物理常数及内力位移一般公式
—用等效连续法分析网壳

曹 资　　张善余

（建筑结构教研室）

摘　　要

本文推导出网壳的等效连续壳的各项物理常数通用计算公式，适用于任意形式的网格单元；并给出一般形式网格的等效正交各向异性园柱壳的内力和位移计算公式。

General Formulae of Physical Constants, Internal Forces and Displacements —Analysis of Reticulated Shells by Equivalent Continuous Method

Cao Zi　　Zhang Shan—yu

Abstract

The common calculating formulae for physical constants of equivalent continuum shell of reticulated shell were written out in this paper. These formulae are suitcd for analysis of the reticulated shells consisting of arbitrary grids. In the meantime, the calculating formulae for internal forces and displacements of a normal anisotropic cylindrical shell which is equivalent to reticulated shells consisting of general grids were deduced.

本文于 1980 年 10 月 10 日收到。

一、概　　述

用等效连续法分析网壳是一种近似的实用计算方法。其基本依据是认为网壳中的网格尺寸较跨度尺寸小得很多，因此可近似地假设杆件中的应力和应变是连续变化的，将网壳的模型置换为连续壳的模型，应用连续壳的各种计算方法来分析，以后再推求出网壳中杆件的內力和节点的位移。

近卅年来，国內外已有不少文献[1]~[9]论述了用等效连续壳分析常用网壳的方法，也有不少工程实践的经验。对于中、小型网壳来说，其计算结果一般能滿足工程精度的要求。与其他各种分析方法相比，该法较为简捷实用，可用手算或用小容量计算机求解。因此，既使在电子计算机使用非常普及的国家中，目前此法也沒有失去其实用价値。但网壳的等效连续分析法至今仍存在一些问题有待研究解决。

1. 如何将计算模型合理地简捷地置换？即是如何确定等效连续壳的各项物理常数，这是等效连续法的关鍵。在有些文献中沿用一般网格结构连续化分析的习惯做法，采用所谓等效的（或折算的）弹性模量、波桑系数、厚度等物理常数，这对各向同性的网壳来说是适宜的，但对一般网格情况的各向异性壳来说就比较困难，同时以上各物理常数在有些文献中有不同的含意，不易统一。此外，在大部份文献中均为在附加一些简化假定条件下（如忽略网格杆件的扭矩等），针对某一特定的网格形式来计算出各项物理常数。因此，需要针对任意形式的网格单元建立一般性通用的较为准确的计算公式。

2. 置换后的等效壳一般是各项异性的，目前对各向异性壳求解的现成公式和图表较少，需用时尙需再进行推导，较为繁复。如何迅速地计算出各向异性壳的內力和位移也是要介决的一个问题。

3. 计算结果的精度常常不易控制。

本文就是对上述前两个问题作一些探讨，以网格单元的薄膜柔度系数 a_{ij} 和弯曲刚度系数 d_{ij} 为基本物理常数。推导出一般性的计算公式，并给出几种常用网格较为准确的物理常数。对于正交各向异性园柱壳也给出了內力和位移的一般公式，为电算或手算都创造了方便的条件。

二、各项物理常数的确定

由广义虎克定律，连续壳中应变和內力有如下线性关系式

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_X\\ N_Y\\ N_{XY}\end{pmatrix} \tag{1}$$

或

$$\begin{pmatrix}N_X\\ N_Y\\ N_{XY}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\\ \gamma_{XY}\end{pmatrix} \tag{2}$$

同样

$$\begin{pmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_{XY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{pmatrix} \tag{3}$$

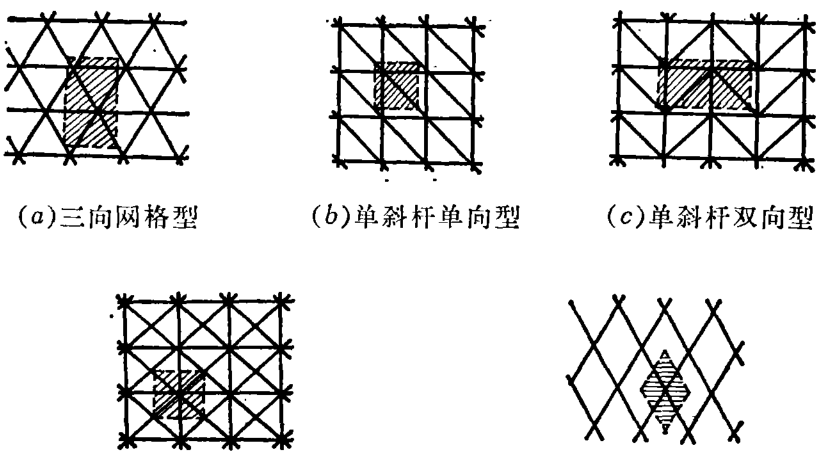
或

$$\begin{pmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_{XY} \end{pmatrix} \tag{4}$$

式中：a_{ij}、b_{ij} 分别为薄膜柔度和薄膜刚度；c_{ij}，d_{ij} 分别为弯曲柔度和弯曲刚度。

为要建立等效连续壳的基本微分方程，需先确定出等效连续壳的各项物理常数。由于柔度矩阵和刚度矩阵都是对称的，因此一般只需确定 12 个物理常数，其中常包括六个薄膜柔度 a_{ij} 和六个弯曲刚度 d_{ij}。

确定物理常数一般是根据网壳的基本网格单元与其相应的连续壳单元內力和变形等效或形变能等效的原则。所取的基本网格单元应该是最简单的、包括网壳中所有各种类型杆件在內的、有代表性的一部分。网壳中杆件布置的形式很多，单层园柱形网壳常见的类型有：三向网格型、单斜杆单向型、单斜杆双向型、双斜杆型、联方网型等，如图 1 所示。其基本网格单元的选取也可见图 1 的示例。这些网格中杆件的內力一般均假设在网格单元中面內只承受轴向力（联方网型除外），在中面外承受弯矩和扭矩。



(*a*)三向网格型　(*b*)单斜杆单向型　(*c*)单斜杆双向型　(*d*)双斜杆型　(*e*)联方网型

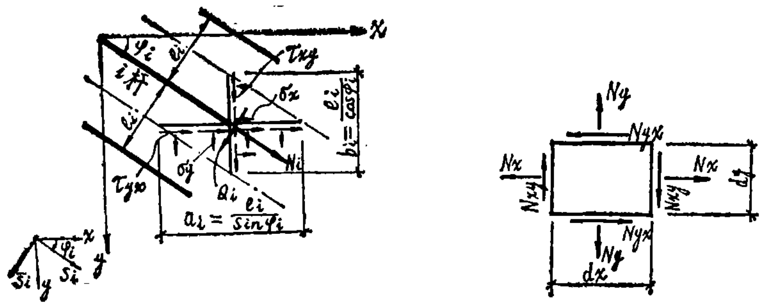
图　1

（一）一般公式的推导

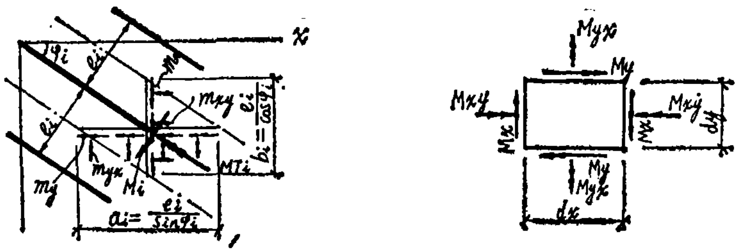
1. 抗弯刚度 d_{ij} 的一般公式

取结构的整体坐标 x、y 如图 2 所示（基本网格单元不一定与 x、y 平行，可成任意角度）。设基本网格单元中任一类型的杆件 i 与 x 轴正向的夹角为 φ_i，i 杆的间距为 e_i，以 i 杆身的方向为局部坐标 s_i，与 i 杆垂直的方向为 $\overline{s_i}$。

将图 2a 中假想的 i 杆內力分别在 x 方向和 y 方向等效变换为分布力。



(a)



(b)

图 2

$$\sigma_X=\frac{|\cos\varphi_i|}{e_i}(N_i\cos\varphi_i-Q_i\sin\varphi_i)$$

$$\tau_{XY}=\frac{|\cos\varphi_i|}{e_i}(N_i\sin\varphi_i+Q_i\cos\varphi_i)$$

$$\sigma_Y=\frac{|\sin\varphi_i|}{e_i}(N_i\sin\varphi_i+Q_i\cos\varphi_i)$$

$$\tau_{YX}=\frac{|\sin\varphi_i|}{e_i}(N_i\cos\varphi_i-Q_i\sin\varphi_i)$$

当 φ_i 为由 x 轴正方向旋转至 i 杆所得的角度（$0\leqslant\varphi_i\leqslant2\pi$），则上式恰可写成下列一般通用关系式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_X&=\frac{1}{e_i}(N_i\cos^2\varphi_i-Q_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i)\\\sigma_Y&=\frac{1}{e_i}(N_i\sin^2\varphi_i+Q_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i)\\\tau_{XY}&=\frac{1}{e_i}(N_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i+Q_i\cos^2\varphi_i)\\\tau_{YX}&=\frac{1}{e_i}(N_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i-Q_i\sin^2\varphi_i)\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

由此同样可得到（图2 b）

$$
\left.\begin{aligned}
m_X &= \frac{1}{e_i}(M_i\cos^2\varphi_i - M_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i)\\
m_Y &= \frac{1}{e_i}(M_i\sin^2\varphi_i + M_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i)\\
m_{XY} &= \frac{1}{e_i}(M_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i + M_{Ti}\cos^2\varphi_i)\\
m_{YX} &= \frac{1}{e_i}(M_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i - M_{Ti}\sin^2\varphi_i)
\end{aligned}\right\} \tag{6}
$$

如将基本网格单元上所有杆件（$i=1, 2, \cdots n$）的M_i、M_{Ti}均等效变换到 x、y 面上，则得到 x、y 面上等效内力的总和为

$$
\left.\begin{aligned}
M'_X &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}(M_i\cos^2\varphi_i - M_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i)\\
M'_Y &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}(M_i\sin^2\varphi_i + M_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i)\\
M'_{XY} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}(M_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i + M_{Ti}\cos^2\varphi_i)\\
M'_{YX} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}(M_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i - M_{Ti}\sin^2\varphi_i)
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

当 i 杆的抗弯刚度为D_i、抗扭刚度为D_{Ti}时，i 杆的弯矩M_i扭矩M_{Ti}与变形有如下关系

$$M_i=-D_i\frac{\partial^2 w}{\partial s_i^2},\qquad M_{Ti}=-D_{Ti}\frac{\partial^2 w}{\partial s_i\partial \bar{s}_i}$$

由坐标变换

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s_i^2}=\cos^2\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sin^2\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\sin\varphi_i\cos\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s_i\partial \bar{s}_i}=-\sin\varphi_i\cos\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sin\varphi_i\cos\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(\cos^2\varphi_i-\sin^2\varphi_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

得

$$
\left.\begin{aligned}
M_i &= -D_i\left[\cos^2\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sin^2\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\sin\varphi_i\cos\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]\\
M_{Ti} &= -D_{Ti}\left[-\sin\varphi_i\cos\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sin\varphi_i\cos\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(\cos^2\varphi_i-\sin^2\varphi_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{8}
$$

令

$$K_X=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\qquad K_Y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\qquad K_{XY}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

则

$$M_i=D_i[\cos^2\varphi_i K_X+\sin^2\varphi_i K_Y+\sin\varphi_i\cos\varphi_i K_{XY}]$$

$$M_{Ti}=D_{Ti}\left[-\sin\varphi_i\cos\varphi_i K_X+\sin\varphi_i\cos\varphi_i K_Y+\frac{1}{2}(\cos^2\varphi_i-\sin^2\varphi_i)K_{XY}\right]$$

连续壳单元上内力和应变的关系如前所述为

$$M_X=d_{11}K_X+d_{12}K_Y+d_{13}K_{XY}$$

$$M_Y = d_{21}K_X + d_{22}K_Y + d_{23}K_{XY}$$
$$M_{XY} = d_{31}K_X + d_{32}K_Y + d_{33}K_{XY}$$

根据网格单元与连续壳单元内力等效的原则，使

$$M_X = M'_X, \qquad M_Y = M'_Y, \qquad M_{XY} = \frac{1}{2}(M'_{XY} + M'_{YX})$$

即连续壳单元上的内力M_X、M_Y、M_{XY} 为

$$\left.\begin{aligned}
M_X &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}[M_i \cos^2\varphi_i - M_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i] \\
M_Y &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}[M_i \sin^2\varphi_i + M_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i] \\
M_{XY} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}\left[M_i \sin\varphi_i\cos\varphi_i + \frac{1}{2}M_{Ti}(\cos^2\varphi_i - \sin^2\varphi_i)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

如分别给网格单元和连续壳单元同样的单位位移，即能介出等效连续壳的弯曲刚度d_{ij}，例如，给$K_X = 1$，$K_Y = 0$，$K_{XY} = 0$时，由式（8）得

$$\overline{M}_i = D_i\cos^2\varphi_i, \qquad \overline{M}_{Ti} = -D_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i$$

代入式（9）则得

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M}_X = d_{11} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}[D_i\cos^4\varphi_i + D_{Ti}\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i] \\
\overline{M}_Y = d_{21} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}[D_i - D_{Ti}]\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i \\
\overline{M}_{XY} = d_{31} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}\left[D_i\sin\varphi_i\cos^3\varphi_i - \frac{1}{2}D_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(\cos^2\varphi_i - \sin^2\varphi_i)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

给　$K_X = 0$，$K_Y = 1$，$K_{XY} = 0$时，由式（8）得

$$\overline{M}_i = D_i\sin^2\varphi_i, \qquad \overline{M}_{Ti} = D_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i$$

代入式（9）则得

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M}_X = d_{12} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}[D_i - D_{Ti}]\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i \\
\overline{M}_Y = d_{22} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}[D_i\sin^4\varphi_i + D_{Ti}\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i] \\
\overline{M}_{XY} = d_{32} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}\left[D_i\sin^3\varphi_i\cos\varphi_i + \frac{1}{2}D_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(\cos^2\varphi_i - \sin^2\varphi_i)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

给　$K_X = 0$，$K_Y = 0$，$K_{XY} = 1$时，由式（8）得

$$\overline{M}_i = D_i\sin\varphi_i\cos\varphi_i$$
$$\overline{M}_{Ti} = \frac{1}{2}D_{Ti}(\cos^2\varphi_i - \sin^2\varphi_i)$$

代入式（9）则得

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M}_X=d_{13}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}\left[D_i\sin\varphi_i\cos^3\varphi_i-\frac{1}{2}D_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(\cos^2\varphi_i-\sin^2\varphi_i)\right]\\
\overline{M}_Y=d_{23}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}\left[D_i\sin^3\varphi_i\cos\varphi_i+\frac{1}{2}D_{Ti}\sin\varphi_i\cos\varphi_i(\cos^2\varphi_i-\sin^2\varphi_i)\right]\\
\overline{M}_{XY}=d_{33}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{e_i}\left[D_i\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i+\frac{1}{4}D_{Ti}(\cos^2\varphi_i-\sin^2\varphi_i)^2\right]
\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

由式（10),(11)，(12)即可求出各种类型网格单元的等效连续壳弯曲刚度 d_{ij}。式中 φ_i 为 i 杆与 x 轴正向的夹角（$0\leqslant\varphi_i\leqslant2\pi$）。

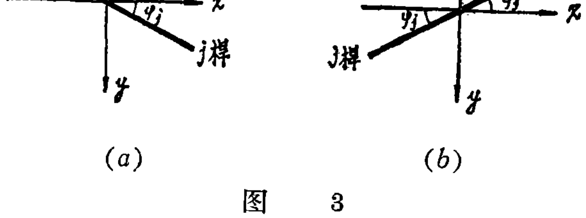
为了计算方便，如果在基本网格单元中有与 x、y 轴平行的杆件，则可先将这些杆件提到“Σ”符号外面，即使Σ符号仅表示各斜杆的总和。设斜杆类型编号为 j，x 方向和 y 方向杆件的抗弯刚度、抗扭刚度以及杆件的间距分别为 D_H、D_{TH}、e_H 和D_V、D_{TV}、e_V，并将斜杆 j 与 x 轴的夹角 φ_i 改为与 x 轴所夹的锐角，则式（10)、(11)、(12）可简化为

$$\left.\begin{aligned}
d_{11}&=\frac{D_H}{e_H}+\sum_j\frac{1}{e_j}[D_j\cos^4\varphi_j+D_{Tj}\sin^2\varphi_j\cos^2\varphi_j]\\
d_{12}&=\sum_j\frac{1}{e_j}[D_j-D_{Tj}]\sin^2\varphi_j\cos^2\varphi_j\\
d_{13}&=\pm\sum\frac{1}{e_j}\left[D_j\sin\varphi_j\cos^3\varphi_j-\frac{1}{2}D_{Tj}\sin\varphi_j\cos\varphi_j(\cos^2\varphi_j-\sin^2\varphi_j)\right]\\
d_{22}&=\frac{D_V}{e_V}+\sum_j\frac{1}{e_j}[D_j\sin^4\varphi_j+D_{Tj}\sin^2\varphi_j\cos^2\varphi_j]\\
d_{23}&=\pm\sum_j\frac{1}{e_j}\left[D_j\sin^3\varphi_j\cos\varphi_j+\frac{1}{2}D_{Tj}\sin\varphi_j\cos\varphi_j(\cos^2\varphi_j-\sin^2\varphi_j)\right]\\
d_{33}&=\frac{D_{TH}}{4e_H}+\frac{D_{TV}}{4e_V}+\sum_j\frac{1}{e_j}\left[D_j\sin^2\varphi_j\cos^2\varphi_j+\frac{1}{4}D_{Tj}(\cos^2\varphi_j-\sin^2\varphi_j)^2\right]
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

式中 d_{13}和d_{23}正负号的取法：

当斜杆方向为图 3 a 时，取“+”号；

当斜杆方向为图 3 b 时，取“−”号。



(a)　　　(b)

图　3

2. 薄膜刚度 b_{ij} 的一般公式

用求弯曲刚度 d_{ij} 同样的方法可求得薄膜刚度 b_{ij}，只需将式(13)中的抗弯刚度 D_i 用杆件的抗拉刚度 B_i 代替，并用0代替 D_{Ti}，即得各种网格单元（除联方网型外）的 b_{ij} 一般公式

$$
\left.\begin{aligned}
b_{11}&=\frac{B_H}{e_H}+\sum_j\frac{Bj}{e_j}\cos^4\varphi_j\\
b_{12}&=\sum_j\frac{B_j}{e_j}\sin^2\varphi_j\cos^2\varphi_j\\
b_{13}&=\pm\sum_j\frac{B_j}{e_j}\sin\varphi_j\cos^3\varphi_j\\
b_{22}&=\frac{B_V}{e_V}+\sum_j\frac{B_j}{e_j}\sin^4\varphi_j\\
b_{23}&=\pm\sum_j\frac{B_j}{e_j}\sin^3\varphi_j\cos\varphi_j\\
b_{33}&=\sum_j\frac{B_j}{e_j}\sin^2\varphi_j\cos^2\varphi_j
\end{aligned}\right\}\tag{14}
$$

式中 φ_j 为斜杆 j 与 x 轴所夹的锐角。b_{13}，b_{23} 正负号的取法与弯曲刚度相同。

3. 薄膜柔度 a_{ij} 的计算

薄膜柔度 a_{ij} 可以由薄膜刚度的一般计算公式来表示

$$
a_{ij}=\frac{A_{ij}}{D},\qquad D=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{vmatrix}\tag{15}
$$

式中 A_{ij} 为行列式 D 的各代数余子式。

各种网格单元在求出薄膜刚度 b_{ij} 以后，薄膜柔度 a_{ij} 不难用上式求得。

对于静定的网格单元，有时直接计算薄膜柔度也比较方便，此处不再详述。

（二）几种常用网格物理常数的计算公式

1. 三向网格型单元的物理常数公式

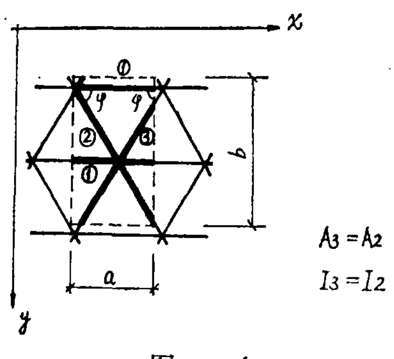
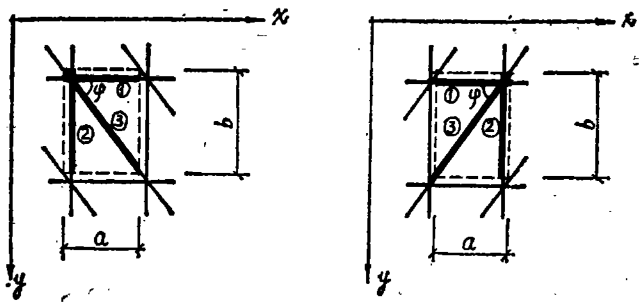


图 4

物理常数	任意 φ 角	$\varphi=60^\circ$	$\varphi=60^\circ$ $A_1=A_2=A_3$ $I_1=I_2=I_3$
d_{11}	$\frac{2}{b}[D_1+D_2\cos^3\varphi+ +D_{T2}\sin^2\varphi\cos\varphi]$	$\frac{1}{4\sqrt{3}a}(8D_1+D_2+3D_{T2})$	$\frac{\sqrt{3}}{4a}(3D+D_T)$
d_{12}	$\frac{2}{a}(D_2-D_{T2})\sin\varphi\cos^2\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{4a}(D_2-D_{T2})$	$\frac{\sqrt{3}}{4a}(D-D_T)$
d_{13}	0	0	0
d_{22}	$\frac{2}{a}[D_2\sin^3\varphi +D_{T2}\sin\varphi\cos^2\varphi]$	$\frac{\sqrt{3}}{4a}(3D_2+D_{T2})$	$\frac{\sqrt{3}}{4a}(3D+D_T)$
d_{23}	0	0	0
d_{33}	$\frac{1}{b}\left[\frac{1}{2}D_{T1}+2D_2\sin^2\varphi\cos\varphi +D_{T2}\frac{(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2}{2\cos\varphi}\right]$	$\frac{1}{4\sqrt{3}a}(2D_{T1}+3D_2+ +D_{T2})$	$\frac{\sqrt{3}}{4a}(D+D_T)$
a_{11}	$\frac{a}{2B_1}\mathrm{tg}\varphi$	$\frac{\sqrt{3}a}{2B_1}$	$\frac{\sqrt{3}a}{2B}$
a_{12}	$-\frac{a}{2B_1\mathrm{tg}\varphi}$	$-\frac{a}{2\sqrt{3}B_1}$	$-\frac{a}{2\sqrt{3}B}$
a_{13}	0	0	0
a_{22}	$\frac{a\left(1+\frac{A_2}{A_1}\cos^3\varphi\right)}{2B_2\sin^3\varphi}$	$\frac{a\left(8+\frac{A_2}{A_1}\right)}{6\sqrt{3}B_2}$	$\frac{\sqrt{3}a}{2B}$
a_{23}	0	0	0
a_{33}	$\frac{a}{2B_2\cos^2\varphi\sin\varphi}$	$\frac{4a}{\sqrt{3}B_2}$	$\frac{4a}{\sqrt{3}B}$

2. 单斜杆型单元的物理常数公式



(a) (b)

图 5

物理常数	任　意　φ　角	$\varphi\pm45^\circ$　$A_1=A_2=A;\ A_3=\dfrac{A}{\sqrt{2}}$　$I_1=I_2=I;\ I_3=\dfrac{I}{\sqrt{2}}$
d_{11}	$\frac{1}{b}[D_1+D_3\cos^3\varphi+D_{T3}\sin^2\varphi\cos\varphi]$	$\frac{5D+D_T}{4a}$
d_{12}	$\frac{1}{a}[D_3-D_{T3}]\sin\varphi\cos^2x$	$\frac{D-D_T}{4a}$
d_{13}	$\pm\frac{1}{b}\left[D_3\sin\varphi\cos^2\varphi-\frac{1}{2}D_{T3}\sin\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\right]$	$\pm\frac{D}{4a}$
d_{22}	$\frac{1}{a}[D_2+D_3\cos^3\varphi+D_{T3}\sin\varphi\cos^2\varphi]$	$\frac{5D+D_T}{4a}$
d_{23}	$\pm\frac{1}{a}\left[D_3\sin^2\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}D_{T3}\cos\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\right]$	$\pm\frac{D}{4a}$
d_{33}	$\frac{D_{T2}}{4a}+\frac{1}{b}\left[\frac{D_{T1}}{4}+D_3\sin^2\varphi\cos\varphi+\frac{1}{4}D_{T3}\frac{1}{\cos\varphi}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2\right]$	$\frac{2D_T+D}{4a}$
a_{11}	$\frac{b}{B_1}$	$\frac{a}{B}$
a_{12}	0	0
a_{13}	$\mp\frac{a}{B_1}$	$\mp\frac{a}{B}$
a_{22}	$\frac{a}{B_2}$	$\frac{a}{B}$
a_{23}	$\mp\frac{b}{B_2}$	$\mp\frac{a}{B}$
a_{33}	$\frac{a}{B_1\operatorname{tg}\varphi}+\frac{b\operatorname{tg}\varphi}{B_2}+\frac{a}{B_3\sin\varphi\cos^2\varphi}$	$\frac{6a}{B}$

当图（a）时取上面的正负号，图(b）时取下面的正负号。

3．双斜杆型单元的物理常数公式

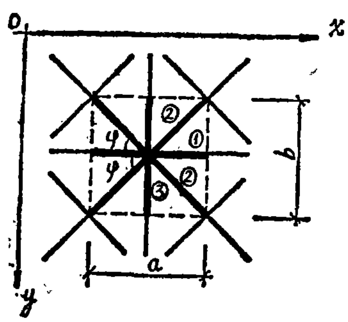


图 6

物理常数	任　意　φ　角	$\varphi=45°$　$A_1=A_3=A;\ A_2=\dfrac{A}{\sqrt{2}}$　$I_1=I_3=I;\ I_2=\dfrac{I}{\sqrt{2}}$
d_{11}	$\dfrac{1}{b}[D_1+2D_2\cos^3\varphi+2D_{T2}\sin^2\varphi\cos\varphi]$	$\dfrac{1}{2a}(3D+D_T)$
d_{12}	$\dfrac{2}{a}[D_2-D_{T2}]\sin\varphi\cos^2\varphi$	$\dfrac{1}{2a}(D-D_T)$
d_{13}	0	0
d_{22}	$\dfrac{1}{a}[D_3+2D_2\sin^3\varphi+2D_{T2}\sin\varphi\cos^2\varphi]$	$\dfrac{1}{2a}(3D+D_T)$
d_{23}	0	0
d_{33}	$\dfrac{1}{4b}D_{T1}+\dfrac{1}{4a}D_{T3}+\dfrac{1}{b}\Big[2D_2\sin^2\varphi\cos\varphi+\dfrac{1}{2}D_{T2}\dfrac{1}{\cos\varphi}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2\Big]$	$\dfrac{1}{2a}(D+D_T)$
a_{11}	$\dfrac{b(B_3+2B_2\sin^3\varphi)}{B_1B_3+2B_1B_2\sin^3\varphi+2B_2B_3\cos^3\varphi}$	$\dfrac{3a}{4B}$
a_{12}	$-\dfrac{2bB_2\sin\varphi\cos^2\varphi}{B_1B_3+2B_1B_2\sin^3\varphi+2B_2B_3\cos^3\varphi}$	$-\dfrac{a}{4B}$
a_{13}	0	0
a_{22}	$\dfrac{a(B_1+2B_2\cos^3\varphi)}{B_1B_3+2B_1B_2\sin^3\varphi+2B_2B_3\cos^3\varphi}$	$\dfrac{3a}{4B}$
a_{23}	0	0
a_{33}	$\dfrac{b}{2B_2\sin^3\varphi\cos\varphi}$	$\dfrac{2a}{B}$

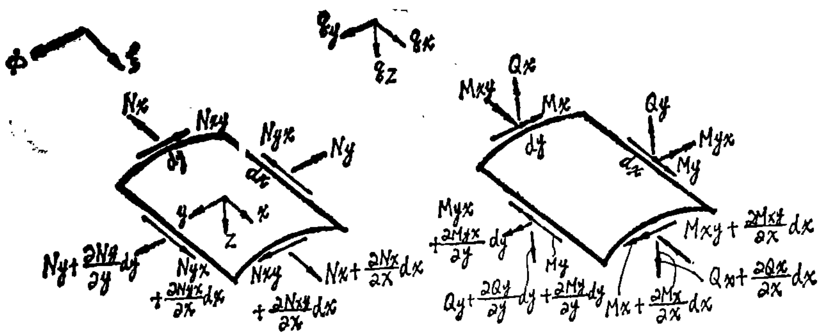
三、基本微分方程的解及内力位移计算公式

由常用类型网壳的物理常数可以看出，多数基本网格单元是属于正交各向异性的，有的虽不属正交各向异性，但有时为了使计算简化，常设法近似地按正交各向异性壳来进行计算。这里仅针对正交各向异性园柱壳情况来讨论基本微分方程的解。

壳微小单元薄膜内力见图 $7a$，弯曲内力见图 $7b$。

当 $q_X=0$ 时，园柱形正交各向异性壳基本微分方程为

$$\left.\begin{aligned}
&d_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+2(d_{12}+2d_{33})\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\phi^2}+d_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\phi^4}-R\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=R^4 q_Z\\
&a_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\xi^4}+(2a_{12}+a_{33})\frac{\partial^4\varphi}{\partial\xi^2\partial\phi^2}+a_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\phi^4}+R\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\\
&\qquad=R^2a_{22}\int\frac{\partial^2 q_Y}{\partial\xi^2}d\phi+R^3a_{11}\frac{\partial q_Y}{\partial\phi}
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$



(a)　　　　　　　　(b)

图　7

式中平面内力与应力函数之间的关系为

$$N_X=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad N_Y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\int q_Y d\,y,\quad N_{XY}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

ξ，ϕ 为无量纲座标　$\xi=\dfrac{x}{R}$，　$\phi=\dfrac{y}{R}$。

方程（16）的解是齐次方程的解和特介两部分的和。

（一）齐次方程的解

齐次方程

$$\left.\begin{aligned}
&d_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+2(d_{12}+2d_{33})\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\phi^2}+d_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\phi^4}-R\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}=0\\
&a_{22}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\xi^4}+(2a_{12}+a_{33})\frac{\partial^4\varphi}{\partial\xi^2\partial\phi^2}+a_{11}\frac{\partial^4\varphi}{\partial\phi^4}+R\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}=0
\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

设壳体两端简支在横隔上，横隔在其本身平面内是刚性的，所取坐标如图8所示，将 w、φ 按余弦级数在 ξ 方向展开为

$$\left.\begin{aligned}
w&=\Sigma w_n(\phi)\cos k_n\xi\\
\varphi&=\Sigma\varphi_n(\phi)\cos k_n\xi
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

式中 $k_n=\dfrac{n\pi R}{l}$（无量纲量），该式显然满足两端横隔处的边界条件，即当 $x=\pm\dfrac{l}{2}$ 或 $\xi=\pm\dfrac{l}{2R}$时，$w=0$。

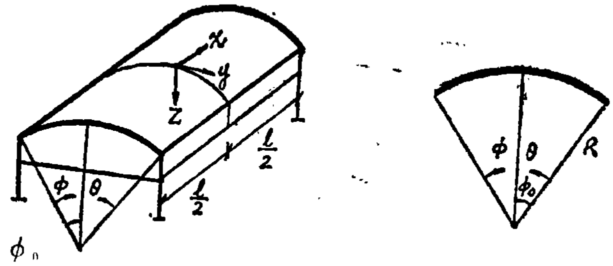


图　8

为简便起见，只取 $n=1$ 一项，将式（18）代入式（17）并消去 $\varphi(\phi)$，得 $w(\phi)$ 的八阶常微分方程为

$$\frac{d^8w(\phi)}{d\phi^8}+a\frac{d^6w(\phi)}{d\phi^6}+b\frac{d^4w(\phi)}{d\phi^4}+c\frac{d^2w(\phi)}{d\phi^2}+d=0 \tag{19}$$

式中 $a=-\left[\frac{2(d_{12}+2d_{33})}{d_{22}}+\frac{2(a_{12}+a_{33})}{a_{11}}\right]k^2$

$$b=\left[\frac{d_{11}}{d_{22}}+\frac{2(d_{12}+2d_{33})(2a_{12}+a_{33})}{a_{11}d_{22}}+\frac{a_{22}}{a_{11}}\right]k^4$$

$$c=-\left[\frac{(2a_{12}+a_{33})d_{11}}{a_{11}d_{22}}+\frac{2(d_{12}+2d_{33})a_{22}}{a_{11}d_{22}}\right]k^6$$

$$d=\left[\frac{a_{22}d_{11}}{a_{11}d_{22}}+\frac{R^2}{a_{11}d_{22}k^4}\right]k^8$$

设式（19）的解为 $w(\phi)=e^{r\phi}$ （20）

代入（19）式，消去公因子，得特征方程

$$r^8+ar^6+br^4+cr^2+d=0 \tag{21}$$

令 $r^2=\eta$ 代入上式得

$$\eta^4+a\eta^3+b\eta^2+c\eta+d=0 \tag{22}$$

式（22）有下列四个解

$$\left.\begin{aligned}\eta_{\frac{1}{2}}&=\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+f_1}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+f_1}\right)^2-4\left(\frac{f_1}{2}+\sqrt{\frac{f_1^2}{4}-d}\right)}\right]\\ \eta_{\frac{3}{4}}&=\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+f_1}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b-f_1}\right)^2-4\left(\frac{f_1}{2}-\sqrt{\frac{f_1^2}{4}-d}\right)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式中 $f_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\frac{b}{3}$

$$q=\frac{-2b^3+9abc-27a^2d+72bd-27c^2}{27},\qquad p=\frac{3ac-12d-b^2}{3},$$

由此求得特征方程（21）的根 $r=\pm\sqrt{\eta}$，共有八个。

$$\left.\begin{aligned}&r_{1,2}=\gamma\pm\beta i; &&r_{3,4}=\delta\pm\mu i\\ &r_{5,6}=-(\gamma\pm\beta i); &&r_{7,8}=-(\delta\pm\mu i)\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

式中 γ、β、δ、μ 是四个壳常数，仅与壳的各项物理常数和 R、l 有关。微分方程的解为

$$w=[(a_1e^{(\gamma+\beta i)\phi}+a_2e^{(\gamma-\beta i)\phi}+a_3e^{(\delta+\mu i)\phi}+a_4e^{(\delta-\mu i)\phi}$$
$$+a_5e^{-(\gamma+\beta i)\phi}+a_6e^{-(\gamma-\beta i)\phi}+a_7e^{-(\delta+\mu i)\phi}+a_8e^{-(\delta-\mu i)\phi}]\cos k\xi$$

上式中每两项 e 的指数为共轭复数，待定系数 a_1，$a_2\cdots a_8$ 亦为复数，由于位移 w 的解为实数，各待定常数之间必需满足一定的关系。因此，位移 w 可改写为下式

$$w=[e^{-\gamma\phi}(A_1\cos\beta\phi+A_2\sin\beta\phi)+e^{-\delta\phi}(A_3\cos\mu\phi+A_4\sin\mu\phi)$$

$$+e^{-\gamma\theta}(A_5\cos\beta\theta+A_6\sin\beta\theta)+e^{-\delta\theta}(A_7\cos\mu\theta+A_8\sin\mu\theta)]\cos k\xi \qquad (25)$$

式中A_1，$A_2\cdots A_8$为待定常数，由边界条件确定。ϕ 为自左边量起的角度，θ 为自 右边量起的角度，$\phi=2\phi_0-\theta$，见图8。为表示简单起见，取

$$F_{\substack{1\\5}}=e^{-\gamma\phi}\cos\beta\phi\pm e^{-\gamma\theta}\cos\beta\theta;\qquad F_{\substack{2\\6}}=e^{-\gamma\phi}\sin\beta\phi\pm e^{-\gamma\theta}\sin\beta\theta;$$

$$F_{\substack{3\\7}}=e^{-\delta\phi}\cos\mu\phi\pm e^{-\delta\theta}\cos\mu\theta;\qquad F_{\substack{4\\8}}=e^{-\delta\phi}\sin\beta\phi\pm e^{-\delta\theta}\cos\mu\theta;$$

则当壳体及荷载对称时（$A_1=A_5$，$A_2=A_6$，$A_3=A_7$，$A_4=A_8$）齐次方程的解可写为

$$w=(A_1F_1+A_2F_2+A_3F_3+A_4F_4)\cos k\xi \qquad (26)$$

壳体各项内力和位移的齐次方程的解分别为以下各式

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ N_X\\ N_Y\\ w\\ M_X\\ M_Y\\ \varepsilon_X\\ \varepsilon_Y\end{pmatrix}=\alpha_X[(B_1A_1-B_2A_2)F_1+(B_2A_1+B_1A_2)F_2+(B_3A_3-B_4A_4)F_3+(B_4A_3+B_3A_4)F_4]\cos k\xi. \qquad (27)$$

$$\begin{pmatrix}Q_X\\ u\end{pmatrix}=\alpha_X[(B_1A_1-B_2A_2)F_1+(B_2A_1+B_1A_2)F_2+(B_3A_3-B_4A_4)F_3+(B_4A_3+B_3A_4)F_4]\sin k\xi \qquad (28)$$

$$\begin{pmatrix}N_{XY}\\ M_{XY}\\ \gamma_{XY}\end{pmatrix}=\alpha_X[(B_1A_1-B_2A_2)F_5+(B_2A_1+B_1A_2)F_6+(B_3A_3-B_4A_4)F_7+(B_4A_3+B_3A_4)F_8]\sin k\xi \qquad (29)$$

$$\begin{pmatrix}v\\ Q_Y\end{pmatrix}=\alpha_X[(B_1A_1-B_2A_2)F_5+(B_2A_1+B_1A_2)F_6+(B_3A_3-B_4A_4)F_7+(B_4A_3+B_3A_4)F_8]\cos k\xi \qquad (30)$$

式中系数α_X，B_1，B_2，B_3，B_4根据不同的内力和位移可由下表查得。

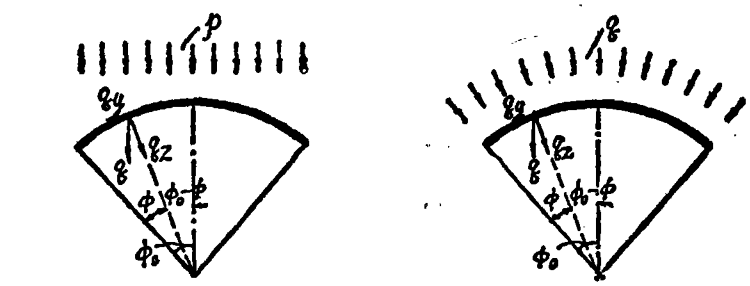
	α_X	B_1	B_2
φ	-1	$\frac{1}{R}\left[\frac{d_{22}}{k^2}[(\gamma^2-\beta^2)^2-4\gamma^2\beta^2]-2(d_{12}+2d_{33})(\gamma^2-\beta^2)-d_{11}k^2\right]$	$\frac{4\gamma\beta}{R}\left[\frac{d_{22}}{k^2}(\gamma^2-\beta^2)-(d_{12}+2d_{33})\right]$
N_X	$-\frac{1}{R^2}$	$(\gamma^2-\beta^2)B_1^\varphi-2\gamma\beta B_2^\varphi$	$(\gamma^2-\beta^2)B_2^\varphi+2\gamma\beta B_1^\varphi$
N_Y	$\frac{k^2}{R^2}$	B_1^φ	B_2^φ
w	1	1	0

M_X	$-\frac{1}{R^2}$	$(\gamma^2-\beta^2)d_{12}-d_{11}k^2$	$2\gamma\beta d_{12}$
M_Y	$-\frac{1}{R^2}$	$(\gamma^2-\beta^2)d_{22}-d_{12}k^2$	$2\gamma\beta d_{22}$
ε_X	$\frac{1}{R^2}$	$a_{12}k^2B_1^{\varphi}-a_{11}B_1^{N_X}$	$a_{12}k^2B_2^{\varphi}-a_{11}B_2^{N_X}$
ε_Y	$\frac{1}{R^2}$	$a_{22}k^2B_1^{\varphi}-a_{12}B_1^{N_X}$	$a_{22}k^2B_2^{\varphi}-a_{12}B_2^{N_X}$
Q_X	$\frac{k}{R^3}$	$B_1^{M_X}+2d_{33}(\gamma^2-\beta^2)$	$B_2^{M_X}+4d_{33}\gamma\beta$
u	$\frac{1}{kR}$	$a_{12}k^2B_1^{\varphi}-a_{11}B_1^{N_X}$	$a_{12}k^2B_2^{\varphi}+-a_{11}B_2^{N_X}$
N_{XY}	$\frac{k}{R^2}$	$\gamma B_1^{\varphi}-\beta B_2^{\varphi}$	$\gamma B_2^{\varphi}+\beta B_1^{\varphi}$
M_{XY}	$-\frac{2kd_{33}}{R^2}$	γ	β
γ_{XY}	$\frac{ka_{33}}{R^2}$	$B_1^{N_{XY}}$	$B_2^{N_{XY}}$
v	-1	$\frac{1}{\gamma^2+\beta^2}\left[\frac{1}{R}(\gamma B_1^{\varepsilon_Y}+\beta B_2^{\varepsilon_Y})+\gamma\right]$	$\frac{1}{\gamma^2+\beta^2}\left[\frac{1}{R}\left(\gamma B_2^{\varepsilon_Y}-\beta B_2^{\varepsilon_Y}\right)-\beta\right]$
Q_Y	$-\frac{1}{R^3}$	$2d_{33}k^2\gamma-\gamma B_1^{M_Y}+\beta B_2^{M_Y}$	$2d_{33}k^2\beta-\beta B_1^{M_Y}-\gamma\beta_2^{M_Y}$

B_3，B_4 的表达式与 B_1，B_2 相对应，仅将 B_1，B_2 中之 α，β 换为 δ，μ 即可。

（二）非齐次方程的特解

计算中常用薄膜介来代替特解。下面仅给出在横向均布荷载及均布自重荷载作用下薄膜解的结果。其荷载图见图 9。



（a）横向均布荷载　　（b）均布自重荷载

图　9

1. 横向均布荷载（图 9 a）

荷载　$q_Y=-p\cos(\phi_0-\phi)\sin(\phi_0-\phi)\cos k\xi$

$q_Z=p\cos^2(\phi_0-\phi)\cos k\xi$

其薄膜解为

$$\left.\begin{aligned}
&N_Y=-pR\cos^2(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&N_{XY}=\frac{3}{2}\frac{pR}{k}\sin 2(\phi_0-\phi)\sin k\xi\\
&N_X=-\frac{3pR}{k^2}\cos 2(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&\varepsilon_X=-pR\left(\frac{3a_{11}}{k^2}+a_{12}\right)\cos^2(\phi_0-\phi)\cos k\xi+\frac{3a_{11}pR}{k^2}\sin^2(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&u=-\frac{PR}{k}\left(\frac{3a_{11}}{k^2}+a_{12}\right)\cos^2(\phi_0-\phi)\sin k\xi+\frac{3a_{11}pR}{k^3}\sin^2(\phi_0-\phi)\sin k\xi\\
&\gamma_{XY}=\frac{3pRa_{33}}{2k}\sin 2(\phi_0-\phi)\sin k\xi\\
&v=-\frac{pR}{k^2}\left[\frac{6a_{11}}{k^2}+a_{12}+\frac{3}{2}Ra_{33}\right]\sin 2(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&\varepsilon_Y=-pR\left[\frac{3a_{12}}{k^2}+a_{22}\right]\cos^2(\phi_0-\phi)\cos k\xi+\frac{3pRa_{12}}{k^2}\sin^2(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&w=+\frac{pR}{k^2}\left[\frac{12a_{11}}{k^2}+(2+3R)a_{12}+a_{22}k^2R+3Ra_{33}\right]\cos^2(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&\quad-\frac{pR}{k^2}\left[\frac{12a_{11}}{k^2}+(2+3R)a_{12}+3Ra_{33}\right]\sin^2(\phi_0-\phi)\cos k\xi
\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

2. 均布自重荷载（图9b）

荷载 $$q_Y=-\frac{4q}{\pi}\sin(\phi_0-\phi)\cos k\xi$$

$$q_Z=\frac{4q}{\pi}\cos(\phi_0-\phi)\cos k\xi$$

其薄膜解为

$$\left.\begin{aligned}
&N_Y=-\frac{4q}{\pi}R\cos(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&N_{XY}=\frac{8qR}{\pi k}\sin(\phi_0-\phi)\sin k\xi\\
&N_X=-\frac{8qR}{\pi k^2}\cos(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&\varepsilon_X=-\frac{4qR}{\pi}\left(\frac{2a_{11}}{k^2}+a_{12}\right)\cos(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&u=-\frac{4qR^2}{\pi k}\left(\frac{2a_{11}}{k^2}+a_{12}\right)\cos(\phi_0-\phi)\sin k\xi\\
&\gamma_{XY}=\frac{8qRa_{33}}{\pi k}\sin(\phi_0-\phi)\sin k\xi\\
&v=-\frac{4qR^2}{\pi k^2}\left(2a_{33}-\frac{2a_{11}}{k^2}-a_{12}\right)\sin(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&\varepsilon_Y=-\frac{4qR}{\pi}\left(\frac{2a_{12}}{k^2}+a_{22}\right)\cos(\phi_0-\phi)\cos k\xi\\
&w=\frac{4qR^2}{\pi k^2}\left(2a_{33}-\frac{2a_{11}}{k^2}+a_{12}+a_{22}k^2\right)\cos(\phi_0-\phi)\cos k\xi
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

上述推得的微分方程的解中，包含有四个待定积分常数A_1，A_2，A_3，A_4（对称情况），须用壳体的两个纵向边缘所提供的边界条件来确定，此边界条件的取法与一般壳体理论相同，这里不再详述。

根据内力等效原则，将相应等效壳单元的内力平均值加于网壳基本单元上，即可计算出网壳各杆内力值。

参 考 文 献

[1] Florencio Del Pozo, Voiles minces cylindriques forme's par une maille triangulaire, International Association for Bridge and structural Engineering fifth congress. 1956.

[2] 松下富士雄，津下一英，铁骨シエルの研究（Ⅰ)(Ⅱ)（圆筒型の場合），日本建筑学会论文集　第57号，昭和32年7月。

[3] 尾崎昌凡，$H.P.$立体トテス曲面板の应力解析（立体トテス曲面板の理论的解析，たの2）。

[4] 尾崎昌凡，立体トテス曲面板の理论的解析（たの4曲面板理论との比较）　日本建筑学会论文集　第112号，昭和40年6月。

[5] 胡学仁，网壳结构的计算，建筑学报　60.7.

[6] Г.П.ПЩЕНИЧНОВ, РАСЧЕТ СЕТЧАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, 上海规划建筑设计院译　1975.6.

[7] 建研院结构所、兰天、董石麟、夏敬讦，圆柱形网架钢结构的设计计算与试验，1965.12.

[8] Wright. D. T., Membrane forces and buckling in reticulated shells, Journal of the structural Division, ASCE, vol.91. STI, February, 1965.

[9] Masakazu OZAKI, A Practical method for analysis of space truss shells structures, 1968.