

位移约束下连续体结构拓扑优化分析

叶红玲, 隋允康, 杜家政

(北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院, 北京 100022)

摘要: 为了研究位移约束下多工况连续体结构拓扑优化问题, 基于 ICM(独立、连续、映射)方法, 建立了以结构质量为目的的拓扑优化模型. 利用单位虚载荷法, 将位移约束表示为设计变量的显式关系. 另外, 利用对偶理论, 将建立的优化模型转化为对偶模型, 用序列二次规划法进行求解, 从而减少了设计变量的数目, 提高了求解效率. 利用 PCL 语言在 MSC/Patran 开发平台上对本算法进行了实现, 二维和三维连续体结构的数值算例表明了该方法的可行性与有效性.

关键词: 优化; 拓扑; 连续体结构

中图分类号: O34

文献标识码: A

文章编号: 0254-0037(2007)09-0908-07

连续体结构拓扑优化设计是指在设计区域上选出一个优化子集, 使之在满足约束条件的前提下使目标函数达到极小. 与尺寸优化和形状优化相比, 连续体结构拓扑优化需要确定的参数更多, 取得的经济效益更大, 对工程设计人员更具有吸引力; 同时, 连续体结构拓扑优化因为数学模型建立困难, 设计变量较多和数学求解计算量大而一直是近年来结构优化研究的难点之一, 其研究具有非常重要的理论意义和工程应用前景. 有关拓扑优化发展的综述文章可参见文献[1], 代表性的工作是均匀化方法、变厚度法和变密度法等^[2-6]. 这些方法通常以结构柔顺度为目标, 以体积为约束, 对位移约束的考虑比较少.

在实际工程应用中, 人们对结构的要求往往不只是满足强度条件, 通常还会要求结构满足一定的刚度条件, 即限制某些结点的位移在一定的许用范围内, 以保证结构位移变形不超过规定的数值, 这就是优化问题中的位移约束问题. 本文基于 ICM(独立、连续、映射)方法^[7-10], 建立了位移约束下的连续体结构的拓扑优化模型. 利用虚功原理将位移约束转化为含设计变量的显式约束, 用对偶规划精确映射, 再用泰勒展式建立对偶规划的二阶近似, 用二次规划求解器求解这个二阶近似问题. 最后, 利用 PCL 语言在 MSC/Patran 开发平台上对该方法进行了算例验证.

1 连续体结构拓扑优化模型的建立与求解

1.1 优化模型的建立

基于 ICM 方法, 得到具有独立连续拓扑变量的位移约束下的连续体结构拓扑优化模型为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ \text{使} \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \rightarrow \min \\ \text{s. t.} \quad \sum_{i=1}^N u_{ir} \leq \bar{u}_r \\ \quad \quad t_i \leq t_i \leq 1 (i = 1, \dots, N; r = 1, \dots, R; l = 1, \dots, L) \end{array} \right. \quad (1)$$

式中, $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_N)^T$ 是单元拓扑设计变量向量; u_{ir} 为第 l 个工况下、第 i 个单元对第 r 号位移约束的贡献

收稿日期: 2006-08-31.

基金项目: 国家自然科学基金委(10472003); 北京市自然科学基金资助项目(3042002); 北京工业大学博士启动基金项目.

作者简介: 叶红玲(1972-), 女, 河北东光人, 副教授.

献; \bar{u}_r 表示第 r 号位移约束的上限; L 为工况总数; R 为定义的位移约束总数; N 表示单元拓扑设计变量的总数.

按照 ICM 方法, 设单元或子域的拓扑变量为 t_i , 将拓扑变量由离散变量扩展为 0 到 1 区间上的连续变量, 同时在优化模型中引入过滤函数. 各单元质量和单元刚度阵与拓扑设计变量间的过滤函数为

$$m_i = f_m(t_i)m_i^0, \quad k_i = f_k(t_i)k_i^0, \quad f_m(t_i) = t^\alpha, \quad f_k(t_i) = t^\beta \quad (2)$$

其中, m_i 为单元质量; k_i 为单元刚度阵; m_i^0 为单元固有质量; k_i^0 为单元固有刚度阵. 此时, 原优化模型(1)变为

$$\begin{cases} \text{求} & \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N)^T \\ \text{使} & M = \sum_{i=1}^N f_m(t_i)m_i \rightarrow \min \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^N u_{irl}(f_k(t_i)) \leq \bar{u}_r \\ & t_i \leq t_i \leq 1 (i = 1, \dots, N; r = 1, \dots, R; l = 1, \dots, L) \end{cases} \quad (3)$$

1.2 位移约束显式化

由莫尔定理知道, 结构任意节点某一方向的广义位移可表示为

$$u_j = \sum_{i=1}^N D_i = \sum_{i=1}^N \int (\boldsymbol{\sigma}_i^Y)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i^R) dv \quad (4)$$

式中, $\boldsymbol{\sigma}_i^Y$ 为在 u_j 位移方向作用单位虚载荷下单元 i 的应力分量; $\boldsymbol{\varepsilon}_i^R$ 为实载荷下单元 i 的应变向量; $D_i = \int (\boldsymbol{\sigma}_i^Y)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i^R) dv$ 为 i 单元对广义位移贡献的莫尔积分形式; J 为优化模型经过约束初选后的位移准有效约束总数, $j = 1, \dots, J, J \leq LR; \bar{u}_j = \bar{u}_r (j = (l-1)L + r; l = 1, \dots, L; r = 1, \dots, R); L$ 为工况数; R 为定义的位移约束总数, 如某问题有 2 个载荷工况, 定义了 3 个位移约束, 则优化模型中共有组合得到的 6 个位移约束条件. 根据虚功原理“外力在虚位移上做的功等于内力在虚位移导致的虚变形上所做的虚功”, 可以得到

$$D_i = \int (\boldsymbol{\sigma}_i^Y)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i^R) dv = (\mathbf{P}_i^R)^T \mathbf{u}_i^Y \quad (5)$$

其中, \mathbf{P}_i 为单元节点的外力; \mathbf{u}_i^Y 为虚位移. 根据总刚方程, 式(5)又可写为

$$D_i = \int (\boldsymbol{\sigma}_i^Y)^T (\boldsymbol{\varepsilon}_i^R) dv = (\mathbf{P}_i^R)^T \mathbf{u}_i^Y = \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i^Y \quad (6)$$

其中 \mathbf{k} 为材料刚度矩阵, 对于二维各向同性材料

$$\mathbf{k}^0 = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, E 为材料的弹性模量; μ 为泊松比. 由此, 各单元拓扑设计变量与位移约束的显式关系式为

$$u_{rl} = \sum_{i=1}^N [D_{rl}]_i = \sum_{i=1}^N \frac{f_k(t_i^0)}{f_k(t_i)} (\mathbf{P}_i^R)^T \mathbf{u}_i^Y = \sum_{i=1}^N \frac{t_i^{(k)\beta}}{t_i^\beta} (\mathbf{P}_i^R)^T \mathbf{u}_i^Y \quad (8)$$

记单元对位移的贡献系数为

$$A_{ji} = (\mathbf{P}_i^R)^T \mathbf{u}_i^Y \quad (9)$$

记位移约束方程系数为

$$c_{ji} = A_{ji} (t_i^{(k)})^\beta \quad (10)$$

则位移约束近似显式为

$$u_j = \sum_{i=1}^N c_{ij} / (t_i)^\beta = \sum_{i=1}^N A_{ij} (t_i^{(k)})^\beta / (t_i)^\beta \quad (11)$$

1.3 优化模型的求解

将式(2)与式(11)代入模型(3),得到位移约束下的拓扑优化模型为

$$\begin{cases} \text{求} & t = (t_1, t_2, \dots, t_N)^T \\ \text{使} & M = \sum_{i=1}^N (t_i)^\alpha m_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^N c_{ji} / (t_i)^\beta \leq \bar{u}_j \\ & \underline{t}_i \leq t_i \leq 1 \quad (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J) \end{cases} \quad (12)$$

这里,为防止计算中单元刚度阵奇异,对于拓扑变量下限不是取0,而是引入一个极小量 $\underline{t}_i = 0.001$. 引入变换

$$z_i = (t_i)^\beta \quad \underline{z}_i = (\underline{t}_i)^\beta \quad (13)$$

则有 $t_i = (z_i)^{1/\beta}$, 于是

$$f_w(t_i) = (z_i)^{\alpha/\beta} \quad f_o(t_i) = (z_i)^{\gamma/\beta} \quad (14)$$

将式(14)代入式(12),得

$$\begin{cases} \text{求} & z = (z_1, \dots, z_N)^T \\ \text{使} & M = \sum_{i=1}^N (z_i)^{\alpha/\beta} m_i^0 \rightarrow \min \\ \text{s. t.} & \sum_{i=1}^N \frac{c_{ji}}{z_i} \leq \bar{u}_j \\ & \underline{z}_i \leq z_i \leq 1 \\ & (i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, J) \end{cases} \quad (15)$$

对于连续体结构,每个单元包含1个拓扑设计变量,因此基结构中拓扑设计变量数目很大.为减少求解规模,求解这个问题有2条途径:一是基于对偶规划的精确映射开始求解;另一个是基于序列二次规划SQP的近似映射开始求解.考虑式(15)为可分离形式,采用对偶规划的方法来求解模型(15),得到如下模型为

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda \in E^L \\ \text{使} & \phi(\lambda) \rightarrow \max \\ \text{s. t.} & \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$\phi(\lambda) = \min_{\underline{z}_i \leq z_i \leq 1} \left\{ S(t, \lambda) = \sum_{i=1}^N (z_i)^{\alpha/\beta} m_i^0 + \sum_{j=1}^J \lambda_j \sum_{i=1}^N (c_{ji} / z_i - \bar{u}_j) \right\} \quad (17)$$

对式(17)关于 z_i 求导,得到其库恩-塔克条件为

$$\frac{\partial S}{\partial z_i} = \frac{\alpha}{\beta} m_i^0 (z_i)^{(\alpha/\beta)-1} - \sum_{j=1}^J \frac{\lambda_j c_{ji}}{(z_i)^2} \begin{cases} > 0 & (z_i^* = \underline{z}_i) \\ = 0 & (\underline{z}_i < z_i^* < 1) \\ < 0 & (z_i^* = 1) \end{cases} \quad (18)$$

式(18)为得到函数 $\phi(\lambda)$ 的条件.

$$z_i = \begin{cases} \underline{z}_i & (z_i^* \leq \underline{z}_i) \\ d_i & (\underline{z}_i < z_i^* < 1) \\ 1 & (z_i^* \geq 1) \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$d_i = \sqrt{\beta \sum_{j=1}^J \lambda_j^* c_{ji} / (\alpha m_i^0)} \tag{20}$$

由于难以求得 $\phi(\lambda)$ 的显式, 所以只能将其化为序列近似映射法求解. 为此, 由式(18)解得 $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_j}$ 和 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k}$. 由于 $z_i = z_i(\lambda)$, 由对偶理论有

$$\frac{\partial \phi(\lambda)}{\partial \lambda_j} = \sum_{i=1}^N \frac{c_{ji}}{z_i} - \bar{u}_j \tag{21}$$

将式(21)对 $\partial \lambda_k$ 求导可得

$$\frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_{i=1}^N \frac{c_{ji}}{z_i^2} \frac{\partial z_i}{\partial \lambda_k} \tag{22}$$

设 $n_a = \{i | \underline{z}_i < z_i < 1\}$ 为主动变量集. 对于 $i \notin n_a$, 即 $z_i = \underline{z}_i$ 或 $z_i = 1$, 由式(19)可知有

$$\frac{\partial z_i}{\partial \lambda_k} = 0 \tag{23}$$

对于 $i \in n_a$, 为求得 $\frac{\partial z_i}{\partial \lambda_k}$, 将式(18)转化为

$$\frac{\alpha}{\beta} m_i^0 (z_i)^{\alpha/\beta+1} = \sum_{k=1}^L \lambda_k c_{ki} \tag{24}$$

将等式两边对 $\partial \lambda_k$ 求导得

$$z_i^{\alpha/\beta} \frac{\partial z_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\beta^2}{(\alpha^2 + \alpha\beta)} \frac{c_{ki}}{m_i^0} \tag{25}$$

即

$$\frac{\partial z_i}{\partial \lambda_k} = \frac{\beta^2}{(\alpha^2 + \alpha\beta)} \frac{c_{ki}}{z_i^{\alpha/\beta} m_i^0} \tag{26}$$

将式(23)与式(26)代入式(22)得

$$\frac{\partial^2 \phi(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = - \sum_{i \in n_a} \frac{\beta^2 c_{ji} c_{ki}}{(\alpha^2 + \alpha\beta) z_i^{\alpha/\beta+2} m_i^0} \tag{27}$$

将 $\phi(\lambda)$ 在 λ^0 处进行二次 Taylor 展开, 略去常数项并乘以 -1, 得

$$-\phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T D \lambda + H^T \lambda \tag{28}$$

其中, $D = -\nabla^2 \phi(\lambda^0)$; $H^T = -[\nabla^2 \phi(\lambda^0)^T - (\lambda^0)^T - \nabla^2 \phi(\lambda^0)]$, 消去 H 中显含的 λ^0 , 从而得到将 $\phi(\lambda)$ 二阶近似并略去常数项后的二次规划模型为

$$\begin{cases} \text{求} & \lambda \in E^J \\ \text{使} & -\phi(\lambda) = \frac{1}{2} \lambda^T D \lambda + H^T \lambda \rightarrow \min \\ \text{s.t.} & \lambda_j \geq 0 \quad (j=1, \dots, J) \end{cases} \tag{29}$$

其中, $D_{jk} = \sum_{i \in n_a} \frac{\beta^2 c_{ji} c_{ki}}{(\alpha^2 + \alpha\beta) (z_i^*)^{\alpha/\beta+2} m_i^0}$; $H_j = \left[\bar{u}_j - \sum_{i \in n_a} \frac{(\alpha + 2\beta) c_{ji}}{(\alpha + \beta) z_i} - \sum_{i \neq n_a} \frac{c_{ji}}{z_i} \right]_j$.

调用二次规划的程序, 求解即可得到 λ^* . 对模型中 $t_i = 0$ 或 1 的拓扑变量, 应将其排除在求导运算之外. 求出 λ^* 后, 更新主被动变量集, 对结构进行修改, 进入下一次循环, 如此迭代直至满足收敛准则

$$\Delta m = |(M^{(k+1)} - M^{(k)}) / M^{(k+1)}| \leq \epsilon \tag{30}$$

其中, $M^{(k)}$ 及 $M^{(k+1)}$ 为前轮与本轮迭代的结构总质量, ϵ 为收敛精度, 本文取 $\epsilon = 0.001$.

2 数值算例

算例 1 如图 1 所示, 基本结构为 $0.24 \text{ m} \times 0.1 \text{ m}$ 的平面体, 厚度为 9 mm , 材料弹性模量为 68.89

GPa, 泊松比为 0.3, 划分为 48×20 个矩形 4 节点单元, 左边界采用固定支承. 工况 1: 一个向下的集中载荷 $F = 15.600 \text{ kN}$ 作用于右边界中心位置; 工况 2: 一个水平向右的集中载荷 $F = 15.600 \text{ kN}$ 作用于右边界中心位置. 为避免应力集中的影响, 将载荷分散在右边界中间的 3 个节点上. 在 2 种工况下右边界中点处向下位移约束为 0.15 mm , 向右的水平位移约束为 0.15 mm . 结构初始总质量为 0.216 t , 分析得到 P 点的初始竖直向下位移为 0.0744 mm , 水平位移为 0.0508 mm , 收敛精度为 0.001 .

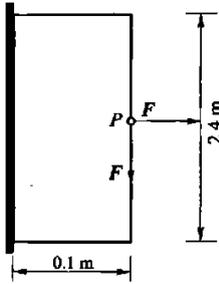
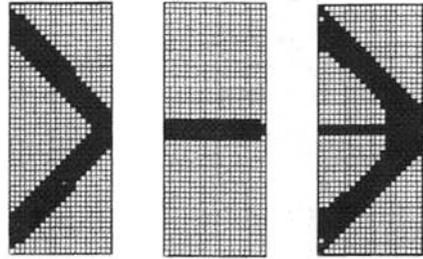


图 1 基结构
Fig.1 Base structure



(a) 工况 1 (b) 工况 2 (c) 2 工况

图 2 不同情况下的最优拓扑图形
Fig.2 Optimal topology configuration with different cases

本算例属于多工况下的位移约束问题. 工况 1 的最优拓扑结构如图 2(a) 所示, 工况 2 下的最优拓扑结构如图 2(b) 所示, 图 2(c) 给出了 2 工况下的最优拓扑图形. 由图 2(c) 可以看到对于多工况下的位移约束并不是 2 个单工况拓扑结构的简单迭加, 在优化过程中, 工况 1 的载荷起主要作用, 从而多工况下拓扑结构的中间部分比单工况 2 下的拓扑结构要细. 图 3 和图 4 给出了 2 工况共同作用下的质量和位移迭代过程. 对于多工况下位移约束的情况, 经过 40 次迭代满足位移约束, 最后的 P 点的竖直向下位移为 -0.149999 mm , 水平位移为 0.149997 mm . 最优拓扑结构质量为 71.79232 kg .

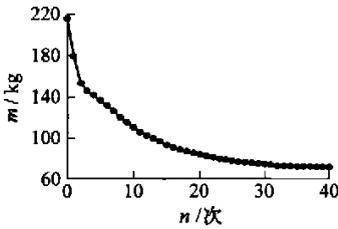


图 3 2 工况下的质量迭代历史
Fig.3 Iteration history of weight for two load cases

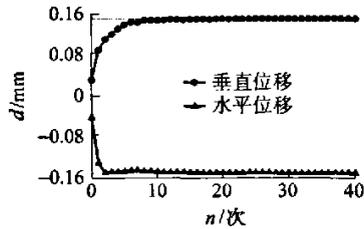


图 4 2 工况下的位移约束迭代历史
Fig.4 Iteration history of displacement constraint for two load cases

算例 2 如图 5 所示, 基结构为 $1 \text{ m} \times 0.2 \text{ m} \times 0.06 \text{ m}$ 的三维实体, 两端固定, 材料弹性模量为 210 GPa , 泊松比为 0.3, 密度为 1 kg/cm^3 . 一集中载荷 $P = 100 \text{ kN}$ 作用于下边界中点, 将载荷分散在下边界中间的 3 个节点上, 左下角及右下角 2 个点采用固定支承. 划分 $50 \times 10 \times 3$ 个 8 节点体单元, 载荷 $P = 100 \text{ kN}$ 作用于上边界中点位置的 4 个节点上, 左边界全部采用固定约束. 原结构质量为 12 t . 上边界中点位置的 4 个节点初始位移值分别为 $-0.11103, -0.09807, -0.09807, -0.11103 \text{ mm}$, 位移约束均是竖直向下并且小于 0.8 mm .

本算例是一个三维连续体结构在多点位移约束下的拓扑优化实例. 经过 48 次迭代, 得到图 6 所示的最优拓扑结构, 保留单元 236 个. 上边界的 4 点位移分别为 $-0.79660, -0.79656, -0.79656, -0.79660 \text{ mm}$, 达到位移约束. 拓扑优化后结构的质量为 1.8981 t . 图 7 给出了拓扑优化前后的位移云图, 图 8 和图 9 分别给出了位移约束和目标的迭代历史.

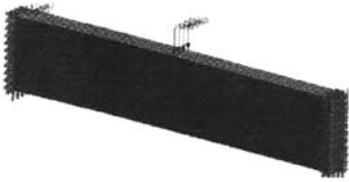


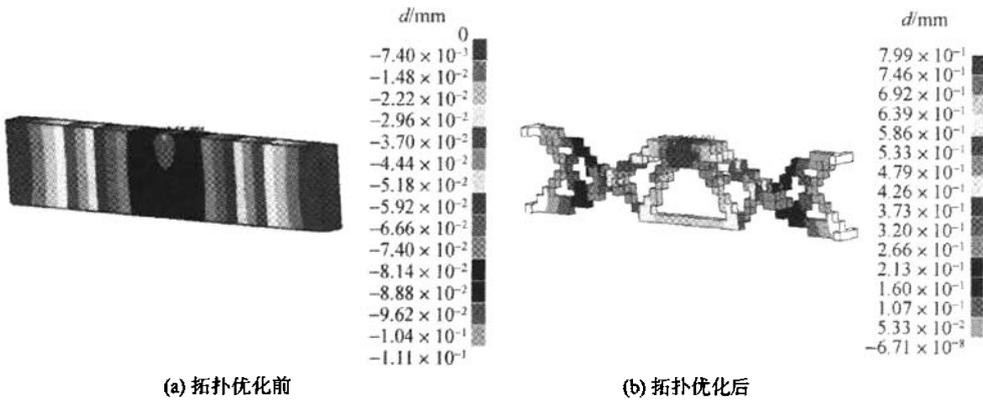
图 5 基结构

Fig.5 Base structure



图 6 最优拓扑图形

Fig.6 Optimal topology configuration



(a) 拓扑优化前

(b) 拓扑优化后

图 7 拓扑优化前后的位移云图

Fig.7 Displacement fringe before and after optimal topology

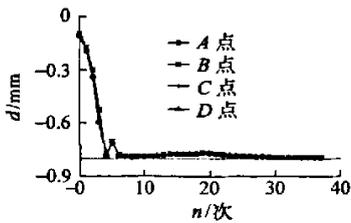


图 8 位移约束迭代历史

Fig.8 Iteration history of displacement constraint

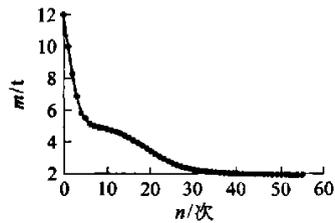


图 9 质量迭代历史

Fig.9 Iteration history of mass

3 结论

本文基于 ICM 方法,在 MSC/Nastran 及 MSC/Patran 软件平台上进行了二次开发,建立了以质量为目标,多工况下位移为约束的连续体结构拓扑优化模型,利用单位虚载荷法,将位移约束表示为设计变量的显式关系.借助对偶规划理论对优化模型进行了求解,减少了约束数目,提高了求解效率.本文算法在处理多工况下的位移约束时,可以看到,拓扑结构并不是单工况下拓扑结构的简单叠加,而是选择了最佳的传力路径,包含二维和三维连续体结构的数值算例说明了该方法的高效性.

参考文献:

[1] ESCHENAUER H A, OLHOFF N. Topology optimization of continuum structures: a review[J]. Appl. Mech. Rev, 2001, 54(4): 331-389.
 [2] BENDSOE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Comp

- Meth Appl Mech Engrg, 1988, 71(1): 197-224.
- [3] YANG R J. Topology optimization analysis with multiple constraints[J]. American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division, 1995, 82(1): 393-398.
- [3] 程耿东, 张东旭. 受应力约束的平面弹性体的拓扑优化[J]. 大连理工大学学报, 1995, 35(1): 1-9.
CHENG Geng-dong, ZHANG Dong-xu. Topological optimization of plane elastic continuum with stress constraints[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1995, 35(1): 1-9. (in Chinese)
- [5] MLEJNEK H P, SCHIRRMACHER R. An engineer's approach to optimal distribution and shape finding[J]. Comp Meth Appl Mech Engrg, 1993, 106(1/2): 1-26.
- [6] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers and Structures, 1993, 49(5): 885-896.
- [7] 隋允康. 建模·变换·优化——结构综合方法新进展[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996.
- [8] 隋允康, 彭细荣. 结构拓扑优化 ICM 方法的改善[J]. 力学学报, 2005, 37(2): 190-198.
SUI Yun-kang, PENG Xi-rong. The improvement for the ICM method of structural topology optimization[J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, 37(2): 190-198. (in Chinese)
- [9] 隋允康, 叶红玲, 杜家政. 结构拓扑优化的发展及其模型转化为独立层次的迫切性[J]. 工程力学, 2005, 22(增刊): 107-118.
SUI Yun-kang, YE Hong-ling, DU Jia-zheng. Development of structural topological optimization and imminency of its model transformation into independent level[J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(supp.): 107-118. (in Chinese)
- [10] 隋允康, 彭细荣. 连续体结构考虑离散性目标的 ICM[J]. 计算力学学报, 2006, 23(2): 163-168.
SUI Yun-kang, PENG Xi-rong. ICM method with objective transformed by variable discrete condition for continuum structure[J]. Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(2): 163-168. (in Chinese)

Topological Optimization Analysis of Continuum Structure With Displacement Constraints

YE Hong-ling, SUI Yun-kang, DU Jia-zheng

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology,
Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

Abstract: The optimal topology model is established based on ICM(independent continuous mapping) methodology in order to study a topological optimization of continuum structure with displacement constraints under multiple load cases. The optimal refers to the structural mass as objective. And an explicit formulation of displacement that is of global with related to topological variables is presented by using of unit virtual load method. In addition, the dual model corresponding to the optimal model of continuum structure is solved by the serial quadratic programming. Consequently, the number of design variables is decreased and the efficiency of computation is improved. Furthermore, the present optimal model and its algorithm have been implemented by means of the MSC/Patran software platform using PCL (patran command language). Numerical examples about 2D and 3D continuum structures indicate that the method is effective and efficient.

Key words: optimization; topology; continuum structures