并且 $\{\delta_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 为 $l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$ 的标准正交基. 记

$$y_{n,i}=S^{-1}x_{n,i}+\Psi^*(\delta_{n,i})$$

则对任意的 $x\in H$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,y_{n,i}\rangle|^2=$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S^{-1}x_{n,i}+\Psi^*(\delta_{n,i})\rangle|^2=$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S^{-1}x_{n,i}\rangle+\langle x,\Psi^*(\delta_{n,i})\rangle|^2=$$
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S^{-1}x_{n,i}\rangle|^2+$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,\Psi^*(\delta_{n,i})\rangle|^2+$$

$$2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S^{-1}x_{n,i}\rangle\langle x,\Psi^*(\delta_{n,i})\rangle|\leqslant$$

$$(A^{-1}+\|\Psi\|^2+2A^{-\frac{1}{2}}\|\Psi\|)\|x\|^2$$

因此$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$是 H 的近似 Bessel 序列. 并且

$$UT^*x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle y_{n,i}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,x_{n,i}\rangle(S^{-1}x_{n,i}+\Psi^*(\delta_{n,i}))=$$

$$x+\Psi^*T^*x=x$$

3 近似对偶标架的扰动

本节将给出近似对偶标架的一些扰动结果,首先给出一个定义.

定义 3[10] 设$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$是 H 的任一序列 $\mu>0$,如果对任意的 $x\in H$,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,x_{n,i}-y_{n,i}\rangle|^2\leqslant\mu^2\|f\|^2$$

则称$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$是$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$的 μ-扰动.

定理 5 假设$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$和$\{x'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$均是 H 的近似标架并且它们的界分别为 A_1、B_1 和 A_2、B_2,$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$是$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$的一个给定的近似对偶标架. 如果$\{x'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$是$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$的 μ-扰动并且有充分小的 $\mu>0$,则存在$\{x'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$的一个近似对偶标架$\{y'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$使得$\{y'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$是$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$的 μ'-扰动.

证明: 假设 T_1 和 T_2 分别是$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$和$\{x'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$的准标架算子,则 $S_1=T_1T_1^*$ 和 $S_2=T_2T_2^*$ 分别是$\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$和$\{x'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$的标架算子. 根据定理 4,存在线性有界算子 $\Psi\in B(H,l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N}))$满足

$$T_1\Psi=0$$

和

$$y_{n,i}=S^{-1}x_{n,i}+\Psi^*(\delta_{n,i}) \tag{7}$$

其中$\{\delta_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$是 $l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$的一个标准正交基. 令

$$z_{n,i}=S_2^{-1}x'_{n,i}+\Psi^*(\delta_{n,i}) \tag{8}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|<x,z_{n,i}>|^2=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S_2^{-1}x'_{n,i}+\Psi^*(\delta_{n,i})\rangle|^2=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S_2^{-1}x'_{n,i}\rangle+\langle x,\Psi^*(\delta_{n,i})\rangle|^2=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S_2^{-1}x'_{n,i}\rangle|^2+$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,\Psi^*(\delta_{n,i})\rangle|^2+$$

$$2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}|\langle x,S_2^{-1}x'_{n,i}\rangle\langle x,\Psi^*(\delta_{n,i})\rangle|\leqslant$$

$$(A_2^{-1}+\|\Psi\|^2+2A_2^{-\frac{1}{2}}\|\Psi\|)\|x\|^2$$

记$\{z_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$的准标架算子为 T_3,则

$$\|x-T_2T_3^*x\|=\left\|x-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}\langle x,z_{n,i}\rangle x'_{n,i}\right\|=$$

$$\|T_2\Psi x\|=\|T_2\Psi x-T_1\Psi x\|\leqslant$$

$$\|T_2-T_1\|\|\Psi\|\|x\|\leqslant\mu\|\Psi\|\|x\|$$

由引理 1 知,取 μ 充分的小,使得

$$\|I-T_2T_3^*\|\leqslant\mu\|\Psi\|<1$$

则 $T_2T_3^*$ 是线性有界可逆算子. 记

$$\{y'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}=\{(T_2T_3^*)^{-1}z_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$$

下面来说明$\{(T_2T_3^*)^{-1}z_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}$就是所需要的近似标架.

另一方面,有

$$\|S_1-S_2\|=\|T_1T_1^*-T_1T_2^*+T_1T_2^*-T_2T_2^*\|=$$

$$\|T_1-T_2\|(\|T_1\|+\|T_2\|)\leqslant\mu(\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2})$$

对任意 $\alpha\in l_0(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(y_{n,i}-z_{n,i})\right\|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(S_1^{-1}x_{n,i}-S_2^{-1}x'_{n,i})\right\|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(S_1^{-1}x_{n,i}-S_2^{-1}x_{n,i})\right\|+$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(S_2^{-1}x_{n,i}-S_2^{-1}x'_{n,i})\right\|\leqslant$$

$$\|S_1^{-1}-S_2^{-1}\|\left\|T_1(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}})\right\|+$$

$$\|S_2^{-1}\|\left\|(T_1-T_2)(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}})\right\|=$$

$$(\|S_1^{-1}\|\|S_1-S_2\|\|S_2^{-1}\|\|T_1\|+$$

$$\|S_2^{-1}\|\|T_1-T_2\|)\|\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\n\in\mathbb{N}}}\|\leqslant$$

$$\frac{\mu}{A_2}\left(\frac{B_1+\sqrt{B_1B_2}}{A_1}+1\right)\|\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\|$$

如果令

$$W=(T_2T_3^*)^{-1}$$

由 $\|I-T_2T_3^*\|\leqslant\mu\|\Psi\|<1$ 知

$$\|W\|=\sum_{k=0}^{\infty}\|I-W^{-1}\|^k\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\|I-W^{-1}\|}<\frac{1}{1-\mu\|\Psi\|}$$

$$\|I-W\|=\|W\|\ \|I-W^{-1}\|<\frac{\mu\|\Psi\|}{1-\mu\|\Psi\|}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(y_{n,i}-y'_{n,i})\right\|=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(y_{n,i}-Wy_{n,i}+Wy_{n,i}-Wz_{n,i})\right\|\leqslant$$

$$\|I-W\|\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}y_{n,i}\right\|+$$

$$\|W\|\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(y_{n,i}-z_{n,i})\right\|\leqslant$$

$$\mu\left(\Psi\sqrt{B'}+\frac{B_1+\sqrt{B_1B_2}}{A_1A_2}+\frac{1}{A_2}\right)\frac{\left\|\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\right\|}{1-\mu\|\Psi\|}$$

式中 B' 是 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的上界. 即 $\{y'_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的 μ'-扰动，其中

$$\mu'=\frac{\mu\left(\|\Psi\|\sqrt{B'}+\dfrac{B_1+\sqrt{B_1B_2}}{A_1A_2}+\dfrac{1}{A_2}\right)}{1-\mu\|\Psi\|}$$

证毕.

定理 6　假设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的近似标架，其标架界分别是 A、B，若 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的 μ-扰动且 $\mu<\sqrt{A}$，则 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的近似标架，其标架界分别是

$$A\left(1-\frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)^2$$

$$B\left(1+\frac{\mu}{\sqrt{B}}\right)^2$$

可以用类似于文献[6]的定理 4.1 方法证明，此处略去证明过程.

定理 7　假设 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的近似标架，其标架界分别是 A、B，$\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的 μ-扰动，其中 $0<\mu<\sqrt{A+B}-\sqrt{B}$，则 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的近似标架且对任意有限数列 $\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\in l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(\tilde{x}_{n,i}-\tilde{y}_{n,i})\right\|\leqslant\lambda\|\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\|$$

其中 $\lambda=\dfrac{\mu}{A}\left(1+\dfrac{(\sqrt{B}+\mu)(2\sqrt{B}+\mu)}{A-(2\sqrt{B}+\mu)\mu}\right)$

$\{\tilde{x}_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{\tilde{y}_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 分别是 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的典范近似对偶标架.

证明：因为 $\sqrt{A+B}-\sqrt{B}<\sqrt{A}$，由定义 3 及定理 6，知道 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 是 H 的近似标架且其标架界分别是

$$A'=A\left(1-\frac{\mu}{\sqrt{A}}\right)^2$$

$$B'=B\left(1+\frac{\mu}{\sqrt{B}}\right)^2$$

记 $\{x_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 和 $\{y_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}$ 的近似标架算子分别是 S_x 和 S_y，准近似标架算子分别是 T_x 和 T_y，对任意有限数列 $\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\in l^2(1,2,\cdots,m_n;n\in\mathbb{N})$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{m_n}\alpha_{n,i}(\tilde{x}_{n,i}-\tilde{y}_{n,i})\right\|=$$

$$\|S_x^{-1}T_x(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})-S_y^{-1}T_y(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})\|=$$

$$\|S_x^{-1}T_x(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})-S_x^{-1}T_y(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})\|+$$

$$\|S_x^{-1}T_y(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})-S_y^{-1}T_y(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})\|=$$

$$\|S_x^{-1}\|\,\|T_x(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})-T_y(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})\|+$$

$$\|S_x^{-1}-S_y^{-1}\|\,\|T_y(\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})\|=$$

$$\mu\|S_x^{-1}\|\,\|\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}}\|+$$

$$\sqrt{B'}\|S_x^{-1}-S_y^{-1}\|\,\|\{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n\\ n\in\mathbb{N}}})\|$$

下面去估计 $\|S_x^{-1}-S_y^{-1}\|$，由定义 3 知

$$\|S_x-S_y\|=\|T_xT_x^*-T_yT_y^*\|=$$

$$\|T_xT_x^*-T_xT_y^*+T_xT_y^*-T_yT_y^*\|\leqslant$$

$$\|T_x(T_x^*-T_y^*)\|+\|(T_x-T_y)T_y^*\|\leqslant$$

$$\mu(\sqrt{B}+\sqrt{B'})\leqslant\|S_x^{-1}\|^{-1}\frac{\mu(\sqrt{B}+\sqrt{B'})}{A}$$

令 $\beta=\dfrac{\sqrt{B}+\sqrt{B'}}{A}$. 由于

$$B'=B\left(1+\frac{\mu}{\sqrt{B}}\right)^2$$

知

$$\sqrt{B'} = \sqrt{B} + \mu$$

因此

$$\beta\mu = \frac{2\sqrt{B} + \mu}{A}\mu$$

又因为

$$\mu < \sqrt{A+B} - \sqrt{B}$$

因此

$$\beta\mu < \frac{2\sqrt{B} + (\sqrt{A+B} - \sqrt{B})}{A}(\sqrt{A+B} - \sqrt{B}) < 1$$

由引理 2 知

$$\| S_y^{-1} - S_x^{-1} \| \leqslant \frac{\beta\mu}{1-\beta\mu} \| S_x^{-1} \|$$

综上可知

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{n,i}(\tilde{x}_{n,i} - \tilde{y}_{n,i}) \right\| \leqslant$$

$$\left(\frac{\mu}{A} + \frac{\sqrt{B'}}{A}\frac{\beta\mu}{1-\beta\mu}\right) \times \| \{\alpha_{n,i}\}_{\substack{i=1,2,\cdots,m_n \\ n\in\mathbb{N}}} \|$$

因此

$$\lambda = \frac{\mu}{A} + \frac{\sqrt{B'}}{A}\frac{\beta\mu}{1-\beta\mu} =$$

$$\frac{\mu}{A}\left(1 + \frac{(2\sqrt{B}+\mu)(\sqrt{B}+\mu)}{A-(2\sqrt{B}+\mu)\mu}\right)$$

证毕.

4 结论

1）引入了近似对偶标架的概念,得到了一些等价表达,见引理 3.

2）利用引理 4、5,得到了任一近似标架的所有近似对偶标架的一种精确表达,见定理 3.

3）依据实际应用中的需要,得到了任一近似标架的所有近似对偶标架的另一种精确表达,见定理 4.

4）利用定理 4 的结果,得到了近似对偶标架的扰动结果,见定理 5.

5）得到了典范近似对偶的扰动结果,见定理 7.

参考文献:

[1] DUFFIN D J, SCHAEFFER A C. A class of nonharmonic fourierseries[J]. Trans Amer Math Soc, 1952, 72: 341-366.

[2] DAUBECHIES I. Ten lectures on wavelets [M]. Philadelphia: SIAM, 1992.

[3] KHOSRAVI A, MUSAZADEH K. Fusion frames and g-frames[J]. J Math Anal Appl, 2008, 342: 1068-1083.

[4] SUN W C. G-frame and g-Riesz bases[J]. J Math Anal Appl, 2006, 322(1): 437-452.

[5] GAVRUTA L. Frames for operators[J]. Har Anal App Comut, 2012, 32(1): 139-144.

[6] SHARMA S K, ZOTHANSANGA A, KAUSHIK S K. On approximative frames in Hilbert spaces [J]. Palestine Journal of Mathematics, 2014, 3(2): 148-159.

[7] CHRISTENSEN O. An introduction to frames and Rieszbases[M]. Boston: Birkhauser, 2002: 126-130.

[8] RUDIN W. Functional Analysis[M]. 2nd ed. New York: McGraw Hill, 1991: 150-153.

[9] CASAZZA P G, CHRISTENSEN O. Perturbation of operators and applications to frame theorey[J]. J Fourier Anal Appl, 1997, 3(5): 543-557.

[10] HEINEKEN S, MATUSIAK E. Perturbed frame sequences: canonical dual systems approximate reconstructions and applications[J]. International Journal of Wavelets, Multiresolutionand Information Processing, 2014, 12(2): 1450019.

（责任编辑 吕小红）