

空间连杆机构位移分析和轨迹分析

(81届研究生) 陈明哲

摘要

本文运用了约束关系式、投影和矩阵运算等方法对空间 $RSCR$ 、 $RRSRR$ 、 $RRRSR$ 、 $REERRR$ 和 $RRERRR$ 等机构的位移进行分析。所用方法简单, 推导过程直观。在此基础上, 作者导出空间 $RRRSR$ 机构连杆曲线的参数表达式, 并首次求得该连杆曲线的阶数为 32 阶。此外, 还讨论了连杆曲线的虚点问题。

The Displacement and the Coupler Curve Analyses of Some Spatial Mechanisms

Chen Ming-zhe

Abstract

The author applies constraint relations, projective method and matrix operations to the displacement analyses of spatial $RSCR$, $RRSRR$, $RRRSR$, $REERRR$, and $RRERRR$ mechanisms. Derivations of displacement equations are simple and intuitive. Based on this, the author has developed a parametric equation for the coupler curve of the spatial $RRRSR$ mechanism, and proved for the first time that the coupler curve is of the 32nd order. Finally, the imaginary point on the coupler curve is discussed.

一、空间连杆机构的位移分析

空间连杆机构位移分析是轨迹分析的基础。从封闭形式位移方程才能导出准确的连杆曲线方程。因此, 在作机构的轨迹分析前, 必须对机构位移分析作较为深入的研究。很多著述^[1-11]在这方面作出了贡献。关于位移方程的准确阶数, 文^[4]提出一种几何判断方法。文^[2]对同一机构不同阶数的位移方程式作出了解释, 指出带圆柱副机构的位移方程式只包

含 S^2 项时, 4阶和8阶的位移方程式都是正确的。但文[8]对此有异议。因此要用机构模型来验证所得结果。但是对于杆数大于4的空间机构, 模型的设计也并非易事(即结构参数选得不好, 机构不能作成最大的构形数目)。关于这一点, 文[5, 8]均有提及。

下面作者运用了各种方法对空间 $RSCR$ 、 $4R-S$ 和 $4R-E$ 等机构的位移进行分析, 推导过程比较简单直观。

(一) 坐标系选取和符号说明

对于用有轴线运动副连接的空间运动链, 坐标系的选取可沿用通常取法, 见文[7](图1)。

在图1中:

h_j : 沿 x_j 轴计量的两运动副轴线间最短距离;

α_j : 相邻两运动副轴线夹角, 绕 x_j 轴按右手法则从 z_i 轴转到 z_j 轴计量;

θ_j : 绕 z_j 轴, 按右手法则从 x_i 轴转到 x_j 轴计量;

s_j : 沿 z_j 轴计量的 x_j 和 x_k 轴间最短距离

对于带球副的运动链, 坐标系选取见文[7](图2)。

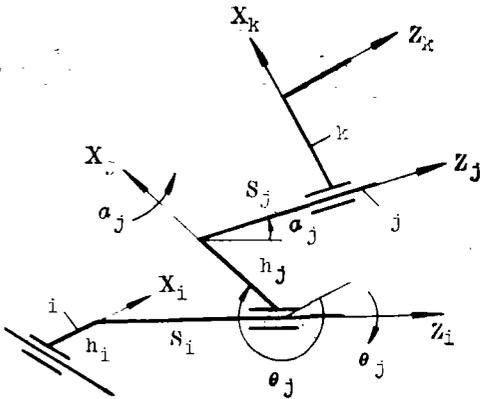


图 1

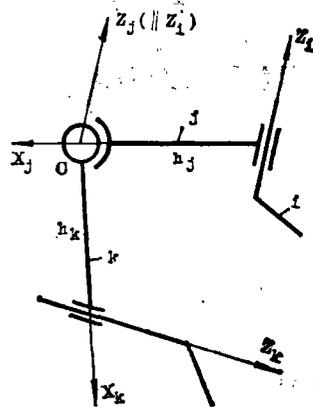


图 2

按上述确定坐标系以后, 可以得到齐次坐标变换矩阵和方向余弦矩阵, 式中 S 表示 \sin 、 C 表示 \cos 。

$$[M_{i,j}] = \begin{pmatrix} C\theta_j & -S\theta_j C\alpha_j & S\theta_j S\alpha_j & h_j C\theta_j \\ S\theta_j & C\theta_j C\alpha_j & -C\theta_j S\alpha_j & h_j S\theta_j \\ 0 & S\alpha_j & C\alpha_j & S_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[M_{j,i}] = [M_{i,j}]^{-1}$$

$$[C_{i,j}] = \begin{pmatrix} C\theta_j & -S\theta_j C\alpha_j & S\theta_j S\alpha_j \\ S\theta_j & C\theta_j C\alpha_j & -C\theta_j S\alpha_j \\ 0 & S\alpha_j & C\alpha_j \end{pmatrix}$$

$$[C_{j,i}] = [C_{i,j}]^{-1}$$

(二) RSCR 机构

关于该机构, 文[7, 11]推导了它的位移方程式, 文[10]对这一类机构有一综述。图 3 示出了 RSCR 机构简图。

现在我们对点 B 作坐标变换, 得

$$[M_{s,1}] [M_{1,1}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [M_{s,2}] \begin{pmatrix} -h_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

上式展开后, 依次消去 S_2 、 θ_2 , 可得到 θ_1 和 θ_4 的关系式。化为半角正切, 可得 4 次代数方程。关于该机构最大封闭环数目, 可考虑给定 θ_4 (即杆 3 固定, 而杆 4 定为机架), 这时点 B 由圆和圆柱的交点来确定。圆和圆柱可以有 4 个实交点, 因此该机构的最大封闭环数目为 4。所以位移方程的次数是正确的。关于用曲面相交法研究空间机构见文[12, 13]。

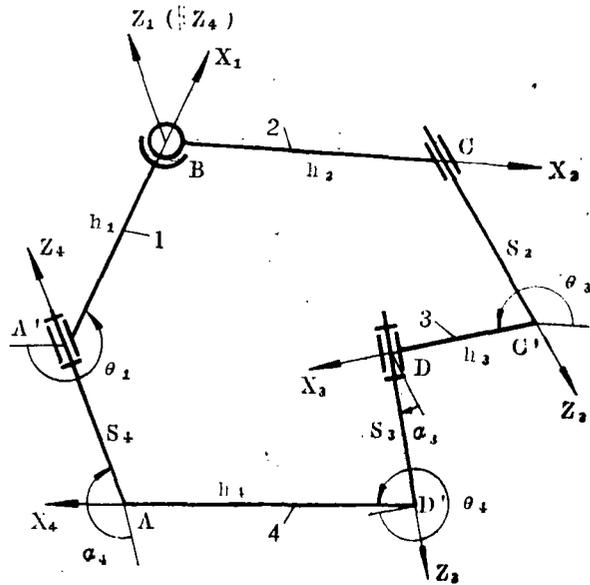


图 3

作者曾从式(1)的展开式中依次消去 S_2 、 θ_2 , 得到 θ_1 和 θ_4 的关系式。化为半角正切, 也得到 4 次代数方程。

(三) RRSRR 机构和 RRRSR 机构

图 4 示出了 4R-S 机构。我们注意到, D 点和 E' 点之间的距离在机构的运动过程中保持不变, 因此可得到约束关系式[14], 即

$$(x_D^D - x_{E'}^E)^2 + (y_D^D - y_{E'}^E)^2 + (z_D^D - z_{E'}^E)^2 = h_1^2 + S_1^2 \quad (2)$$

E' 点在坐标系 x, y, z 中的坐标为 $(-h_1, 0, 0)$ 。D 点在坐标系 x, y, z 中的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_D^D \\ y_D^D \\ z_D^D \\ 1 \end{pmatrix} = [M_{s,1}] [M_{1,1}] [M_{2,2}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将上述两点坐标代入式(2), 得

$$A_1 S \theta_1 + B_1 C \theta_1 + C_1 = 0 \quad (3)$$

式中

$$\begin{aligned} A_1 &= E_1 C \theta_2 + F_1 S \theta_2 + G_1 C \theta_1 S \theta_2 + M_1 S \theta_1 C \theta_2 + K_1 S \theta_1 + L_1 \\ B_1 &= E_2 C \theta_2 + F_2 S \theta_2 + G_2 C \theta_1 C \theta_2 + M_2 S \theta_1 S \theta_2 + K_2 \\ C_1 &= E_3 S \theta_2 + F_3 C \theta_1 S \theta_2 + G_3 S \theta_1 S \theta_2 + M_3 C \theta_1 + K_3 S \theta_1 C \theta_1 + L_3 C \theta_1 C \theta_1 \end{aligned}$$

$$+N_7 S \theta_1 + R_7 C \theta_1 + S_7$$

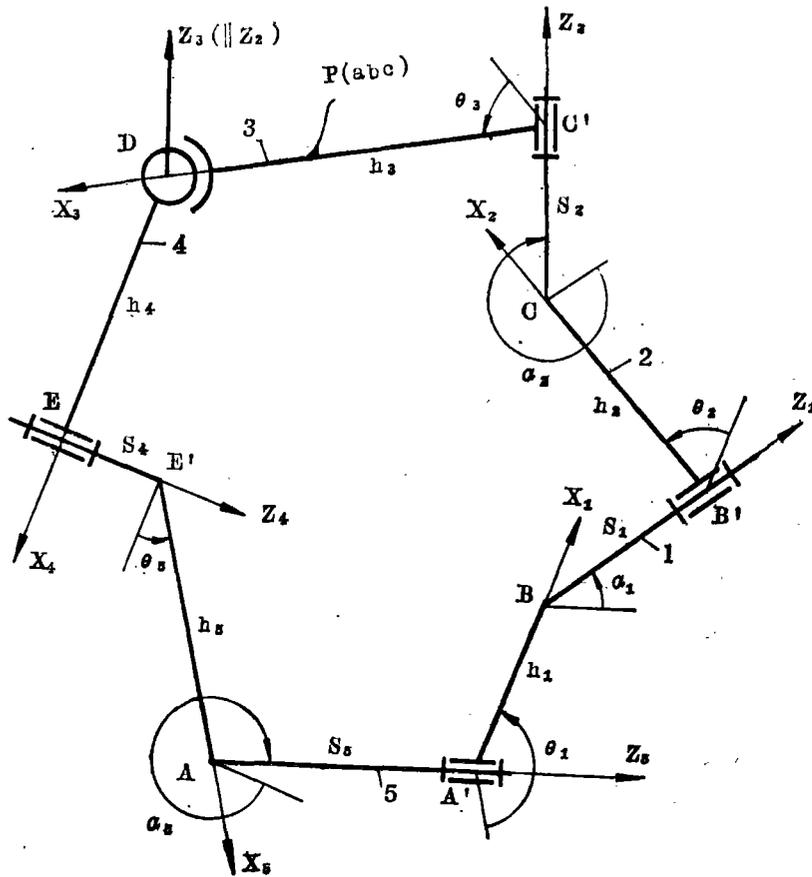


图 4

又 E_1, F_1, \dots, S_7 为由结构参数组成的系数, 因限于篇幅, 不再详表。

其次, 将矢量封闭形 $DEE'AA'BB'CC'D$ 向 z_4 轴投影得

$$S_4 + S_5 \cos(z_5, z_4) + h_1 \cos(x_1, z_4) + S_1 \cos(z_1, z_4) + h_2 \cos(x_2, z_4) + S_2 \cos(z_2, z_4) + h_3 \cos(x_3, z_4) = 0 \quad (4)$$

式中的方向余弦值可从下式中的相应项得到

$$(0 \ 0 \ 1) [C_{45}] [C_{51}] [C_{12}] [C_{23}]$$

例如, $\cos(z_5, z_4) = (0 \ 0 \ 1) [C_{45}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 等等。 (5)

将式(5)具体表出后, 代入式(4)得

$$A_2 S \theta_3 + B_2 C \theta_3 + C_2 = 0 \quad (6)$$

式中

$$\begin{aligned} A_2 &= U_1 S \theta_1 S \theta_2 + U_2 C \theta_1 C \theta_2 + U_3 C \theta_2 + U_4 C \theta_1 + U_5 \\ B_2 &= V_1 C \theta_1 S \theta_2 + V_2 S \theta_2 + V_3 S \theta_1 C \theta_2 \\ C_2 &= W_1 S \theta_1 S \theta_2 + W_2 C \theta_1 S \theta_2 + W_3 S \theta_2 + W_4 S \theta_1 C \theta_2 + W_5 C \theta_1 C \theta_2 \end{aligned}$$

$$+W_6 C \theta_2 + W_7 S \theta_1 + W_8 C \theta_1 + W_9$$

又 U_1, U_2, \dots, W_9 为由结构参数组成的系数, 不再详表。

从式(3)、(6)消去 $S \theta_3$ 和 $C \theta_3$, 引入置换

$$S \theta_2 = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \quad C \theta_2 = \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2}$$

$$\text{式中 } x_2 = t g \left(\frac{\theta_2}{2} \right)$$

我们得到

$$x_2^4 + A_3 x_2^2 + B_3 x_2^2 + C_3 x_2 + R_4 = 0 \quad (7)$$

式中 A_3, B_3, C_3 和 R_4 为由结构参数和 θ_1 角正、余弦函数组成的系数, 不再详表。

在图4中我们若取杆1为机架, 令 θ_1 为输入角, 即得到 $R R S R R$ 机构。式(7)是它的位移方程式。这和文^[6]的结果一致。

对于 $3 R S R$ 机构, 作者曾从下式

$$[M_{1,2}][M_{2,3}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [M_{1,3}][M_{3,4}] \begin{pmatrix} -h_4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

依次消去 θ_2, θ_3 角, 化为半角正切后, 得到关于 $t g \frac{\theta_1}{2}$ 或 $t g \frac{\theta_5}{2}$ 的4次方程。上述两种机

构的最大封闭环数目都可以认为是圆和圆环面的交点数目。圆和圆环面一般只有4个实交点*, 因此最大封闭环数目是4。

$$(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^2 = 0 \quad (\text{圆环方程})$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \quad \text{和} \quad u_1 + m u_2 + n u_3 = 0 \quad (\text{圆方程})$$

$$u_4 = 0 \quad (\text{无限远平面方程})$$

(四) RERRR 机构和 RRERR 机构

这两种机构简图如图5所示。将机构的矢量封闭形 $AA'BB'CDD'EE'A$ 向 z_2 轴投影得

$$S_5 \cos(z_5, z_2) + h_1 \cos(x_1, z_2) + S_1 C \alpha_2 + S_3 C \alpha_3 + h_4 \cos(x_4, z_2) + S_4 \cos(z_4, z_2) + h_5 \cos(x_5, z_2) = 0 \quad (8)$$

通过求 z_2 轴在 x_5, y_3, z_3 坐标系中的方向余弦, 建立纯角度关系式

$$[C_{34}][C_{45}][C_{51}][C_{12}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S \alpha_3 \\ C \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (9)$$

将式(8)改写为

$$-h_1 S \alpha_2 S \theta_2 = S_1 C \alpha_2 + S_3 C \alpha_3 + \{ S_5 \cdot (0 \ 0 \ 1) + h_4 \cdot (1 \ 0 \ 0) \} [C_{45}]$$

* 因为圆都经过虚圆点各一次, 而圆环面都经过虚圆两次。这些虚圆点可由下列齐次方程式来确定

$$+S_4(0\ 0\ 1)[C_{45}] + h_5 \cdot (1\ 0\ 0) \} [C_{51}][C_{12}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

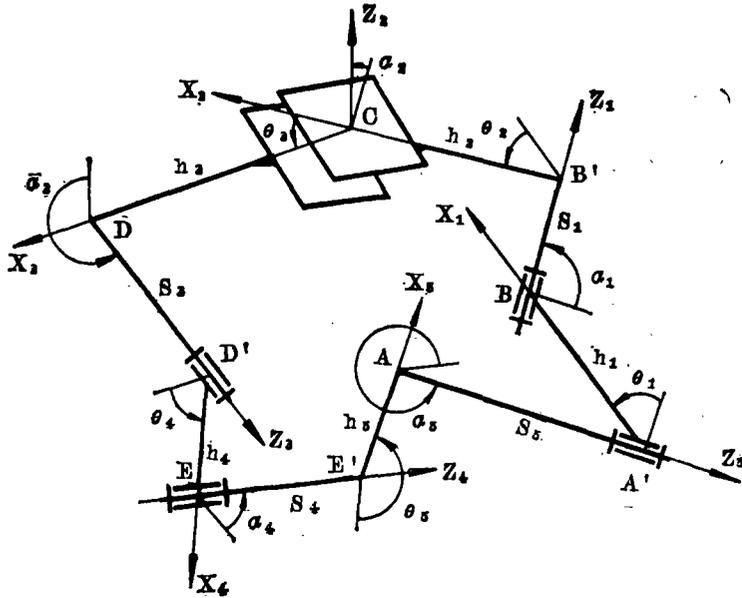


图 5

将式(9)改写为

$$[C_{51}][C_{12}] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [C_{54}][C_{43}] \begin{pmatrix} 0 \\ S\alpha_3 \\ C\alpha_3 \end{pmatrix} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 得

$$\begin{aligned} -h_1 S\alpha_2 S\theta_2 &= S_5(0\ 0\ 1)[C_{54}][C_{43}] \begin{pmatrix} 0 \\ S\alpha_3 \\ C\alpha_3 \end{pmatrix} + h_4 \cdot (1\ 0\ 0)[C_{43}] \begin{pmatrix} 0 \\ S\alpha_3 \\ C\alpha_3 \end{pmatrix} + S_4 \cdot \\ (0\ 0\ 1)[C_{43}] \begin{pmatrix} 0 \\ S\alpha_3 \\ C\alpha_3 \end{pmatrix} &+ h_5 \cdot (1\ 0\ 0)[C_{54}][C_{43}] \begin{pmatrix} 0 \\ S\alpha_3 \\ C\alpha_3 \end{pmatrix} + S_1 C\alpha_2 + S_2 C\alpha_3 \end{aligned} \quad (12)$$

式(11)的第三个分量为

$$-S\alpha_1 S\alpha_2 C\theta_2 = (0\ 0\ 1)[C_{54}][C_{43}] \begin{pmatrix} 0 \\ S\alpha_3 \\ C\alpha_3 \end{pmatrix} - C\alpha_1 C\alpha_2 \quad (13)$$

我们注意到式(12)、(13)右边仅包含 θ_4 、 θ_5 的三角函数。将式(12)和(13)消去 θ_2 角, 化为半角正切, 得到关于 $tg \frac{\theta_4}{2}$ 或 $tg \frac{\theta_5}{2}$ 的4次方程式。这个结果和文^[3, 9]一致,

但推导过程要简单得多。

对于 $RREERR$ 机构, 将式(8)展开后和式(9)第三分量表示式消去 $S\theta_3$ 、 $C\theta_3$,

化为半角正切，得到关于 $tg \frac{\theta_1}{2}$ 或 $tg \frac{\theta_2}{2}$ 的 4 次方程。这个结果与文^[11]一致。RRERRR 机构可用作联轴节^[11]。

二、空间 RRRSR 机构的轨迹分析

在机构学研究中，连杆机构的连杆曲线研究一直是引人注目的。很多学者从事平面连杆机构连杆曲线的研究，获得许多成就。这里不一一列举了。对比之下，空间连杆机构连杆曲线的研究就显得少了一些。有关这方面研究的早期著述有^[15-18]。1969年，Primrose 和 Freudenstein 发表重要论文^[19]，对空间三杆和四杆机构连杆曲线的性质作了较详细研究。以后陆续有论文^[20-22]发表。但是到目前为止，尚未见到有关空间五杆机构连杆曲线的一般表示式及其性质研究的论文。因此作者打算从“代数连接”机构*^[23]着手，先对空间 3RSR 机构连杆曲线作一些探讨。从原则上^[16]来说，可以用消元法得到连杆曲线方程式。但这往往会使方程式阶数不必要地升高，因此不宜单纯地使用。

(一)、RRRSR 机构连杆曲线方程

在图 4 中，令杆 5 为机架， θ_1 角为输入角，即得到 3RSR 机构。这里仅讨论杆 3 上的连杆曲线，杆 2 上的连杆曲线等也可类似地讨论，不再赘述。

已知构件 3 上一点 p ，它在坐标系 x_3, y_3, z_3 中的坐标为 (a, b, c) ，在固定坐标系 x, y, z 中的坐标为 (x, y, z) 。现求点 p 在固定坐标系中的轨迹曲线方程。

据坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = [M_{3,1}][M_{1,2}][M_{2,3}] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

式(14)展开后得

$$\left. \begin{aligned} x &= A_4 S\theta_3 + B_4 C\theta_3 + C_4 \\ y &= A_5 S\theta_3 + B_5 C\theta_3 + C_5 \\ z &= A_6 S\theta_3 + B_6 C\theta_3 + C_6 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\text{式中} \quad \left. \begin{aligned} S\theta_3 &= \frac{-A_2 C_2 \pm B_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2^2}}{A_2^2 + B_2^2} \\ C\theta_3 &= \frac{-B_2 C_2 \mp A_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2^2}}{A_2^2 + B_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(解自式(6))

$$\begin{aligned} A_4 &= (L_1 S\theta_1 + L_2 C\theta_1)S\theta_2 + (L_3 S\theta_1 + L_4 C\theta_1)C\theta_2 + L_5 S\theta_1 \\ B_4 &= (M_1 S\theta_1 + M_2 C\theta_1)S\theta_2 + (M_3 S\theta_1 + M_4 C\theta_1)C\theta_2 + M_5 S\theta_1 \end{aligned}$$

* 所谓“代数连接”是指由转动副、球副等等构成的连接。因为由这些运动副连接的机构的连杆曲线为代数曲线。螺旋副为“非代数连接”的运动副。

$$\begin{aligned}
 C_4 &= (N_1 S\theta_1 + N_2 C\theta_1) S\theta_2 + (N_3 S\theta_1 + N_4 C\theta_1) C\theta_2 + N_5 S\theta_1 + N_6 C\theta_1 \\
 A_5 &= (O_1 S\theta_1 + O_2 C\theta_1) S\theta_2 + (O_3 S\theta_1 + O_4 C\theta_1) C\theta_2 + O_5 C\theta_1 \\
 B_5 &= (P_1 S\theta_1 + P_2 C\theta_1) S\theta_2 + (P_3 S\theta_1 + P_4 C\theta_1) C\theta_2 + P_5 C\theta_1 \\
 C_5 &= (Q_1 S\theta_1 + Q_2 C\theta_1) S\theta_2 + (Q_3 S\theta_1 + Q_4 C\theta_1) C\theta_2 + Q_5 S\theta_1 + Q_6 C\theta_1 \\
 A_6 &= R_1 S\theta_2 + R_2 C\theta_2 + R_3 \\
 B_6 &= S_1 S\theta_2 + S_2 C\theta_2 + S_3 \\
 C_6 &= T_1 S\theta_2 + T_2 C\theta_2 + T_3
 \end{aligned}$$

又 L_1, L_2, \dots, T_3 为由结构参数组成的系数，不再详表；

$$\text{又 } S\theta_2 = \frac{2x_2}{1+x_2^2} \quad C\theta_2 = \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2}$$

$$x_2 = z_2^{(1,2,3,4)} - \frac{A_3}{4}$$

因此，式(15)就是以 θ_1 为参数的连杆曲线参数方程。对于其他带球副的五杆机构，也可用类似方法推导连杆曲线方程。

(二)、RRRSR 机构连杆曲线的阶数

为了求出由式(15)所确定连杆曲线的阶数，据空间中的 *Bezout* 定理^[24]，我们必须求得该曲线和任意平面的交点数目。设三维空间中任意平面方程为

$$K_1 x + K_2 y + K_3 z + K_4 = 0 \quad (17)$$

将式(15)代入式(17)中，得

$$\begin{aligned}
 & (K_1 A_4 + K_2 A_5 + K_3 A_6) \cdot \frac{-A_2 C_2 \pm B_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2^2}}{A_2^2 + B_2^2} \\
 & + (K_1 B_4 + K_2 B_5 + K_3 B_6) \cdot \frac{-B_2 C_2 \mp A_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2 - C_2^2}}{A_2^2 + B_2^2} \\
 & + (K_1 C_4 + K_2 C_5 + K_3 C_6 + K_4) = 0
 \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)中带根号的项移到方程右边，两边平方。然后作置换

$$\left. \begin{aligned}
 S\theta_1 &= \frac{2x_1}{1+x_1^2} & C\theta_1 &= \frac{1-x_1^2}{1+x_1^2} \\
 S\theta_2 &= \frac{2x_2}{1+x_2^2} & C\theta_2 &= \frac{1-x_2^2}{1+x_2^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\text{式中 } x_1 = \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} \quad x_2 = \operatorname{tg} \frac{\theta_2}{2}$$

并引入齐次坐标

$$x_1 = \frac{y_1}{y_3} \quad x_2 = \frac{y_2}{y_3} \quad (20)$$

* 从式(7)解得 x_2 ，一般4次代数方程的解法见库洛什《高等代数教程》。

整理后得

$$\frac{\sum_{j=0}^{12} \sum_{k=0}^{12} D_i y_1^j y_2^k y_3^{12-j-k}}{\sum_{m=0}^4 \sum_{n=0}^4 \Gamma \rho y_1^{2m} y_2^{2n} y_3^{16-2(m+n)} + \sum_{r=0}^3 \sum_{t=0}^3 \Gamma q y_1^{2r+1} y_2^{2t+1} y_3^{16-2(r+t+1)}} = 0 \quad (21)$$

式中

D_i ($i=1, \dots, 169$) 为由结构参数和 k_1, \dots, k_4 所确定的系数; $\Gamma \rho$ ($p=1, \dots, 25$) 和 Γq ($q=26, \dots, 41$) 是由结构参数所确定的系数; 一般它们都不等于零。

在射影平面上, 点 $I_1(1, 0, 0)$ 和 $I_2(0, 1, 0)$ 分别为式 (21) 分子所确定曲线的 12 重点, 也分别为式 (21) 分母所确定曲线的 8 重点。因为, 比如, 式 (21) 分子的曲线对于奇点 I_1 和 I_2 直至 11 阶的偏导数均等于零。并且奇点 I_1, I_2 与 $D_i, \Gamma p$ 和 Γq 的值无关。

对式 (7) 作置换 (19), 并注意到 x_1 和 x_2 还必须满足式 (7)。引入式 (20) 齐次坐标, 则式 (7) 化为

$$\sum_{j=0}^4 \sum_{k=0}^4 H_i y_1^j y_2^k y_3^{4-j-k} = 0 \quad (22)$$

式中 H_i ($i=1, \dots, 25$) 为由结构参数组成的系数, 一般不等于零。

在射影平面上, 点 I_1 和 I_2 分别为式 (22) 确定曲线的 4 重点。而且奇点 I_1, I_2 与 H_i 值无关。

这样, 求空间连杆曲线与任意平面交点数目的问题就化为求由式 (21) 分子的曲线与式 (22) 曲线交点数目的问题。这两条曲线的交点数目为 $8 \times 24 = 192$ 个。但是奇点 I_1, I_2 不属于机构位移方程 (7)*, 因此首先必须除掉在奇点 I_1, I_2 处相交的交点数目 $2 \times 4 \times 12 = 96$ 个。其次, 还须除掉使式 (21) 分母为零的交点。从式 (18) 可以发现式 (21) 分母的曲线 ($A_3^2 + B_3^2 = 0$) 包含在分子的曲线中, 因此式 (22) 曲线与式 (21) 分母曲线的交点数 $8 \times 16 = 128$ 个都应除去。但上面已除去该两曲线在奇点 I_1 和 I_2 处的交点数 $2 \times 4 \times 8 = 64$ 个, 所以还须再除去 64 个交点。因此, 由式 (15) 所确定的连杆曲线的阶数为 32 阶 ($192 - 96 - 64 = 32$)。

(三) RRRSR 机构连杆曲线的虚点问题

我们知道, 平面四杆机构的连杆曲线是虚圆点曲线。现在来考虑是否空间 $RRRSR$ 机构的每条连杆曲线均通过某一虚点。

对式 (15) 引入齐次坐标

$$x = \frac{u_1}{u_4} \quad y = \frac{u_2}{u_4} \quad z = \frac{u_3}{u_4} \quad (23)$$

* 比如对于奇点 $I_1, x_1 = \frac{1}{0}, x_2 = \frac{0}{0}$ 故 $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0$, 并不适合式 (7)。

我们将 $S\theta_3, C\theta_3$ 以式 (16) 代入, 对 θ_1, θ_2 的三角函数作置换 (19), 则式 (15) 化为

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= J_4(-J_1 J_3 \pm J_2 J_{13}) + J_6(-J_2 J_3 \mp J_1 J_{13}) + J_8(J_1^2 + J_2^2) \\ u_2 &= J_7(-J_1 J_3 \pm J_2 J_{13}) + J_9(-J_2 J_3 \mp J_1 J_{13}) + J_9(J_1^2 + J_2^2) \\ u_3 &= J_{10}(-J_1 J_3 \pm J_2 J_{13}) + J_{11}(-J_2 J_3 \mp J_1 J_{13}) + J_{12}(J_1^2 + J_2^2) \\ u_4 &= (1+x_1^2)(1+x_2^2)(J_1^2 + J_2^2) \end{aligned} \right\} (24)$$

式中 $J_{13} = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 - J_3^2}$, J_1, J_2, \dots, J_{12} 是 x_1, x_2 和结构参数的表示式, 不再详表。

我们先考虑令

$$1+x_1^2=0, 1+x_2^2=0 \quad (25)$$

并规定 $x_1 = x_2 = i$ 。将式 (25) 代入式 (24) 得

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= ah_2 + Ri \\ u_2 &= -R + ah_2 i \\ u_3 &= u_4 = 0 \end{aligned} \right\} (26)$$

$$\text{式中 } R = \mp b\sqrt{(h_2^2 - h_3^2 S_{\alpha_2}^2 - S_2^2 S_{\alpha_2}^2) + ZS_2 h_2 S_{\alpha_2} i} + \\ + (aS_2 - ch_3)S_{\alpha_2}, \quad i = \sqrt{-1}$$

下面对式 (26) 进行一些讨论。

- 当 $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ 时, 连杆曲线不存在公共虚点;
- 当 $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ 时, 点 $k_0(i, -1, 0, 0)$ 为 $y_3 z_3$ 平面上所有点 (原点 D 除外) 的连杆曲线的二重点;
- 当 $a \neq 0, b = 0, c \neq 0, S_{\alpha_2} = 0$ 时, 点 k_0 为 $x_3 Z_3$ 平面上所有点 (原点 D 除外) 的连杆曲线的二重点, 也为连杆上所有点的连杆曲线的二重点;
- 当 $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ 时, 连杆曲线不存在公共虚点;
- 当 $a \neq 0, b = c = S_2 = 0$ 时, 点 k_0 为连杆 x_3 轴上 (原点 D 除外) 所有点的连杆曲线的二重点。

我们知道, 式 $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ 表示顶点在原点的虚圆锥; $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \\ u_4 = 0 \end{cases}$ 表示虚球圆; 而 $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \\ u_3 = u_4 = 0 \end{cases}$ 表示虚球圆与平面 $u_3 = 0$ 的交点, 即虚圆点 $k_0, l_0(i, \pm 1, 0, 0)$ 。

如果在上述过程中分别规定 a) $x_1 = i, x_2 = -i$; b) $x_1 = -i, x_2 = i$; c) $x_1 = -i, x_2 = -i$; 可以得到和上述类似的结果, 这里从略。我们注意到在上述情形中可得到另一个虚圆点 $l_0(i, 1, 0, 0)$ 。

下面进一步讨论三种情况:

$$a) 1+x_1^2=0, 1+x_2^2 \neq 0, x_1 = i; \quad b) 1+x_2^2=0, 1+x_1^2 \neq 0, x_2 = i; \quad c) J_1^2 + J_2^2 = 0;$$

对 a)、b) 两种情况, 我们分别将上述式子代入式 (24), 可得到与式 (26) 相似的表达式。我们知道所有虚点都必须满足下列虚球圆方程

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0 \quad (27)$$

$$u_4 = 0 \quad (28)$$

为了确定相应的 x_2 (x_1) 值, 必须将 u_1 等代入式 (27)。我们发现在 a)、 b) 两种情况都得到恒等式。也就是说, 对于任何的 x_2 (x_1) 值, u_1 等表示式都表示虚点。不过, 这些虚点一般都依赖于 p 点坐标。对于一些特殊情况, 也可得到虚圆点。比如对于情况 b) , 当 $x_1 = a = 0$ 时, 我们可得到一个虚圆点

$$u_1 = i, u_2 = -C\alpha_1, u_3 = -S\alpha_1, u_4 = 0 \quad (29)$$

式 (29) 表示坐标系 x, y, z 中平面 $z = tg\alpha_1 \cdot y + w$ 上的一个虚圆点。

对于情况 c) , 可分下述三种情况讨论:

$$1) J_1 + J_2^i = 0, J_1 - J_2^i = 0; 2) J_1 + J_2^i = 0, J_1 - J_2^i \neq 0;$$

$$3) J_1 + J_2^i \neq 0, J_1 - J_2^i = 0;$$

结果是类似的, 这里从略。

参 考 文 献

- [1] Wallac D. M. et al, Trans. ASME J. Appl. Mech. 37E, 713—719 (1970) .
- [2] Duffy J. et al, J. of Mech. 6, 289—299 (1971) .
- [3] Duffy J. et al, MMT 7, 211—230(1972)
- [4] Duffy J. et al, ASME. Paper 72—Mech—77.
- [5] Duffy J. et al, MMT 15 (3) (1980).
- [6] Wallace D. M. , Trans. ASME 97B, 575/80(1975).
- [7] 张启先, 北京航空学院科研报告 BH—B352.
- [8] Bagci C. et al, Trans. ASME 97B, 581/94(1975).
- [9] Lakshminarayana K. , MMT. 11, 381/93(1976).
- [10] Campbell D. J. et al, Proc. 3 World Cong. TMM, V. F. (1971).
- [11] 舟桥・ほか 2 名, 机论 (第 3 部) 44 卷 378 号 (昭 53—2)。
- [12] Eropob B. B. , Тр. Сем. ТММ, Т. VII Bbln. 25(1949).
- [13] Jenkinse M. et al, Trans. ASME 91B(1969).
- [14] 张启先, 机械工程学报. 16(3)(1980).
- [15] Зцновьев, В. А. , Пространственных Механизмы с низшими параметрами. Гостехизуат 1952.
- [16] Freudenstein F. , Trans. ASME 84B 156/60(1962).
- [17] Wörle H. , Konst. 14 (10) 390/2 (1962).
- [18] Лебедев П. А. , Тр. 3 Сов. ТММ 164/79 Машгиз, м. (1963).
- [19] Primrose E. J. F. and Freudenstein F. , Trans. ASME 91B, 103/14 (1969).
- [20] Bottema O. , J. of Mech. 6, 69—79(1971).
- [21] Smeenk D. J. , J. of Mech. 4 57—63(1969).
- [22] Sherwood A. A. , MMT, 10, 177/88(1975),

[23] Hunt K.H., MMT.11.79—86(1976).

[24] Walker R.J., 代数曲线, 科学 1958.