第17卷 第2期
1991年6月
北京工业大学学报
JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY
Vol.17, No.2
Jun., 1991

最佳变分原理

——模糊因子加权变分原理

牛庠均 姚传壐 康柯辛
（土木工程学系） （山东建筑工程学院） （建筑勘察设计院）

【摘要】 采用模糊数学中有关从属函数与数学中变分法的概念、思路和方法，建立了一系列模糊因子加权变分原理．因而在数值求解过程中，可以通过不断修改模糊因子而达到改进数学模型的表示形式，改进解的精度取得理想逼近解的效果．同时，加权变分原理还将表达工程结构问题的数学模型统一于一式之中，这是最广泛的变分原理模式，对于编制统一大型通用程序系统，建立离散方程提供了基础．

关键词：从属函数，对偶原理，加权变分原理

0 引 言

0.1 问题的提出

工程技术人员在工程结构数值计算过程中，最关心的问题是解的误差估计，力求找出不断改进解的精度的有效方法．而自适应过程有限元法和边界元法，就是为达到此目的而形成的有成效的方法[1]．

数值分析过程中的误差可分为：离散误差、舍入误差与数学模型误差．当代国内外科技专家主要的研究是改进离散误差．本文的目的就是提供一种新的数学模型表示形，以期在数值分析过程中，通过不断改进数学模型的表示形式，来改进解的精度，从而取得理想的逼近值．实际上，各种杂交元法就是为改进精度而改进数学模型产生的有成效方法[2]，不过，在这里的数值分析过程中，数学模型是既定的．

0.2 解的近似性

工程结构问题的求解过程中，由于多种因素使解具有近似性，亦可说解的模糊性（这里是否为模糊数学中严格定义的模糊性并不重要）．于是形成解的近似集合，或叫解的模糊集合．这里我们采用模糊数学中有关从属函数的概念、思路和方法，建立模糊因子加权变分原理，达到改进解的精度的目的．

0.3 变分法中的对偶原理[3]

变分法中的对偶原理是指两个变分问题中的变分约束条件与变分条件为互逆变换的结果，其真实解是相同的，但近似解就不一定相同．如弹性力学中的势能原理与余能原理的近似解就从不同方面逼近真实解．这里，关键是利用变分约束条件与变分条件互逆变换的方法，改进数学模型的表达式，达到在数值分析过程中改进解的精度的目的，而并不去严格论述其对偶性质．

0.4 最佳变分原理的构造

利用模糊数学中有关从属函数和变分数学中的概念、思路和方法，构造最佳变分原理——模糊因子加权变分原理．利用适当的选取模糊因子，达到改进解的精度的目的．这里，

本文于1990年2月14日收到

以弹性力学问题为例进行论述.

定义1 选取文献[4]中建立的三类独立变量的势能广义泛函

$$\Pi_1 = \Pi_{1-3-1} = \iiint_{\Omega} \Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \overline{F}_i u_i \Big)$$

$$- \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + a_{ijkl}\varepsilon_{kl})(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{i,j} - \frac{1}{2}u_{j,i})$$

$$- \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij} - a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \Big] \mathrm{d}\Omega$$

$$- \iint_{\partial\Omega_1} \overline{P}_i u_i ds - \iint_{\partial\Omega_2} \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) l_j (u_i - \overline{u_i}) \mathrm{d}s \qquad (0.1)$$

与余能广义泛函为一对互补原理.

$$L_1 = L_{1-3-1} = \iiint_{\Omega} \Big[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j} - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\Big(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big) - \frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij} - b_{ijkl}\sigma_{kl})$$

$$(u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}),_j + \overline{F}_i) \Big] \mathrm{d}\Omega$$

$$+ \iint_{\partial\Omega_1} (\sigma_{ij}l_j - \overline{P}_i) u_i ds + \iint_{\partial\Omega_2} \overline{u_i}\sigma_{ij}l_j \mathrm{d}s \qquad (0.2)$$

这里，Π_1中的物理关系为$a_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \sigma_{ij} = 0$，$L_1$ 中的物理关系为

$$b_{ijkl}\sigma_{kl} - \varepsilon_{ij} = 0.$$

定义2 选取模糊数学中的从属函数为模糊因子α，$\alpha \in [0, 1]$，在此区间可连续取值. 在数值计算过程中可由计算的中间结果反馈，通过人机对话随机调整 α，以得到解的理想值.

定义3： 互补模糊因子为

$$\alpha_1 = \alpha(x_i), \quad \alpha_2 = (1 - \alpha(x_i)) \qquad (0.3)$$

定义 4： 模糊因子加权变分原理

$$\mu_i = \alpha_1 \Pi_i + \alpha_2 L_i$$
$$= \alpha \Pi_i + (1 - \alpha) L_i \qquad (0.4)$$

当 $\alpha=1$ 时，(0.4)式退化为势能广义变分原理的泛函(0.1)式，当$\alpha = 0$ 时，(1.4)式退化为余能广义变分原理的泛函(0.2)式. 在变分约束条件与变分条件互逆变换的各种不同的匹配时，可以形成各种不同类型的模糊因子加权变分原理($\mu_i \Rightarrow \mu_1, \mu_2 \cdots \mu_i$)。

1 最佳变分原理

1.1 最佳变分原理 [

令加权泛函为

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= \alpha \Pi_1 + (1-\alpha) L_1 \\
& \iiint_{\Omega} \Big[\frac{1}{2}\alpha (a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}) + \frac{1}{2}(1-\alpha)(b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}) \\
& -(1-\alpha)(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}) - \frac{1}{2}\alpha(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})(\varepsilon_{ij} \\
& -\frac{1}{2}u_{ij} - \frac{1}{2}u_{j,i}) - (1-\alpha)u_i((a_{ijkl}),_j + \overline{F}_i) \\
& -\alpha(\overline{F}_i u_i) \Big] \mathrm{d}\Omega \\
& - \iint_{\partial\Omega_1} \Big[\alpha(\overline{P}_i u_i) - (1-\alpha)(\sigma_{ij}l_j - \overline{P}_i)u_i \Big] \mathrm{d}s \\
& - \iint_{\partial\Omega_2} \Big[\frac{1}{2}\alpha(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i - \overline{u}_i) \\
& -(1-\alpha)\overline{u}_i\sigma_{ij}l_j \Big] \mathrm{d}s \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

模糊因子加权变分原理 I　若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α的数值，使泛函(1.1)式实现驻值条件的σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为弹性力学问题的理想逼近值.

若$\alpha=1$，则加权变分原理退化为势能广义原理；若$\alpha=0$，则加权变分原理退化为余能广义原理. 在数值求解过程中，适当调整α的取值，使解在加权意义下取到理想逼近值.

1.2　最佳变分原理 II

令加权泛函为

$$\mu_2 = \alpha \Pi_2 + (1-\alpha) L_2 \qquad (1.2.1)$$

当$\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}u_{ijj} - \frac{1}{2}u_{j,i} = 0$,并用$u_i$代替$\varepsilon_{ij}$时，则由泛函(0.1)式得

$$
\begin{aligned}
& - \iint_{\partial\sigma_1} \overline{P}_i u_i ds - \iint_{\partial\sigma_2} \frac{1}{2}(\sigma_{ij} + a_{ijkl}\varepsilon_{kk}(u_i)) l_j (u_i - \overline{u}_i) \mathrm{d}s \\
\Pi_2 &= \iiint_{\Omega} \Big(\frac{1}{2} a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}(u_i)\varepsilon_{kl}(u_i) - \overline{F}_i u_i \Big) \mathrm{d}\Omega \qquad (2.2.) \\
& - \iint_{\partial\Omega_1} \overline{P}_i u_i \mathrm{d}s - \iint_{\partial\Omega_2} \frac{1}{2}(\sigma_{ijkl}\varepsilon_{ki}(u_i)l_j(u_i - \overline{u}_i) \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

当　$(a_{ijkl}),_j - \overline{F}_i = 0$时，则由泛函(0.2)式得

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \iiint_{\Omega} \Big(\frac{1}{2} b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \Big) \mathrm{d}\Omega \\
& + \iint_{\partial\Omega_1} (\sigma_{ij}l_j - \overline{P}_i) u_i \mathrm{d}s + \iint_{\partial\Omega_2} \overline{u}_i \sigma_{ij} l_j \mathrm{d}s \qquad (1,2,3)
\end{aligned}
$$

故泛函(1.2.1)式变为

$$\mu_2=\iiint_{\Omega}\Big[\alpha\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}(u_i)\varepsilon_{kl}(u_i)\right)$$

$$+(1-\alpha)\left(\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right)-\alpha\left(\overline{F}u_i\right)\Big]\mathrm{d}\Omega$$

$$-\iint_{\partial\Omega_1}\left[\alpha(\overline{P}_iu_i)-(1-\alpha)(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i\mathrm{d}s\right.$$

$$-\iint_{\partial\Omega_2}\left[\frac{\alpha}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\overline{u}_i)\right.$$

$$\left.-(1-\alpha)\overline{u}_i\sigma_{ij}l_j\right]\mathrm{d}s \tag{1.2.4}$$

模糊因子加权变分原理Ⅱ 若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i均为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当选取α的数值，使泛函(1.2.4)式实现驻値条件的$\sigma_{ij},\varepsilon_{ij},u_i$为弹性力学问题的理想逼近值.

在此原理中，Π_2的变分约束条件为几何方程，变分条件为平衡方程，物理方程，以及全部边界条件；L_2的变分约束条件为平衡方程，变分条件为几何方程，物理方程，以及全部边界条件．所以几何方程与平衡方程为互逆变换.

1.3 最佳变分原理Ⅲ

令加权泛函为

$$\mu_3=\alpha\Pi_3+(1-\alpha)L_3 \tag{1.3.1}$$

当平衡方程$\frac{1}{2}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}+\sigma_{ij}),_j+\overline{F}_i=0$时，则泛函(0.1)式变为

$$\Pi_3=\iiint_{\Omega}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}\Omega$$

$$-\iint_{\partial\Omega_1}\left[\overline{P}_i-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\right]u_i\mathrm{d}s$$

$$+\iint_{\partial\Omega_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\overline{u}_i\mathrm{d}s \tag{1.3.2}$$

当$b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0$时，用$\sigma_{ij}$表示$\varepsilon_{ij}$，则泛函(0.2)式变为

$$L_3=\iiint_{\Omega}\left[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij},_j+\overline{F}_i)\right]\mathrm{d}\Omega$$

$$+\iint_{\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)\mathrm{d}s+\iint_{\partial\Omega_2}\overline{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{1.3.3}$$

把(1.3.2)式、(1.3.3)式代入(1.3.1)式，则有

$$\mu_3=\iiint_{\Omega}\left[-\frac{\alpha}{2}(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})-\frac{1-\alpha}{2}(b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})-(1-\alpha)u_i(\sigma_{ij},_j+\overline{F}_i)\right]\mathrm{d}\Omega$$

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{\partial\Omega_1}\left[\alpha\left(\overline{P}_i-\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\right)l_j\right)u_i\right.\\
&\left.+(1-\alpha)(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i\right]\mathrm{d}s\\
&+\iint_{\partial\Omega_2}\left[\frac{\alpha}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j+(1-\alpha)\sigma_{ij}l_j\right]\overline{u}_i\mathrm{d}s \qquad (1.3.4)
\end{aligned}
$$

模糊因子加权变分原理Ⅲ 若σ_{ij}，ε_{ij}，u_i为独立变量函数，且$\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α的取值，使泛函(1.3.4)式实现驻值条件的σ_{ij}, ξ_{ij}, u_i为弹性力学问题的理想逼近值.

在此原理中，Π_3的变分约束条件为平衡方程，其变分条件为几何方程、物理方程、以及全部边界条件；L_3的变分约束条件为物理方程，其变分条件为平衡方程、几何方程、以及全部边界条件. 所以，平衡方程与物理方程为互逆变换.

1.4 最佳变分原理Ⅳ

令加权函数为

$$\mu_4=\alpha\Pi_4+(1-\alpha)L_4 \qquad (1.4.1)$$

若$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij}=0$时，并用$\varepsilon_{ij}$表示$\sigma_{ij}$，则泛函(0.1)式变为

$$
\begin{aligned}
\Pi_4=&\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-\overline{F}_iu_i\right]\mathrm{d}\Omega\\
&-\iint_{\partial\Omega_1}\overline{P}_iu_i\mathrm{d}s-\iint_{\partial\Omega_2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}s \qquad (1.4.2)
\end{aligned}
$$

若$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，用$u_i$表示$\varepsilon_{ij}$时，则泛函(0.2)式变为

$$
\begin{aligned}
L_4=&\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}u_{i,j}\right.\\
&\left.-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i)),_j+\overline{F}_i)\right]\mathrm{d}\Omega\\
&+\iint_{\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{\partial\Omega_2}\overline{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \qquad (1.4.3)
\end{aligned}
$$

把(1.4.2)式和(1.4.3)式代入(1.4.1)式，则有

$$
\begin{aligned}
\mu_4=&\iiint_{\Omega}\left[\frac{\alpha}{2}(a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl})-\alpha(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\right.\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)+\frac{1-\alpha}{2}(b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})\\
&-(1-\alpha)\sigma_{ij}u_{i,j}-(1-\alpha)u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i)),_j\\
&\left.+\overline{F}_i))-\alpha(\overline{F}_iu_i)\right]\mathrm{d}\Omega\\
&-\iint_{\partial\Omega_1}\left[\alpha(\overline{P}_iu_i)-(1-\alpha)(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i\right]\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$-\iint_{\partial\Omega_2}\left[\alpha a_{ijkl}\varepsilon_{kj}l_j(u_i-\overline{u}_i)-(1-\alpha)\sigma_{ij}l_j\overline{u}_i\right]ds \qquad (1.4.4)$$

模糊因子加权变分原理Ⅳ 若 σ_{ij}，ε_{ij}，u_i 为独立变量函数，且 $\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整α的取值，使泛函(1.4.4)式实现驻值条件的 $\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}$，$u_i$ 为弹性力学问题的理想逼近值.

在此原理中，Π_4 的变分约束条件为物理方程，变分条件为平衡方程、几何方程、及以全部边界条件；L_4 的变分约束条件为几何方程，变分条件为平衡方程、物理方程、以及全部边界条件. 所以，物理方程与几何方程为互逆变换.

1.5 最佳变分原理Ⅴ

令加权函数为

$$\mu_5=\alpha\Pi_5+(1-\alpha)L_5 \qquad (1.5.1)$$

若 $\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0,\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$,并用 ε_{ij} 表示 σ_{ij}，并满足位移边界条件时，则泛函(0.1)式变为

$$\Pi_5=\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\overline{F}_iu_i\right]d\Omega$$

$$-\iint_{\partial\Omega_1}\overline{P}_iu_ids \qquad (1.5.2)$$

若$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i=0$，$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$,以及满足力的边界条件，则泛函(0.2)式变为

$$L_5=\iiint_{\Omega}-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}d\Omega+\iint_{e\Omega_2}\overline{u}_i\sigma_{ij}l_jds \qquad (1.5.3)$$

泛函(1.5.2)式、(1.5.3)式为弹性力学中的势能与余能的极值原理,把它们代入(1.5.1)式,则有

$$\mu_5=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\alpha}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\frac{(1-\alpha)}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right.$$

$$\left.-\alpha\overline{F}_iu_i\right]d\Omega$$

$$-\iint_{e\Omega_1}\alpha\overline{P}_iu_ids+\iint_{e\Omega_2}(1-\alpha)\overline{\sigma}_{ij}l_ids \qquad (1.5.4)$$

模糊因子加权变分原理Ⅴ 若σ_{ij},u_i为独立变量函数，且 $\alpha\in[0,1]$，在此区间可连续取值，适当调整 α的数值，使泛函(1.5.4)式实现驻值条件的σ_{ij}，u_i为弹性力学问题的理想逼近值.

这是一对互补对偶原理.

2 结　　论

1. 采用模糊数学中的有关从属函数与数学中变分法的概念、思路与方法，建立了模糊因子加权变分原理.

2. 在数值计算过程中，通过调整模糊因子改进数学模型，达到提高解的精度的目的．在一定精度条件下，可达到加速收敛的效果．

3. 模糊因子在数值计算过程中，可通过人机对话，根据计算结果的信息反馈，可随时调整模糊因子，以取得理想近似值．

4. 加权变分原理给出了变分原理的最广泛的形式统一于同一公式之中，对于编制大型通用程序是很有用的．

5. 模糊因子的理论分析，待进一步进行探讨．

参 考 文 献

1 辛克维奇 O C 著；陶振宗，张泚良译．有限元与近似法，北京：人民交通出版社，1989．336～348

2 T H, Pian Tong P, Basis of finite element method for Solid continua. IJNME, 1969, 1: 3～28.

3 柯朗 R，希尔伯特 D著；錢敏等译．数学物理方法 I．北京：科技出版社，1958．178～186

4 牛庠均．弹性力学的广义变分原理．北京工业大学学报，1989，15(2).1～11

Variational Principles for Optimum—Weighted Variational Principles for Fuzzy Factor

Niu Xiangjun (Department of Civrl ngineering)

Yao Chuanxi (Shandong Architectural and Civil Engineering Institute)

Kang Ke-xin (Institute of Architectural Explortion and Design)

【Abstract】 The weighted variational principles for fuzzy factor are established making use of some concept, thinking and waysin fuzzy mathamatics and calculus of variation. In the course of numerical analysis, the forms of mathematics are changed to obtain optimum approximation values of solution by way of the fuzzy factor of successive refinement. The weighted variational principles are the generalest forms of the variational principles, which unite the mathematical forms of engineering structure with one formula. It is fundamental to establish the discrete equations for the large general programme system.

Key Words: suḃordinate function, dual principle, weighted variational principle