复变函数分解定理的改进

朱如曾

朱颖

(中国科学院力学研究所, 北京, 100080)

(东南大学, 南京, 210018)

【摘要】 放宽了复变函数分解定理的条件, 给出了纯复分析的证法.

【关键词】 复变函数, 分解定理, 半解析函数

【中图分类号】 O174.5

文献 [1, 2] 给出了复变函数用半解析函数来表示的分解定理. 此定理显然比较基本. 但是定理条件要求被分解的复变函数 $f(z)$ 在所考虑的闭区域上具有一阶偏导数 Hölder 连续的性质. 本文放宽这一条件, 并且放弃文献 [1, 2] 的三维矢量场的分析方法而采用复平面上的直接论证.

1 分解定理

定理 设 G 为复平面上的有界域, 复变函数 $f(z) \in C(\bar{G}) \cap C^1(G)$, 则在 G 中成立分解式

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \tag{1}$$

式中 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 分别为第一和第二半解析函数. 在不计一个解析函数的条件下, 分解式唯一.

证明 记 G 的边界为 Γ . 在 $\bar{G}$ 上将 $f(z)$ 写为

$$f(z) = u + iv \quad (u, v \text{ 为实值函数}) \tag{2}$$

在 G 上记

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \tag{3}$$

在定理条件下, 借助格林公式的复数形式, 容易证明, 对于 $z \in G$, 有^[3]

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\eta$$

式中 $\zeta = \xi + i\eta$. 故

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi} \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

$$-\frac{i}{2\pi} \iint_G \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)}{\zeta - z} d\xi d\eta \quad (4)$$

(4)式右边第一项在 G 中是解析函数, 此外, 直接验证或利用文献[4]的定理可知, (4)式右边第二、三项分别为第一类半解析函数和第二类半解析函数. 将第一项与第二项或第三项合并得第一和第二类半解析函数, 故得(1)式.

唯一性质在文献[2]中已有证明. 证毕.

参 考 文 献

- 1 王见定. 半解析函数共轭解析函数. 北京: 北京工业大学出版社, 1988. 11
- 2 王见定. 复变函数分解定理的新证明和唯一性. 北京工业大学学报. 1991, 17(1): 60
- 3 依·涅·维库阿. 广义解析函数(上册). 北京: 人民教育出版社, 1960. 20
- 4 王见定. 积分形式的半解析函数. 北京工业大学学报. 1991, 17(4): 16

Improvement on Decomposition Theorems of Complex Functions

Zhu Ruzeng

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080)

Zhu Ying

(Southeast University, Nanjing, 210018)

【Abstract】 The applicable conditions of the decomposition theorem of complex functions are relaxed due to the proof attained from pure complex analysis.

【Key words】 complex function, decomposition theorem, semi-analytic function