第18卷 第3期　　北 京 工 业 大 学 学 报　　Vol.18, No.3
1992年9月　　JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY　　Sep, 1992

常微分方程的两个新的可积类型

汤光宋
（江汉大学）

【摘要】提出了两类常微分方程$f^{(n)}(x)=Af^{(n-1)}(\frac{ax+b}{cx+d})$及$f^{(n)}(x)=\frac{A\varphi(x)}{f^{(n-1)}(g(x))}$，论证了它们都是可积的，获得的结果是对有关文献结论的推广.

【关键词】微分方程，可积类型，变量替换，求导法
【中图分类号】 O172

我们采用变量替换及求导法，将文献[1]研究方程$f'(x)=Af(\frac{ax+b}{cx-a})$的可积性，推广到$f^{(n)}(x)=Af^{(n-1)}(\frac{ax+b}{cx+d})$. 再巧妙地将文献[2]研究方程$f'(x)=af(g(x))$的可积性中的$f(g(x))$视为指数1，对称地研究了方程$f^{(n)}(x)=\frac{A\varphi(x)}{f^{(n-1)}(g(x))}$的可积性.

定理1　设$f\in c^{n+1}$，a、b、c、d、A均为常数，且$A\neq 0$，$ad\neq bc$，$c\neq 0$，n为正整数，约定$f^{(0)}=f$，则常数微分方程

$$f^{(n)}(x)=Af^{(n-1)}(\frac{ax+b}{cx+d}) \tag{1}$$

是可积的.

证明　将方程(1)的两边对x求导得

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{A(ad-bc)}{(cx+d)^2}f^{(n)}(\frac{ax+b}{cx+d}) \tag{2}$$

由(1)式可得

$$f^{(n)}(\frac{ax+b}{cx+d})=Af^{(n+1)}(x) \tag{3}$$

再将(3)式代入(2)式得

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{A^2(ad-bc)}{(cx+d)^2}f^{(n-1)}(x) \tag{4}$$

令 $y=f^{(n-1)}(x)$　　(5)

将(5)式代入(4)式得

$$y''=\frac{A^2(ad-bc)}{(cx+d)^2}y \tag{6}$$

这已是可积的Euler方程，其通解记为$y=y(x, c_1, c_2)$，代入(5)式再积分$n-1$次，将其解记

收稿日期：1991-04-17.

为$f=f(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n+1})$，至此原方程(1)得解，即是说原理方程(1)是可积的．证毕．

很明显，当定理1中的$n=1$, $d=-a$时，即为文献[1]研究的情形．

定理2　设$f\in c^{n+1}$, $f\neq 0$, $f^{(n-1)}\neq 0$, $f^{(n)}\neq 0$, $\varphi\in c^1$, $\varphi\neq 0$, $g\in C^1$, $g\neq$常数，A为非零常数，n为正整数，且约定$f^{(0)}=f$，则常微分方程

$$f^{(n)}(x)=\frac{A\varphi(x)}{f^{(n-1)}(g(x))} \tag{7}$$

是可积的．

证明　将方程(7)的两边对x求导得

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{A\varphi'(x)}{f^{(n-1)}(g(x))}-A\varphi(x)-\frac{g'(x)f^{(n)}(g(x))}{[f^{(n-1)}(g(x))]^2} \tag{8}$$

由(7)式得

$$f^{(n-1)}(g(x))=\frac{A\varphi(x)}{f^{(n)}(x)}, \quad f^{n}(g(x))=\frac{A\varphi(x)}{f^{(n-1)}(x)} \tag{9}$$

将(9)式代入(8)式得

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}f^{(n)}(x)-\frac{g'(x)\varphi(g(x))}{\varphi(x)}\ \frac{[f^{(n)}(x)]^2}{f^{(n-1)}(x)} \tag{10}$$

令$y=f^{(n-1)}(x)$　(11)

(10)式可变形为

$$yy''-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}yy'+\frac{g'(x)\varphi(g(x))}{\varphi(x)}y'^2=0 \tag{12}$$

这已是二阶非线性方程．

再令$y'=uy$　(13)

将(13)式代入(12)整理得

$$u'-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}u+[1+\frac{g'(x)\varphi(g(x))}{\varphi(x)}]u^2=0 \tag{14}$$

这已是可积的Bernoulli方程，其通解记为

$$u=u(x, c_1) \tag{15}$$

将(15)式代入(13)式分离变量后积分记为

$$y=y(x, c_1, c_2) \tag{16}$$

再将(16)式代入(11)式积分$n-1$次，记为

$$f=f(x, c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}) \tag{17}$$

至此原方程(7)得解，故原方程(7)是可积的．证毕．

不难看出定理2是文献[2]在某种意义下的拓广．直接由定理2容易得到如下推论:

推论1　设$f\in c^{n+1}$, $f\neq 0$, $f^{(n-1)}\neq 0$, $f^{(n)}\neq 0$, $\varphi\in c^1$, $\varphi\neq 0$, A, a, b, c, d均为常数，且$A\neq 0$, $ad\neq bc$, $c\neq 0$, n为正整数，还约定$f^{(0)}=f$，则常微分方程

$$f^{(n)}(x)=\frac{A\varphi(x)}{f^{(n-1)}(\frac{ax+b}{cx+d})}$$

是可积的.

推论 2 设 $f\in c^2$, $f\neq 0$, $f'\neq 0$, $\varphi\in c^1$, $\varphi\neq 0$, A, a, b, c, d 均为常数, 且 $A\neq 0$, $ad\neq bc$, $c\neq 0$, 则常数微分方程

$$f'(x)=\frac{A\varphi(x)}{f(\frac{ax+b}{cx+d})}$$

是可积的.

参考文献

1 杨安洲, 魏绍谦. 方程 $f'(x)=Af(\frac{ax+b}{cx-a})+B$. 北京工业大学学报, 1982, 8(3): 133

2 Utz, W. R, The .equation $f'(x)=af(g(x))$ Bull, Amer, Math, soc, 71(1965) nol. Jan.

The New Integrable Kind of Ordinary Differential Equations

Thang Guangsong

(Jianhan University)

【Abstract】 Gives two kind of orinary differential equatinos: $f^{(n)}(x)=Af^{(n-1)}(\frac{ax+b}{cx+d})$ and $f^{(n)}(x)=\frac{A\varphi(x)}{f^{(n-1)}(g(x))}$, proffs that they are integrable, the result is the generalization of some results in relevant papers.

【Key words】 differential equation, integrable kind, transformation of a variable, mathod of derivation