# 机会约束问题中的几个凸性命题*

颜 铁 成

（计算方法教研室）

## 摘 要

在随机规划中有一类所谓机会约束规划问题，其研究的主要课题之一就是约束集是否凸集，这是因为约束集是否凸集对于该规划的研究和解决具有重要的意义。本文给出了四个凸性定理，可以说它们是已有的几个定理的发展。

# Several Convexity Statements In Chance Constrained Programming Problems

Yan Tie-cheng

## Abstract

There is a kind of so called chance constrained programming problems in the field of stochastic programming. One of the main subjects of this kind of problems is whether the constrained set is convex, beause this question is of graet importance for discussing and solving that proqram. This paper gives four convexity theorems. It may be said that these theorems are a development of some other known theorems.

在随机规划中，有一类所谓机会约束问题，它的一般形式是：

极小化 $\varphi(x)$,

满足约束 $P_\omega(\omega | A(\omega)x \geqslant b(\omega)) \geqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ （1）

$x \in X$,

---

* 本文是在杨振海老师的指导下完成的。

本文于1981年5月9日收到。

或者

$$\begin{aligned} &\text{极小化} && \varphi(x), \\ &&& 0\leqslant \alpha_i \leqslant 1 \\ &\text{满足约束} && P_\omega(\omega \mid A_i(\omega)x \geqslant b_i(\omega)) \geqslant \alpha_i, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \qquad (2) \\ &&& x\in X, \end{aligned}$$

其中$\varphi(x)$是凸函数，$X$是凸集；$A(\omega)$是$m\times n$维矩阵，$A_i(\omega)$是它的第$i$行向量；$b(\omega)$是$m$维向量，$b_i(\omega)$是其第$i$个分量；$A(\omega)$，$b(\omega)$，$A_i(\omega)$，$b_i(\omega)$的元素是定义在概率空间$(\Omega,\ J,\ P_\omega)$上服从已知（联合）概率分布的随机变量或常量。

机会约束主要的问题之一是集合

$$X(\alpha)=\{x \mid P_\omega(\omega \mid A(\omega)x\geqslant b(\omega))\geqslant \alpha\}$$

或

$$X_i(\alpha)=\{x \mid P_\omega(\omega \mid A_i(\omega)x\geqslant b_i(\omega)\geqslant \alpha_i\}$$

是否凸集。目前，凸性命题的现成结果还是相当少的，主要的成绩给出了当$b(\omega)$是随机向量而$A$固定时的几个定理。本文讨论与这几个定理相平行的情况，即讨论$b$是固定常向量，$A(\omega)$中只有一列是随机向量，而其它元素固定时$X_i(\alpha_i)$及$X(\alpha)$的凸性，证明了四个定理。最后给出了定理4的一个列，它同时在一定程度上反映了机会约束问题与有约束最优化问题的联系。

**定理1.** 假定$a_i(\omega)$是随机变量，$a_{i2},\cdots,a_{in},b_i$固定，$X\subset\{x_1\geqslant 0\}$或$X\subset\{x_1\leqslant 0\}$，则对$a_i(\omega)$的任意概率分布，

$$X_i(\alpha_i)=\{x \mid P_\omega(\omega \mid a_i(\omega)x_1+a_{i2}x_2+\cdots a_{in}x_n\geqslant b_i)\geqslant \alpha_i\}$$

是凸集。

**证明** 设$F_i(\tau)$是$a_i(\omega)$的分布函数，并设$x^1,x^2\in X_i(\alpha_i)$，往证。$\hat{x}=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in X_i(\alpha_i)$，$0>\lambda>1$。

$(A)\ X\subset\{x_1\geqslant 0\}$

(i) 设$x_1^1$，$x_1^2\neq 0$，亦即$x_1^1>0$，$x_1^2>0$，则必有

$$P_\omega\Big(\omega \mid a_i(\omega)\geqslant \frac{b_i-\sum\limits_{k=2}^{n}a_{ik}x_k^j}{x_1^j}\Big)\geqslant \alpha_i,\quad j=1,2。$$

记
$$\frac{b_i-\sum\limits_{k=2}^{n}a_{ik}x_k^j}{x_1^j}=m_i^j,\qquad j=1,\ 2。\qquad (3)$$

则有
$$P_\omega(\omega \mid a_i(\omega)\geqslant m_i^j)=\int_{m_i^j}^{\infty}dF_i(t)=1-F_i(m_i^j)\geqslant \alpha_i,\ \ j=1,\ 2。$$

因 $\hat{x}=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2$，显然$\hat{x}_1>0$，故

$$\hat{m}_i \triangleq \frac{b_i - \sum_{k=2}^{n} a_{ik}\hat{x}_k}{\hat{x}_1} = \frac{b_i - \sum_{k=2}^{n} a_{ik}(\lambda x_k^1 + (1-\lambda)x_k^2)}{\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2}$$

$$= \left[\lambda x_1^1 m_i^1 + (1-\lambda)x_1^2 m_i^2\right]\frac{1}{\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2} \tag{4}$$

令
$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda x_1^1}{\lambda x_1^1 + (1-\lambda)x_1^2} \tag{5}$$

显然 $0<\tilde{\lambda}<1$，故

$$\hat{m}_i = \tilde{\lambda} m_i^1 + (1-\tilde{\lambda})m_i^2 \tag{6}$$

且
$$\hat{m}_i \leqslant \tilde{\lambda}\overline{m}_i + (1-\tilde{\lambda})\overline{m}_i = \overline{m}_i \triangleq \max(m_i^1, m_i^2)$$

由分布函数的单调性得

$$1-F_i(\hat{m}_i) \geqslant 1-F_i(\overline{m}_i) \geqslant \alpha_i$$

即 $P_\omega\left(\omega \middle| a_i(\omega) \geqslant \frac{b_i - \sum_{k=2}^{n} a_{ik}\hat{x}_k}{\hat{x}_1}\right) \geqslant \alpha_i$，亦即 $\hat{x}\in X_i(\alpha_i)$。

(ii)若 $x_1^1=0$，$x_1^2=0$，则显然 $\hat{x}\in X_i(\alpha_i)$。

(iii)若 $x_1^1=0$，$x_1^2\neq 0$，则任取 $\omega\in\Omega$，都有

$$a_i(\omega)x_1^1 + a_{i2}x_2^1 + \cdots + a_{in}x_n^1 \geqslant b_i$$

而且，任取 $\omega$，只要$a_i(\omega)x_1^2 + a_{i2}x_2^2 + \cdots + a_{in}x_n^2 \geqslant b_i$，都有

$$a_i(\omega)\hat{x}_1 + a_{i2}\hat{x}_2 + \cdots + a_{in}\hat{x}_n \geqslant \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i$$，故

$$P_\omega(\omega | a_i(\omega)\hat{x}_1 + a_{i2}\hat{x}_2 + \cdots + a_{in}\hat{x}_n \geqslant b_i) \geqslant \alpha_i$$

$$\therefore \quad \hat{x}\in X_i(\alpha_i)$$

(iv) $x_1^1\neq 0$，$x_1^2=0$，与(iii)相同。情形($A$)证毕。

(B) $X\subset\{x_1\leqslant 0\}$

利用$\hat{m}_i = \tilde{\lambda} m_i^1 + (1-\tilde{\lambda})m_i^2 \geqslant \underline{m}_i \triangleq \min(m_i^1, m_i^2)$及分布函数的单调性，不难证得定理的结论，此处不再详述。 定理1证毕。

**定理2.** 若矩阵$A$的第一列是随机向量$a(\omega)=(a_1(\omega), \cdots, a_m(\omega))^T$，其分布函数$F(Z)$是拟凹的，$Z\in R^m$，其它元素及向量$b$是固定的，则当 $X\subset\{x_1\geqslant 0\}$时，$X(\alpha)=\{x | P_\omega(\omega | Ax\leqslant b)\geqslant\alpha\}$是凸集；当 $X\subset\{x_1\leqslant 0\}$时，$X(\alpha)=\{x | P_\omega(\omega | Ax\geqslant b)\geqslant\alpha\}$ 是凸集。

**证明** 仅对第一种情况证明，因为第二种情况与第一种实际上是一回事。设$x^1$，$x^2\in X(\alpha)$，往证$\hat{x}=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in X(\alpha)$。$0<\lambda<1$。

(i) 设 $x_1^1$，$x_1^2\neq 0$。因 $x^1$，$x^2\in X(\alpha)$，有

$$P_\omega(a_i(\omega)x_1^j+a_{i2}x_2^j+\cdots+a_{in}x_n^j\leqslant b_i,\ i=1,\ 2\cdots,\ m)\geqslant\alpha,\ j=1,2。$$

仍采用定理1中(3),(4),(5)式定义的符号$m_i^1$, $m_i^2$, $\hat{m}_i$，有

$$P_\omega(a_i(\omega)\leqslant m_i^j,\ i=1,\ \cdots,\ m)\geqslant\alpha,\ j=1,\ 2。$$

记 $Z^j=m_1^j,\ \cdots,\ m_m^j)^T$，则由分布函数的定义，有

$$P_\omega(a_i(\omega)\leqslant m_i^j,\ i=1,\ \cdots m)=F(Z^j)\geqslant\alpha,\ j=1,\ 2。$$

因 $x_1^1>0$, $x_1^2>0$，故$\hat{x}_1>0$。令$\hat{Z}=(\hat{m}_1,\ \cdots,\ \hat{m}_m)^T$，由(6)式知，$\hat{Z}=\tilde{\lambda}Z^1+(1-\tilde{\lambda})Z^2$，由于$F(Z)$具有拟凹性，故

$$F(\hat{Z})=F(\tilde{\lambda}Z^1+(1-\tilde{\lambda})Z^2)\geqslant\min(F(Z^1),\ F(Z_2))\geqslant\alpha$$

即 $P_\omega(A\hat{x}\leqslant b)\geqslant\alpha$，　　故$\hat{x}\in X(\alpha)$。

(ii)对于$x_1^1$。$x_1^2$可能为零的情况，结论仍是对的，证略。　定理2证毕。

**定理3.** 设矩阵$A$的第一列是随机向量$a(\omega)=a_1(\omega),\ \cdots,\ a_m(\omega))^T$，具有如下形式的概率密度函数

$$f(x)=re^{-Q(x)},\quad x\in R^m,$$

其中$Q(x)$是凸函数，$r$是任意常数，其它元素及向量$b$是固定的，则当$X\subsetneq\{x_1\geqslant0\}$时，$X(\alpha)=\{x|P_\omega(\omega|Ax\geqslant b)\geqslant\alpha\}$是凸集。

**证明** 直接引用机会约束理论的已知定理[1]，当密度函数的表达式为$f(x)=re^{-Q(x)}$，$Q(x)$是凸函数时，概率测度$P$是对数拟凹的。由此，可进一步推出测度$P$具有拟凹性。

设$x^1$, $x^2\in X(\alpha)$，往证$\hat{x}\in X(\alpha)$。

对于$x_1^1$，$x_1^2$有时是零的情况，结论仍是明显的，不再赘述。现设$x_1^1$，$x_1^2>0$。

根据(3)，有

$$P_\omega(\omega|a_i(\omega)\geqslant m_i^j,\ i=1,\ \cdots,\ m)$$
$$=P(a_i(\omega)\geqslant m_i^j,\ i=1,\ \cdots,\ m)\geqslant\alpha,\quad j=1,\ 2。$$

令 $U=\{(a_1(\omega),\ \cdots,\ a_m(\omega))^T|a_i(\omega)\geqslant m_i^1,\ i=1,\ \cdots,\ m\}$

$V=\{(a_1(\omega),\ \cdots,\ a_m(\omega)^T|a_i(\omega)\geqslant m_i^2,\ i=1,\ \cdots,\ m\}$

由于随机向量是连续型的，所以，$U$,$V$都是$R^m$上的凸集，且$P(U)\geqslant\alpha$，$P(V)\geqslant\alpha$。取$\tilde{\lambda}=\dfrac{\lambda x_1^1}{\lambda x_1^1+(1-\lambda)x_1^2}$，则可以证明

$$\tilde{\lambda}U+(1-\tilde{\lambda})V\triangleq\{Z|Z=\tilde{\lambda}x+(1-\tilde{\lambda})y,\ x\in U,\ y\in V\}$$
$$=\{a_1(\omega)\geqslant\hat{m}_1,\ \cdots,\ a_m(\omega)\geqslant\hat{m}_m\}$$

于是根据概率测度$P$的拟凹性，得

$$P(a_i(\omega)\geqslant\hat{m}_i,\ i=1,\ \cdots,\ m)=P(\tilde{\lambda}U+(1-\tilde{\lambda})V)$$
$$\geqslant\min(P(U),\ P(V))\geqslant\alpha$$

故 $\widehat{x}\in X(\alpha)$。定理3证毕。

注：比较定理2，3，可以看到定理3的条件比定理2的条件强。如果定理3的条件满足，那么定理2的结论也成立，但反过来不行，即仅有分布函数的拟凹性，而沒有分布，即概率测度的拟凹性，定理3的结论仍不能成立。可以造出例子来说明这一点。

定理2、3说明，当$A$的某一列具有相当广泛的一类分布，例如正态分布、指数分布而其它系数及$b$固定时，如果决策集与随机向量相应的分量保持定号，即或者非负，或者非正，则对任意的 $\alpha\in[0,1]$，$X(\alpha)$ 是凸集。下面的定理说明，对于均匀分布，也有相同的结论。

**定理 4.** 设矩阵$A$的第一列是随机向量 $a(\omega)=(a_1(\omega),\cdots,a_m(\omega))^T$，它具有$m$维相互独立的联合均匀分布，其它系数及$b$固定，$X\subset\{x_1\geqslant 0\}$，则 $X(\alpha)=\{x\,|\,P_\omega(Ax\geqslant b)\geqslant\alpha\}$ 是凸集。

**证明** 设$a_i(\omega)$是区间$[\alpha_i,\ \beta_i]$上的均匀分布。当$\alpha=0$时，根据已有的定理知 $X(0)$ 是凸集[1]。下设$0<\alpha\leqslant 1$。方法仍同以前，设 $x^1$，$x^2\in X(\alpha)$，任取 $\lambda\in(0,1)$，证明 $\widehat{x}=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in X(\alpha)$。

(i)若 $x^1$，$x^2>0$，此时有 $\widehat{x}_1>0$，且

$$P_\omega(a_i(\omega)\geqslant m_i^j,\ i=1,\ \cdots,\ m)\geqslant\alpha,\qquad j=1,2。$$

①若 $m_i^j\geqslant\alpha_i$，$i=1,\ \cdots,\ m$，$j=1,2$，则 $\widehat{m}_i\geqslant\alpha_i$，且

$$P_\omega(a_i(\omega)\geqslant m_i^j,\ i=1,\cdots,m)=$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\int_{m_i^j}^{\beta_i}\frac{dt}{\beta_i-\alpha_i}=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\beta_i-d_i}\left(\beta_i-m_i^j\right)\geqslant\alpha,\ \ j=1,2。\tag{7}$$

令
$$U_i^j=\frac{1}{\beta_i-\alpha_i}\left(\beta_i-m_i^j\right),\ \ i=1,\cdots,m,\ \ j=1,2。\tag{8}$$

显然 $0<U_i^j\leqslant 1$，且 $\prod_{i=1}^{m}U_i^j\geqslant\alpha>0$，$j=1,2$。此时，

$$\frac{1}{\beta_i-\alpha_i}\left(\beta_i-\widehat{m}_i\right)=\tilde{\lambda}U_i^1+\left(1-\tilde{\lambda}\right)U_i^2\tag{9}$$

根据不等式 $\tilde{\lambda}U_i^1+(1-\tilde{\lambda})U_i^2\geqslant U_i^{1\tilde{\lambda}}U_i^{2(1-\tilde{\lambda})}$，有

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\tilde{\lambda}U_i^1+(1-\tilde{\lambda})U_i^2\right)\geqslant\left(\prod_{i=1}^{m}U_i^1\right)^{\tilde{\lambda}}\left(\prod_{i=1}^{m}U_i^2\right)^{(1-\tilde{\lambda})}\geqslant\alpha$$

故
$$P_\omega(\omega\,|\,A\widehat{x}\geqslant b)=P_\omega(a_i(\omega)\geqslant\widehat{m}_i,\ i=1,\cdots,\ m)$$

$$=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\beta_i-\alpha_i}\left(\beta_i-\widehat{m}_i\right)\geqslant\alpha\tag{10}$$

于是 $\widehat{X}\in X(\alpha)$。

②若有 $i_0$, $1\leqslant i_0\leqslant m$, 使 $m_{i_0}^1<\alpha_{i_0}$, $m_{i_0}^2<\alpha_{i_0}$，则在（7）式中积分下限应该用 $\alpha_i$ 代替，因而在（8）式中 $U_{i_0}^j=1, j=1,2$。这时必有 $\hat{m}_{i_0}<\alpha_{i_0}$，因而(9)、(10)式中$\hat{m}_{i_0}$均用$\alpha_{i_0}$代替，可以看出这样做的结果不影响 $\hat{x}\in X(\alpha)$。

③若有$i_0$，使 $m_{i_0}^1<\alpha_{i_0}$而 $m_{i_0}^2\geqslant\alpha_{i_0}$，这时$U_{i_0}^1=1$，$U_{i_0}^2\leqslant 1$则又可能出现$\hat{m}_{i_0}\geqslant\alpha_{i_0}$及$\hat{m}_{i_0}>\alpha_{i_0}$两种情形，可以证明仍有 $\hat{x}\in X(\alpha)$。若 $m_{i_0}^1\geqslant\alpha_{i_0}$ 而 $m_{i_0}^2<\alpha_{i_0}$，同样。

(ii) 对于 $x_1^1$，$x_1^2$等于零的情况，如同定理 1 的证明所示，结论仍是显然的，证略。定理 4 证毕。

下面用一个简单的例子来说明定理 4 的结果，并借此考察一下机会约束问题。

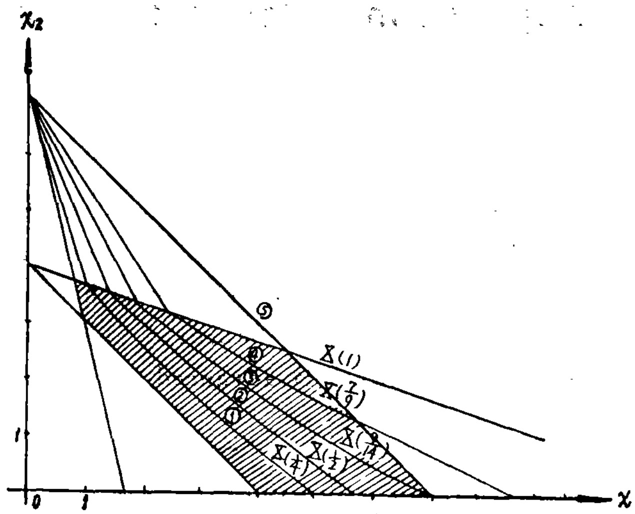
例　极小化　$\varphi(x)=x_1+x_2$

满足约束 $P\left\{(a,b)\left|\begin{array}{l}ax_1+x_2\geqslant 7\\ bx_1+x_2\geqslant 4\end{array}\right.\right\}\geqslant\alpha$

$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$

其中$(a,b)^T$是服从独立均匀分布的随机向量，其取值范围是矩形$\{(1\leqslant\xi\leqslant 4),(\frac{1}{3}\leqslant\eta\leqslant 1)\}$。

经过计算，可以看到对任意 $\alpha\in(0,1)$，$X(\alpha)$ 都是凸集，它的边缘由折线和双曲线联合构成（如图），其双曲线部分由方程 $g(x_1,x_2,\alpha)=(4-2\alpha)x_1^2+x_2^2+5x_1x_2-23x_1-11x_2+28=0$ 给出，限制在图中阴影范围内。图中①、②、③④依次是$X\left(\frac{1}{4}\right)$、$X\left(\frac{1}{2}\right)$、$X\left(\frac{9}{14}\right)$、$X\left(\frac{7}{9}\right)$的边界。当$\alpha=1$时，双曲线 $g(x_1,x_2,1)=0$ 在阴影内仅有一点（2.5，4.5），因而$X(1)$的边界就完全由折线⑤构成。




在可行集$X(\alpha)$已经得到并且已证明它是凸集的情况下，求最优解 $x_1+x_2$ 的问题就转化为通常的有约束最优化，而可以用 Kuhn-Tucker 条件解决了。

## 参 考 文 献


[1] Peter Kall, stochastic Linear Programming, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1976.

[2] 王梓坤，概率论基础及应用，科学出版社，1979.