关于矩阵的重量保持性质

屠规彰　　**王　理**
（中国科学院计算中心）　　（北工大计算站）

【摘要】 本文给出域$GF(2)$上的矩阵具有重量保持性质的充分必要条件，并证明了此性质关于矩阵的叉积不变。此外还证得一个重量不等式，系通常三角不等式的推广。

引　　言

将二项式系数构成的矩阵按mod2方式（亦即奇数作为1，偶数作为0）写出可得

$$B^{(n)}=\begin{pmatrix}
1\\
1\ 1\\
1\ 0\ 1\\
1\ 1\ 1\ 1\\
1\ 0\ 0\ 0\ 1\\
1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\\
1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\\
1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\\
1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\cdots\cdots 1
\end{pmatrix}$$

（最后一行由$\binom{m}{0}$，$\binom{m}{1}$，……$\binom{m}{m}$组成，$m=2^n-1$）

Massey[1] 发现这一矩阵具有一种十分有趣而又重要的性质：任取阵中若干行之和(按mod2求和)，所得的和向量中“1”的个数总不少于所选取的头一行中“1”的个数。例如第4、6、7三行之和为（10010110…），有4个“1”，而所选取的头一行（即第4行）中1的个数$\leqslant 4$。一般对于由0、1组成的向量，我们称其中等于1的分量个数为此向量的重量。于是由$B^{(n)}$的这一性质尤可推知：若将阵$B^{(n)}$中重量小于K的行向量去掉，得到子矩阵K，则K的任意几行的和向量，其重量必大于等于k，这一性质正是现代代数编码理论所企求的，它表明由K生成的纠错码，至少可以查知$k-1$个错，纠正$\left[\frac{k}{2}\right]\left(\text{或}\frac{k}{2}-1\right)$个错。

Massey 还利用$B^{(n)}$的这种重量保持性质于组码及卷积码的研究，得出了一系列重要的结果。其后，*Wolf*在综述文[2]中肯定了这一重要的发现并予言它将有重要的应用。

由矩阵重量保持性质的重要性，一个很自然的问题便是：一个(0－1)矩阵究竟应满足什么样的条件方具有此种性质？对此本文给出了充分与必要的条件（定理3）。由此定理进而可证明此性质关于矩阵的叉积不变（定理4）。亦即若阵A和B都具重量保持性质，则$A\times B$亦

然，特别因 $B^{(n)}=B\times B\times\cdots\times B$，而 $B=\binom{10}{11}$，显然具重量保持性质，从而 $B^{(n)}$ 亦具重量保持性质。此外，我们还证得了一个重量不等式（定理2）系通常的三角不等式的推广。由我们的结果将可导出许多具有重量保持性质的多项式集合，从而为一类新的码之构造提供了潜在的方法。

1 矩阵 B_n 及重量不等式

本文以 a、β，…，ξ 等希腊小写字母表示 $GF(2)$（亦即由0，1按 mod2进行加法与乘法构成的一种域）中的元；以 i，j，k，l，m，等表示整数，又以 a，b，c，等表示向量；以 A，B，C 等表示矩阵，$\mathscr{A}$，$\mathscr{L}$，$\mathscr{U}$，等表示集合。

设 $\mathscr{L}$ 为 $\mathscr{E}\equiv\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个子集，此种子集可与 $0\leqslant i\leqslant 2^n-1$ 的数 i 一一对应：

$$i=\sum_{k=0}^{n-1} i_{k+1}2^k \longleftrightarrow \mathscr{L}(i)=\{j\mid i_j\neq 0\}$$

这里 i_k 为 i 的二进展开中的各数位。

今考查某线性码 $\mathscr{C}$，设其生成矩阵为

$$G=\begin{pmatrix} g_1\\ g_2\\ \cdots\\ g_n\end{pmatrix} \qquad g_k\equiv(\xi_{k1}\cdots\xi_{km})$$

行向量的全体构成集合 $\mathscr{G}=\{g_1,\cdots,g_m\}$，这样 $\mathscr{C}$ 中的每个码字 C 作为诸 g_i 的某种线性组合必能与数 i 一一对应：

$$C\equiv C_i=\sum_{k\in\mathscr{L}(i)} g_k=\sum_{k=1}^{n} i_k g_k$$

这里 $i_k=0$，1视为 $GF(2)$ 中元，为强调此码 C_i 源自集合 $\mathscr{G}$，有时记作

$$C_i(\mathscr{G})=\sum_{k=1}^{n} i_k g_k$$

码字 $C_i(\mathscr{G})$ 的重量（亦即码字向量中1的个数）记为 W_i 或 $W_i(\mathscr{G})$：

$$W_i(\mathscr{G})=W_i=W(C_i(\mathscr{G}))=W\Big(\sum_{k=1}^{n} i_k g_k\Big)=W\Big(\sum_{k\in L(i)} g_k\Big)$$

另一方面，每个二元列向量 $h=(\xi,\cdots,\xi_n)^{\mathrm{T}}$ 也可与 i 相对应：

$$h=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)^{\mathrm{T}}\longleftrightarrow i=\sum_{k=0}^{n-1} i_{k+1}2^k \quad i_k=W(\xi_k)$$

这里 $W(\xi)$ 表示 $\xi\in GF(2)$ 之重量：$W(0)=0$，$W(1)=1$.

对任一数 i：$0\leqslant i\leqslant 2^n-1$ 记

$$d(i)=(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n)^{\mathrm{T}}$$

为与 i 的二进展开相对应的列向量 $i_k=0$ 或1视为 $GF(2)$ 中元，并记

$$D_n=(d(0),\ d(1),\ \cdots,\ d(2^n-1))$$

$$=\begin{pmatrix} a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \\ \vdots \\ a_n^{(n)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\ 1\ 0\ 1\ 0\cdots 1 \\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\cdots 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\cdots 1 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\quad \vdots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\cdots 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\cdots 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

其中 $a_1^{(n)}$， $a_2^{(n)}$，…， $a_n^{(n)}$ 表示阵 D_n 的各行。又记

$$b_i^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} i_k a_k^{(n)}=\sum_{k\mathscr{L}\in(i)} a_k^{(n)} \tag{1.2}$$

（当 $i=0$，从而 $\mathscr{L}(i)=\mathscr{L}(0)=\phi$ 即空集时，和式约定为零）例如 $12=(1100)_2$，故 $L(12)=\{3.4\}$，于是 $b_{12}^{(n)}=a_3^{(n)}+a_4^{(n)}=$（0000 1111 1111 0000 0000 1111 1111……）

由上述定义不难推出次之引理 1 与引理 2：

引理 1 记 $I=(1,\ 1)J=(0,\ 1)$ 则

（Ⅰ） $a_k^{(n)}\times I=a_k^{(n+1)}$；　　（Ⅱ） $I\times a_k^{(n)}=a_{k+1}^{(n+1)}$；

（Ⅲ） $a_k^{(n)}=\underbrace{I\times I\times\cdots\times I}_{k-1\text{项}}\times J\times\underbrace{I\times\cdots\times I}_{n-k\text{项}}$

这里 $A\times B$ 表示阵的叉积，定义为

$$A\times B=(Ab_{ij})$$

引理 2 设 $0\leqslant i\leqslant 2^n-1$，则

（Ⅰ） $\begin{cases} b_i^{(n+1)}=b_i^{(n)}\times I\ ; \\ b_{2^n+i}^{(n+1)}=\left(b_i^{(n)},\ \overline{b}_i^{(n)}\right); \end{cases}$　　（Ⅱ） $b_{2i}^{(n+1)}=I\times b_i^{(n)}$；

（Ⅲ） $b_{2i+1}^{(n)}=I\times b_i^{(n-1)}+b_1^{(n)}=b_{2i}^{(n)}+b_1^{(n)}$

这里 $\overline{0}=1$， $\overline{1}=0$，又一般对于阵或向量 $A=(a_{ij})$，记 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$

定义 1 $A_n\equiv\begin{pmatrix} b_0^{(n)} \\ b_1^{(n)} \\ \vdots \\ b_{2^n-1}^{(n)} \end{pmatrix}$

例如 $A_1=\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 0\ 1 \end{bmatrix}$，　$A_2=\begin{pmatrix} 0\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 0 \end{pmatrix}$ 等

引理 3 $A_1=\begin{bmatrix} 0\ 0 \\ 0\ 1 \end{bmatrix}$，$A_{n+1}=\begin{bmatrix} A_n & A_n \\ A_n & \overline{A}_n \end{bmatrix}$　　$(n\geqslant 1)$

证：　由定义及引 2/(Ⅰ) 立即可得。

由引 3 可见，A_n 的第一行及第一列为全零，故而引出

定义 2 记 B_n 为 A_n 中去掉第一行及第一列得来的矩阵。

定理 1 记 $E\equiv E_{2^n}$ 为 2^n-1 阶方阵，$E=(e_{ij})$，$e_{ij}=1$；I_{2^n-1} 为 2^n-1 阶单位阵，

则视 B_n为实数阵时有：

（Ⅰ） B_n对称，每一行（列）均有2^{n-1}个 1；

（Ⅱ） $EB_n=B_nE=2^{n-1}E$；　　（Ⅲ） $B_n^2=2^{n-2}(I_{2^n-1}+E)$；

（Ⅳ） $2B_n^2-EB_n=2B_n^2-B_nE=2^{n-1}I_{2^n-1}$。由此尤可推知 B_n^{-1}存在，且 $B_n^{-1}=2^{1-n}(2B_n-E)=2^{1-n}(B_n-\overline{B}_n)$。

证： 由 B_n之作法及 $A_{k+1}=\begin{bmatrix}A_k & A_k\\ A_k & \overline{A}_k\end{bmatrix}$对 n 施行归纳法易证明（Ⅰ）；（Ⅱ）可由（Ⅰ）直接推出。对于（Ⅲ）因

$$A_n^2=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & B_n^2\\ 0 & \end{pmatrix}\quad \text{故只须证明 } A_n^2=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & 2^{n-2}(I_{2^n-1}+E)\\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}\tag{1.3}$$

此式当 $n=1$ 时显然成立。归纳假设(1.3)当$n=k$时为真，于是

$$A_{k+1}^2=\begin{pmatrix}A_k & A_k\\ A_k & \overline{A}_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_k & A_k\\ A_k & \overline{A}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2A_k^2 & A_k^2+A_k\overline{A}_k\\ A_k^2+\overline{A}_kA_k & A_k^2+\overline{A}_k^2\end{pmatrix}\tag{1.4}$$

因 $A_k+\overline{A}_k=E_{2^k}$， 故 $A_k^2+A_k\overline{A}_k=A_kE_{2^k}$，但$A_k$除第一行外，每行有$2^{k-1}$个 1，故

$$A_k^2+A_k\overline{A}_k=A_kE_{2^k}=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots\cdots 0\\ 1 & \\ \vdots & E_{2^k-1}\\ 1 & \end{pmatrix}2^{k-1}\tag{1.5}$$

同理 $A_k^2+\overline{A}_kA_k=E_{2^k}A_k=\begin{pmatrix}0 & 1\cdots\cdots 1\\ 0 & \\ \vdots & E_{2^k-1}\\ 0 & \end{pmatrix}2^{k-1}$　　(1.6)

又$\overline{A}_k^2=(E_{2^k}-A_k)^2=E_{2^k}^2-E_{2^k}A_k-A_kE_{2^k}+A_k^2$，而由归纳法假设

$$2A_k^2=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\\ 0 & \\ \vdots & I_{2^k-1}+E_{2^k-1}\\ 0 & \end{pmatrix}2^{k-1}\tag{1.7}$$

此外 $E_{2^k}^2=2^kE_{2^k}$，由此易得

$$A_k^2+\overline{A}_k^2=E_{2^k}^2-E_{2^k}A_k-A_kE_{2^k}+2A_k^2=2^{k-1}(E_{2^k}+I_{2^k})$$

将此式连同(1.5)，(1.6)及(1.7)式代入(1.4)即可完归纳证明。（Ⅳ）可由（Ⅱ）及（Ⅲ）直接推出。

今对 m维二元向量$b=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$ 记

$$\mathscr{L}_1(b)=\{j/\beta_j\neq 0\},\quad \mathscr{L}_0(b)=\{j|\beta_j=0\}$$

定理 2 （重量不等式）设$b=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{2^n-1})$ 为 B_n中任意一行，则对任意

的向量集合$\mathscr{A}=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$有

$$\sum_{i\in\mathscr{L}_1(b)} W_i(\mathscr{A}) \geqslant \sum_{i\in\mathscr{L}_0(b)} W_i(\mathscr{A}) \tag{1.8}$$

例如：对 $n=2$, $B_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，取$B_2$的最后一行$b=(110)$，此时$\mathscr{L}_1(b)=\{1,2\}$，$\mathscr{L}_0(b)=\{3\}$，因$1=(001)_2$，$2=(010)_2$，$3=(110)_2$，故(1.8)式化作$W(a_1)+W(a_2)\geqslant W(a_1+a_2)$，此即通常的三角不等式，其中，$a_1$，$a_2$为任意的向量。又如对于$n=3$，取$B_3$的最后一行$b=(1101001)$，此时$\mathscr{L}_1(b)=\{1, 2, 4, 7\}$，$\mathscr{L}_0(b)=\{3, 5, 6\}$，故有$W_1+W_2+W_4+W_7\geqslant W_3+W_5+W_6$或即对任意三个向量$a_1$，$a_2$，$a_3$有$W(a_1)+W(a_2)+W(a_3)+W(a_2+a_2+a_3)\geqslant W(a_1+a_2)+W(a_1+a_3)+W(a_2+a_3)$ (1.10)

定理2之证：我们首先证明不等式(1.8)对于一维向量集合$a_1=((m)_1), \cdots, a_n=((m)_n)$，亦即

$$\mathscr{A}=m=\{(m)_1,(m)_2, \cdots, (m)_n\} \quad (m\text{固定})$$

成立。因 $B_n-\overline{B}_n=B_n-(E-B_n)=2B_n-E$，故由定理1

$$(B_n-\overline{B}_n)B_n=2^{n-1}I_{2^n-1}\geqslant 0 \qquad (\text{系指矩阵的每个元素大于等于零})$$

因此 $B_nB_n\geqslant\overline{B}_nB_n$。于是对$B_n$的任一列$(\xi_1, \cdots, \xi_m)^{\mathrm{T}}$ $(m=2^n-1)$ 及任一行b必有$b(\xi_1, \cdots, \xi_m)^{\mathrm{T}}\geqslant\overline{b}(\xi_1, \cdots, \xi_m)^{\mathrm{T}}$。但由$\mathscr{L}_1(b)$及$\mathscr{L}_0(b)$之定义易知

$$b(\xi_1, \cdots, \xi_m)^{\mathrm{T}}=\sum_{k\in\mathscr{L}_1(b)}\xi_k, \qquad \overline{b}(\xi_1, \cdots, \xi_m)^{\mathrm{T}}=\sum_{k\in\mathscr{L}_0(b)}\xi_k$$

故对B_n的任一列$(\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$及任一行$b$有

$$\sum_{k\in\mathscr{L}_1(b)}\xi_k\geqslant\sum_{k\in\mathscr{L}_0(b)}\xi_k \tag{1.11}$$

另一方面，由A_n及B_n之作法易知$B_n=\left[\sum_{k\in\mathscr{L}(i)}(m)_k\right]$，$i$和$m$从1到$2^n-1$，$i$为行数，$m$为列数。式中和式$\sum_{k\in\mathscr{L}(i)}(m)_k$系视$(m)_k$为$GF(2)$中元求和，如$\sum_{k\in\mathscr{L}(3)}(5)_k=(5)_1+(5)_2=1+0=1$等。由此可见(1.11)式等价于对$B_n$的任一行$b$有

$$\sum_{i\in\mathscr{L}_1(b)}\left(\sum_{k\in\mathscr{L}(i)}(m)_k\right)\geqslant\sum_{k\in\mathscr{L}_0(b)}\left(\sum_{k\in\mathscr{L}(i)}(m)_k\right)$$

将$(m)_1$，$\cdots$，$(m)_n$看作n个一维向量，记$m=\{(m)_1, \cdots, (m)_n\}$，则上式即

$\sum_{i\in\mathscr{L}_1(b)}W_i(m)\geqslant\sum_{i\in\mathscr{L}_0(b)}W_i(m)$。因$m$可取$0\leqslant m\leqslant 2^n-1$的任意值，故上式表明不等式(1.8)对任意$n$个一维向量组成的集合$\mathscr{A}$成立。由此不难推知(1.8)对任意$n$个$p$维向量组$\mathscr{A}$也成立。

注意，由证明中可见，定理也可叙述成

定理2′ 对任意的$\mathscr{A}=\{a_1, \cdots, a_n\}$成立

$$\left(B_n^{-1}\right)\begin{pmatrix}W_1(\mathscr{A})\\W_2(\mathscr{A})\\\vdots\\W_{2^n-1}(\mathscr{A})\end{pmatrix}\geqslant 0$$

2. 矩阵的重量保持性质

对于一个n行的矩阵$G=(\xi_{ij})$，因它的每一列均为上一节所定义的D_n中的一列，故当G中诸列次序无关紧要时，G可以用一组数l_i来描述：G由l_0个$d(0)$，l_1个$d(1)$，…，l_{2^n-1}个$d(2^n-1)$组成，亦即若记

$$\mathscr{N}_i(G)=\{j|(\xi_{1j},\cdots,\xi_{nj})^T=(i_1,\cdots,i_n)^T\}$$

则 $$l_i=|\mathscr{N}_i(G)|$$

$|\mathscr{N}_i|$表示集合$\mathscr{N}_i$中元的个数。一般$l_i=0$或1，亦即我们一般只须考查诸列互异的矩阵。

定义3 称矩阵$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，其中诸$a_i$为行向量，具有重量保持性质，如果对任意的$k$：$1\leqslant k\leqslant n$及标号集合$\mathscr{U}\subset\{k+1,k+2,\cdots,n\}$有

$$W(a_k+\sum_{j\in\mathscr{U}}a_j)\geqslant W(a_k)\qquad(2.1)$$

这里$W(b)$表示向量$b=(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的重量，亦即$\beta_i$中1的个数（注意这里$\beta_i\in GF(2)$，故$\beta_i=0$或1）。

用上节的记号，定义中的条件(2.1)也可改写成：对任意的i：$1\leqslant i\leqslant 2^{n-k}$及$\mathscr{A}_k\equiv\{a_k,a_{k+1}\cdots a_n\}$有 $$W_{2i-1}(\mathscr{A}_k)\geqslant W_1(\mathscr{A}_k)=W(a_k)$$

引理4 设$\mathscr{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则

$$W_{2i-1}(\mathscr{A})\geqslant W_1(\mathscr{A})\qquad(i=1,\cdots,2^{n-1})$$

当且仅当$B_{n-1}(\triangle_2,\triangle_4,\triangle_6,\cdots,\triangle_{2(2^{n-1}-1)})^T\geqslant 0$或

$$(1,-1)\times C_{n-1})\ (l_0,l_1\cdots,l_{2^n-1})^T\geqslant 0\qquad(2.2)$$

其中$\triangle_{2i}=l_{2i}-l_{2i+1}(i=1,\cdots,2^{n-1})$，$C_{n-1}$为$A_{n-1}$中去掉第一行所得之阵。$C_{n-1}$与$B_{n-1}$均视为实域上之阵。

例如对$n=2$，$B_{n-1}=B_1=(1)$，(2.2)即$(1)\cdot\triangle_2\geqslant 0$即$\triangle_2\geqslant 0$，对$n=3$

$B_{n-1}=B_2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，故条件即为$\triangle_2+\triangle_6$，$\triangle_4+\triangle_6$，$\triangle_2+\triangle_4\geqslant 0$

证： 设$A=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$中有一列与$m=\sum_{k=0}^{n-1}m_{k+1}2^k$相应，亦即该列为$(m_1,m_2,\cdots,m_n)^T$，则该列对$W(a_1)$的贡献为$W(m_1)$，另一方面由$B_n$定义，对任意的$1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$，$\sum_{k\in\mathscr{L}(2i-1)}m_k$为$B_n$中的一个元，而$\sum_{k\in\mathscr{L}(2i-1)}m_k$对$W_{2i-1}(\mathscr{A})$的贡献为$W_{2i-1}(m)=W(\sum_{k\in\mathscr{L}(2i-1)}m_k)$，因而$A$中此种列对$W_{2i-1}(\mathscr{A})-W_1(\mathscr{A})$的贡献为$l_m(W_{2i-1}(m)-W_1(m))$。所以

$$W_{2i-1}(\mathscr{A})-W_1(\mathscr{A})=\sum_{m=0}^{2^n-1}l_m(W_{2i-1}(m)-W_1(m))$$

$$=(W_{2i-1}(0)-W_1(0),W_{2i-1}(1)-W_1(1),\cdots,W_{2i-1}(2^n-1)-W_1(2^n-1)$$
$$\cdot(l_0,l_1,\cdots l_{2^n-1})^T$$

但 $(W_{2i-1}(0),\ W_{2i-1}(1),\ \cdots,\ W_{2i-1}(2^n-1))$为$A_n$的第$2i$行，故

$$W_{2i-1}(\mathscr{A})-W_1(\mathscr{A})$$
$$=\left(\left[b_{2i-1}^{(n)}\right]_R-\left[b_1^{(n)}\right]_R\right)(l_0,\ l_1,\ \cdots,\ l_{2^n-1})^T \qquad (2.3)$$

这里$\left[b_{2i-1}^{(n)}\right]_R$表示将 $b_{2i-1}^{(n)}$视为实数。不难证明

$$\left(\left[b_{2i+1}^{(n)}\right]_R-\left[b_1^{(n)}\right]_R\right)=\left[(1,-1)\times b_i^{(n-1)}\right]_R \qquad (2.4)$$

将(2.4)代入(2.3)可见

$$W_{2i-1}(\mathscr{A})-W_1(\mathscr{A})=\left((1,-1)\times\left[b_{i-1}^{(n-1)}\right]_R\right)(l_0,\ l_1,\ \cdots,\ l_{2^n-1})^T$$

容易验证

$$((1,-1)\times b)(l_0,l_1,\cdots,l_{2^n-1})^T=b(l_0-l_1,l_2-l_3,l_4-l_5,\cdots,l_{2^n-2}-l_{2^n-1})^T$$

故$W_{2i-1}(\mathscr{A})-W_1(\mathscr{A})\geqslant 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{n-1})$等价于

$$\begin{pmatrix} b_0^{(n-1)} \\ b_1^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_{2^{n-1}-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \triangle_0 \\ \triangle_2 \\ \cdots \\ \triangle_{2^n-2} \end{pmatrix}\geqslant 0$$

由A_{n-1}定义，上式即$A_{n-1}(\triangle_0,\ \triangle_2,\ \cdots,\ \triangle_{2^n-2})^T\geqslant 0$，这等价于

$$B_{n-1}(\triangle_2,\ \triangle_4\cdots\triangle_{2(2^{n-1}-1)})^T\geqslant 0 \qquad \text{证毕。}$$

定理 3 设$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，则$A$具重量保持性质，当且仅当其 l 数满足

$$\begin{pmatrix} (1,-1)\times C_{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overbrace{I\times I\times\cdots\times I}^{i-1}\times(1,-1)\times C_{n-i} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overbrace{I\times I\times\cdots\times I}^{n-2}\times(1-1)\times C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{2^n-1} \end{pmatrix}\geqslant 0$$

证：记$\mathscr{A}_k=\{a_k,a_{k+1},\cdots,a_n\}$如前，$A_k=\begin{pmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，记$A_k$的$l$数为$l_0^{(k)},l_1^{(k)}\cdots,l_{(2^{n-k+1}-1)}^{(k)}$，

易验

$$l_i^{(k+1)}=l_{2i}^{(k)}+l_{2i+1}^{(k)}=(1,1)\begin{pmatrix}l_{2i}^{(k)}\\ l_{2i+1}^{(k)}\end{pmatrix}=\cdots\cdots$$

$$=\overbrace{(I\times I\times\cdots\times I)}^{k}(l_{2^k i},\ l_{2^k i+1},\ \cdots,\ l_{2^k(i+1)-1})^{\mathrm{T}}$$

今将引理4用于$\mathscr{A}_k$可见

$$W_{2i-1}(\mathscr{A}_k)\geqslant W_1(\mathscr{A}_k)\quad 1\leqslant i\leqslant 2^{n-k}$$

当且仅当$((1,1)\times C_{n-k})\left(l_0^{(k)},\ l_1^{(k)},\ \cdots,\ l_{2^{n-k+1}-1}^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$ 或

$$((1,-1)\times C_{n-k})[\overbrace{I\times\cdots\times I}^{k},\ \cdots,\ \overbrace{I\times\cdots\times I}^{k}](l_0,\ l_1,\ \cdots,\ l_{2^n-1})^{\mathrm{T}}\geqslant 0$$

此即$(\overbrace{(I\times I\times\cdots\times I)}^{k}\times(1,-1)\times C_{n-k})(l_0,\ l_1,\ \cdots,\ l_{2^n-1})^{\mathrm{T}}\geqslant 0$　　证毕。

例当$n=3$，即

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&-1\\0&0&1&-1&1&-1\\1&-1&1&-1&0&0\\0&0&1&1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_2\\l_3\\\vdots\\l_7\end{pmatrix}\geqslant 0$$

由前三个不等式可见：

若　$l_2<l_3$，则须$l_4>l_5$，$l_6>l_7$；

若　$l_4<l_5$，则须$l_2>l_3$，$l_6>l_7$；

若　$l_6>l_7$，则须$l_2>l_3$，$l_4>l_5$。

另外易知，若$l_{2i}-l_{2i+1}>0$，则必满足上述之不等式，由此易解得全部解为(限于$l_i=0$或1，即A诸列互异，且诸行非零时)：346，256，247，234，245，456；2345，2346，2456，4567；23456，24567；234567。例如346表示阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$，234表示阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，256表示阵$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$等。

由引理4还可以推出

系　4.1，设　$\mathscr{B}=\{b_1,\ \cdots,\ b_r\}$具有性质$W_{2i-1}(\mathscr{B})\geqslant W_1(\mathscr{B})$

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2^{r-1}$，则对任意的$\mathscr{A}=\{a_1,\ \cdots,\ a_r\}$成立

$$\sum_{k=1}^{\overrightarrow{2^{r-1}-1}}\triangle_{2k}W_{2k}(\mathscr{A})\geqslant 0\qquad(2.6)$$

其中$\triangle_{2k}=l_{2k}-l_{2k+1}$，$l_i$为$\mathscr{B}$的$l$数。

证：$\sum_{k=1}^{\overrightarrow{2^{r-1}-1}}\triangle_{2k}W_{2k}(A)=(\triangle_2,\triangle_4,\cdots,\triangle_{2^r-2})(W_2(\mathscr{A}),W_4(\mathscr{A}),\cdots,W_{2^r-2}(\mathscr{A}))^{\mathrm{T}}=(\triangle_2,\ \triangle_4,\ \cdots,\ \triangle_{2^r-2})B_{r-1}B_{r-1}^{-1}[W_2(\mathscr{A}),W_4(\mathscr{A}),\cdots,\ W_{2^r-2}(\mathscr{A})]^{\mathrm{T}}$

但由引理4及假设 $(\triangle_2,\triangle_4,\cdots,\triangle_{2^r-2})B_{r-1}\geqslant 0$，又因对 $\mathscr{A}^1\equiv\{a_1^1,\cdots,a_{r-1}^1\}$，$a_i^1=a_{i+1}$有$W_{2k}(\mathscr{A})=W_k(\mathscr{A}^1)$，故由定理2′ $B_{r-1}^{-1}(W_2(\mathscr{A}),W_4(\mathscr{A}),\cdots,W_{2^r-2}(\mathscr{A}))=B_{r-1}^{-1}(W_1(\mathscr{A}^1),W_2(\mathscr{A}^1),\cdots,W_{2^{r-1}-1}(\mathscr{A}^1))\geqslant 0$

即见系之为真。

引理5 设$\mathscr{A}=\{a_1,\cdots,a_r\}$，$\mathscr{B}=\{b_1,\cdots,b_r\}$，阵$B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_r\end{pmatrix}$的$l$数为$l_0,l_1,\cdots,l_{2^r-1}$，

$$W\Big(\sum_{i=1}^{r}a_i\times b_i\Big)-W(a_1\times b_1)$$
$$=\sum_{i=0}^{2^r-1}l_iW_i(\mathscr{A})-\Big(\sum_{k=0}^{2^{r-1}-1}l_{2k+1}\Big)W_1(\mathscr{A})$$
$$=\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}\triangle_{2k}W_{2k}(\mathscr{A})+\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}l_{2k+1}(W_{2k}(\mathscr{A})+W_{2k+1}(\mathscr{A})-W_1(\mathscr{A}))$$

证： B的任一列$(\beta_{1j},\cdots,\beta_{rj})^{\mathrm{T}}$对应于阵

$$\begin{pmatrix}\beta_{1j}a_1\\ \vdots\\ \beta_{rj}a_r\end{pmatrix}\qquad(2.7)$$

此阵对$W(a_1\times b_1)$的贡献为$W(\beta_{1j}a_1)$。但列$(\beta_{1j},\cdots,\beta_{rj})^{\mathrm{T}}$与奇数$i=2k+1$相应时，$\beta_{1j}=1$，与偶数相应时，$\beta_{1j}=0$。故$W(a_1\times b_1)=\sum_{j=0}^{2^r-1}W(\beta_{1j}a_1)=\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}l_{2k+1}W(a_1)$

又阵(2.7)对$W\Big(\sum_{i=1}^{r}a_i\times b_i\Big)$的贡献为$W(\beta_{1j}a_1+\cdots+\beta_{1j}a_r)=W\Big(\sum_{j\in\mathscr{L}(i)}a_j\Big)$，其中$i$为与$(\beta_{1j},\cdots,\beta_{rj})$对应的数，即$i=\sum_{k=0}^{r-1}\beta_{1+k,j}2^k$，于是

$$W\Big(\sum_{i=1}^{r}a_i\times b_i\Big)=\sum_{i=0}^{2^r-1}l_iW\Big(\sum_{j\in\mathscr{L}(i)}a_j\Big)=\sum_{i=0}^{2^r-1}l_iW_i(\mathscr{A})$$

因$W_0(\mathscr{A})=0$，故由上可见

$$W\Big(\sum_{i=1}^{r}a_i\times b_i\Big)-W(a_1\times b_1)=\sum_{i=1}^{2^r-1}l_iW_i(\mathscr{A})-\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}l_{2k+1}W(a_1)$$
$$=\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}l_{2k}W_{2k}(\mathscr{A})+\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}l_{2k+1}W_{2k+1}(\mathscr{A})-\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}l_{2k+1}W_1(\mathscr{A})$$
$$=\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}(l_{2k}-l_{2k+1})W_{2k}(\mathscr{A})+\sum_{k=1}^{2^{r-1}-1}l_{2k+1}(W_{2k}(\mathscr{A})+W_{2k+1}(\mathscr{A})-W_1(\mathscr{A}))$$

推论 5.1 若 $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_r\end{pmatrix}$ 满足 $W_{2i-1}(B)-W_1(B)\geqslant 0$

$1\leqslant i\leqslant 2^{r-1}$，则 $W\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\times b_i\right)-W(a_1\times b_1)\geqslant 0$ (2.8)

证： 由系 4.1，三角不等式 (1.9) 及所设的条件即可推出。

定理 4 若 A、B 具有重量保持性质，则 $A\times B$ 亦具有重量保持性质。

证： 设 $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$，则 $A\times B$ 的任意一行形如 $a_i\times b_j$，因而 $A\times B$ 的任意不同的 l 行之和形如

$$\sum\nolimits'=a_{i_1}\times b_{j_1}+a_{i_2}\times b_{j_2}+\cdots+a_{i_l}\times b_{j_l} \tag{2.9}$$

且不妨设 $1\leqslant j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_l\leqslant m$。因 $j_1=j_2$ 时，$i_1\neq i_2$，不然 $a_{i1}\times b_{j1}$ 与 $a_{i2}\times b_{j2}$ 将取自 $A\times B$ 的同一行。由此不妨设 $1\leqslant j_1=j_2=\cdots j_s<j_{s+1}\leqslant j_{s+2}\leqslant\cdots$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n$，于是将和式(2.9)中凡 b_{jk} 相同的予以合并，即得

$$\sum\nolimits'=(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_s})\times b_{j_1}+(a_{i_{s+1}}+\cdots)\times b_{j_{s+1}}+\cdots$$

$$\equiv\widetilde{a}_1\times b_{k_1}+\widetilde{a}_2\times b_{k_2}+\cdots\cdots+\widetilde{a}_r\times b_{k_r}$$

其中 $\widetilde{a}_i$ 为 A 中若干行之和，特别 $\widetilde{a}_1=(a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_s})$；又 b_{k_i} 为 B 中不同的行：$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant m$，特别 $b_{k_1}=b_{j_1}$。在所述记法下，$a_{i_1}\times b_{j_1}$，$a_{i_2}\times b_{j_2}$，$\cdots$，$a_{i_l}\times b_{j_l}$ 各行中位于 $A\times B$ 中最前面的一行为 $a_{i_1}\times b_{j_1}$，故需证明

$$W\left(\sum_{p=1}^{l} a_{i_p}\times b_{i_p}\right)\geqslant W(a_{i_1}\times b_{j_1})$$

或

$$W\left(\sum_{p=1}^{r}\widetilde{a}_p\times b_{k_p}\right)\geqslant W(a_{i_1}\times b_{j_1}) \tag{2.10}$$

因 B 具重量保持性质，$b_{k_1},\cdots,b_{k_r}$ 为 B 中不同的行故由推论 5.1 知

$W\left(\sum_{p=1}^{r}\widetilde{a}_p\times b_{k_p}\right)\geqslant W(\widetilde{a}_1\times b_{k_1})$，因 $W(a\times b)=W(a)\cdot W(b)$，所以 $W(\widetilde{a}_1\times b_{k_1})$ $=W(\widetilde{a}_1)W(b_{k_1})=W(a_{i_1}+\cdots+a_{i_s})W(a_{k_1})$，由 A 具重量保持性质及 $i_1<i_2<\cdots<i_s$ 可知 $W(a_{i_1}+\cdots+a_{i_s})\geqslant W(a_{i_1})$。故 $W(\widetilde{a}_1\times b_{k_1})\geqslant W(a_{i_1})W(b_{k_1})=W(a_{i_1})W(b_{j_1})$ $=W(a_{i_1}\times b_{j_1})$(2.10)得证，故定理证毕。

若记 $\mathscr{W}=\{A\mid A$ 具重量保持性质$\}$，则由上述定理可见

定理4′ 若 A，$B\in\mathscr{W}$，则 $A\times B\in\mathscr{W}$，亦即 $\mathscr{W}$ 关于运算 $\times$ 是封闭的。

系 1 若 $A_i\in\mathscr{W}$，$(i=1,2,\cdots,m)$，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_m\in\mathscr{W}$。

系 2 若 $A\in\mathscr{W}$，则 $A^{\times m}\overbrace{\equiv A\times A\times\cdots\times A}^{m}\in\mathscr{W}$

在系 2 中取 $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，显然 $B\in\mathscr{W}$，从而 $B^{(m)}\overbrace{\equiv B\times B\times\cdots\times B}^{n}\in\mathscr{W}$。$B^{(m)}$ 的各行正是 $(x+c)^i$ 展开式的系数，由此即可推出

系 3 设 c 为 $GF(2^m)$ 中任一非零元，则多项式集合 $\{(x+c)^i\}$ 具有重量保持性质亦即

$$W(\sum\beta_i(x+c)^i)\geqslant W((x+c)^{i_{min}})$$

此即 [1] 中所取得的一个结果。

参 考 文 献

[1] J.L. Massey et al., Pollynomial weights and code constructions, IEEE Transactions on Information Theory, v. IT—19 (1973), No.1, 101—110.

[2] J.K. Wolf, A survey of coding theory:1967—1972. ibid (1973). No.4。 381—389.