Logistic分布参数的渐近置信估计（Ⅰ）

程维虎[1]，陈 冬[2]
（1. 北京工业大学 应用数理学院，北京 100022；2. 北京联合大学 基础部，北京 100101）

摘 要：利用Logistic分布简单样本的样本均值及样本方差，建立Logiatic分布位置参数及尺度参数的渐近正态估计量，进而得到分布参数的渐近置信估计.

关键词：Logistic分布；相合性；渐近正态性；区间估计
中图分类号：O 213.2 **文献标识码**：A **文章编号**：0254-0037(2001)02-0169-05

1 问题的提出

设Logistic总体的分布函数

$$F(x)=1/[1+\exp(-(x-\mu)/\sigma),\quad -\infty<x<\infty \tag{1}$$

其中：$-\infty<\mu<\infty,\sigma>0$为常数，分别称为分布的位置参数和尺度参数．由式(1)得总体的分布密度函数

$$f(x)=\frac{\exp(-(x-\mu)/\sigma)}{\sigma[1+\exp(-(x-\sigma)/\sigma]^2},\quad -\infty<x<\infty \tag{2}$$

由式(2)可知，总体的各阶矩存在，且均值为μ，方差为$(\pi^2\sigma^2)/3$.

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自Logistic总体的一个简单样本，其总体的分布函数由式(1)给出，记

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 \tag{3}$$

分别为样本均值及样本方差.

由大数定律知$\overline{X}_n$和S_n^2分别为μ与$(\pi^2\sigma^2)/3$的相合估计．由中心极限定理知$[\sqrt{3n}(\overline{X}_n-\mu)]/(\pi\sigma)$渐近于标准正态分布$N(0,1)$．利用上述结果及Slutsky定理，可导出$[\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)]/S_n$与$[\sqrt{5n}(\sqrt{3}S_n-\pi\sigma)]/(2\pi\sigma)$分别渐近于标准正态分布$N(0,1)$，其中$S_n=\sqrt{S_n^2}$．于是，利用样本均值$\overline{X}_n$、样本方差$S_n^2$，可构造Logistic分布位置参数$\mu$、尺度参数$\sigma$的渐近置信估计.

2 基本引理

欲构造Logistic分布位置参数及尺度参数的渐近正态估计，首先要计算总体分布的四阶中心矩及S_n^2的方差.

引理1 设随机变量X的分布密度由式(2)给出，则X的四阶中心矩

$$E[X-E(X)]^4=(7/15)\pi^4\sigma^4 \tag{4}$$

证 由式(2)及$E(X)=\mu$，得

$$E[X-E(X)]^4=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-\mu)^4\exp(-(x-\mu)/\sigma)}{\sigma[1+\exp(-(x-\mu)/\sigma]^2}\,dx=\quad (令(x-\mu)/\sigma=y)$$

收稿日期：2000-08-28.
基金项目：北京市优秀青年骨干基金资助项目.

$$\sigma^4\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y^4 e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}\,dy = \quad (\text{利用}\frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}\text{是}\,y\,\text{的偶函数})$$

$$2\sigma^4\int_0^{\infty}\frac{y^4 e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}\,dy = \quad (\text{利用}\,y>0\,\text{时}\frac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{-ny})$$

$$2\sigma^4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\int_0^{\infty}y^4 e^{-ny}dy = \quad (\text{利用分布积分})$$

$$48\sigma^4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$$

类似可得 $\mathrm{Var}(X)=E[X-E(X)]^2=4\sigma^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

分别将 x^2 和 x^4 在 $[0,\pi]$ 上按余弦展开，并注意到它们的余弦展式在 $[0,\pi]$ 上分别收敛到 x^2 和 x^4，得

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx,\quad x\in[0,\pi]$$

$$x^4=\frac{\pi^4}{5}-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}\cos nx,\quad x\in[0,\pi]$$

再令 $x=0$，得

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{3},\quad 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{15}$$

于是 $$\mathrm{Var}(X)=E[X-E(X)]^2=(\pi^2\sigma^3)/3,\quad E[X-E(X)]^4=(7\pi^4\sigma^4)/15 \tag{5}$$

注意到，利用证明引理1相同的办法，可得随机变量 X 的各阶中心矩的级数表示

$$E[X-E(X)]^m=\begin{cases}0 & m=1,3,5,\cdots\\ 2\sigma^m m!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^m}, & m=2,4,6,\cdots\end{cases} \tag{6}$$

当 m 为偶数，且 $m\geq 6$ 时，分别将 $x^2,x^4,\cdots,x^m$ 在 $[0,\pi]$ 上按余弦展开，并注意到它们的余弦展式在 $[0,\pi]$ 上分别收敛到 $x^2,x^4,\cdots,x^m$，可知上述每个余弦展示在 $x=0$ 处均收敛到0. 基于此，可得随机变量 X 的 m 阶中心矩. 从而，可得随机变量 X 的各阶中心矩.

引理2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为随机变量 X 的一个简单样本，X 的分布密度由式(2)给出，记 S_n^2 为样本方差，则 S_n^2 的方差为

$$\mathrm{Var}(S_n^2)=\frac{\pi^4\sigma^4}{45n}\left[21-\frac{5(n-3)}{n-1}\right] \tag{7}$$

证 由文献[1]例5的结果和式(5)，得

$$\mathrm{Var}(S_n^2)=\frac{1}{n}E[X-E(X)]^4-\frac{n-3}{n(n-1)}E[X-E(X)]^2=$$

$$\frac{7\pi^4\sigma^4}{15n}-\frac{(n-3)\pi^4\sigma^4}{9n(n-1)}=\frac{\pi^4\sigma^4}{45n}\left[21-\frac{5(n-3)}{n-1}\right]$$

欲构造Logistic分布位置参数及尺度参数的渐近置信估计，还需了解如下引理.

引理3 设 $\{Z_n\}$，$\{U_n\}$ 是两个随机变量序列，Z 为随机变量，c 为常数

$$Z_n\xrightarrow{L}Z(\text{依分布收敛}),\quad U_n\xrightarrow{P}c(\text{依概率收敛})$$

则有

1) $Z_n+U_n\xrightarrow{L}Z+c$;

2) $U_nZ_n\xrightarrow{L}cZ$;

3) $Z_n / U_n \xrightarrow{L} Z / c$, 当 $c \neq 0$ 时.

证 引理 3 为 Slutsty 定理, 证明可参见文献 [2] 第 42 页 (定理 1.5 的证明).

引理 4 设参数定间 Θ 是欧氏空间 R^k 的一个子集, $\tilde{\Theta}$ 为 R^k 的开子集, $\tilde{\Theta} \supset \Theta$, $g(\theta)$ 为定义在 $\tilde{\Theta}$ 上的实值连续函数. 若统计量 $T_n \xrightarrow{P} \theta$, 则 $g(T_n) \xrightarrow{P} g(\theta)$.

注: 此引理为文献 [3] 的定理 4.1, 证明可参见文献 [3].

3 分布参数的渐近置信估计

由上述引理, 可推出如下结果.

定理 1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为随机变量 X 的一个简单样本, X 的分布密度由式 (2) 给出, 记 S_n^2 为样本方差, 则有

$$\frac{\sqrt{5n}\,(3S_n^2 - \pi^2\sigma^2)}{4\pi^2\sigma^2} \xrightarrow{L} N(0,1) \tag{8}$$

证 记 $\gamma^2 = \mathrm{Var}[(X_1-\mu)^2]$, $\gamma = \sqrt{\gamma^2}$, 由引理 1 的式 (5), 有

$$\gamma^2 = E[X_1 - E(X_1)]^4 - [\mathrm{Var}(X_1)]^2 = \frac{7\pi^4\sigma^4}{15} - \frac{\pi^4\sigma^4}{9} = \frac{16\pi^4\sigma^4}{45}$$

且

$$\frac{\sqrt{5n}\,(3S_n^2 - \pi^2\sigma^2)}{4\pi^2\sigma^2} = \frac{S_n^2 - \pi^2\sigma^2/3}{\gamma/\sqrt{n}} = \frac{n}{n-1}\,\frac{T_n - (n-1)\pi^2\sigma^2/3}{\gamma\sqrt{n}}$$

其中

$$T_n = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2 - \frac{\pi^2\sigma^2}{3n}\right] - n(\overline{X}_n - \mu)^2 + \frac{\pi^2\sigma^2}{3}$$

令

$$R_n = -n(\overline{X}_n - \mu)^2 + \frac{\pi^2\sigma^2}{3},\quad G_n = \sum_{i=1}^{n} g(X_i),\quad g(X_i) = (X_i-\mu)^2 - \frac{\pi^2\sigma^2}{3n};\quad i = 1,2,\cdots,n$$

有 $T_n = G_n + R_n$. 对 R_n 记 $U_n = |R_n/\sqrt{n}|$, 其分布函数记为 $F_n(u)$, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 均有

$$P\{|R_n/\sqrt{n}| \geqslant \varepsilon\} = P\{U_n \geqslant \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}F_n(u) \leqslant \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{u}{\varepsilon}\,\mathrm{d}F_n(u) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\infty} u\,\mathrm{d}F_n(u) = \frac{E(U_n)}{\varepsilon}$$

而

$$E(U_n) = E\left|\frac{R_n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \sqrt{n}\,E(\overline{X}_n - \mu)^2 + \frac{\pi^2\sigma^2}{3\sqrt{n}} = \frac{2\pi^2\sigma^2}{3\sqrt{3}} \longrightarrow 0\ (n \to \infty)$$

于是, 有 $R_n/\sqrt{n} \longrightarrow 0$. 另外, 因 $g(X_1), g(X_2), \cdots, g(X_n)$ 是独立同分布的随机变量, 且

$$E[g(X_1)] = \frac{(n-1)\pi^2\sigma^2}{3n},\quad \mathrm{Var}[g(X_1)] = \gamma^2 < \infty$$

由中心极限定理, 有

$$\frac{G_n - (n-1)\pi^2\sigma^2/3}{\gamma\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

由引理 3, 可得

$$\frac{T_n - (n-1)\pi^2\sigma^2/3}{\gamma\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

从而

$$\frac{S_n^2 - \pi^2\sigma^2/3}{\gamma/\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0,1)$$

即

$$\frac{\sqrt{5n}\,(3S_n^2-\pi^2\sigma^2)}{4\pi^2\sigma^2}\xrightarrow{L}N(0,1)$$

由定理 1,可知 S_n^2有渐近分布 $N(\pi^2\sigma^2/3,\gamma^2/n)$,从而可得$\sigma^2$的渐近置信估计.

推论 1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$为随机变量 X的一个简单样本,X的分布密度由式(2)给出. 记 S_n^2为样本方差,则对给定的置信水平 $0<\alpha<1$,σ^2的置信度为 $1-\alpha$的渐近置信区间为

$$\left[\frac{3S_n^2}{\pi^2}\left(1+\frac{4Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}\right)^{-1},\ \frac{3S_n^2}{\pi^2}\left(1-\frac{4Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}\right)^{-1}\right] \tag{9}$$

其中:$Z_{\alpha/2}$为标准正态分布的上$\alpha/2$分位点,即$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{Z_{\alpha/2}}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}$.

证 由定理 1,可知$\frac{\sqrt{5n}\,(3S_n^2-\pi^2\sigma^2)}{4\pi^2\sigma^2}$依分布收敛于标准正态分布 $N(0,1)$. 于是,对给定的置信水平 $0<\alpha<1$,当 n 较大时,有

$$P\left\{-Z_{\alpha/2}\leqslant\frac{\sqrt{5n}\,(3S_n^2-\pi^2\sigma^2)}{4\pi^2\sigma^2}\leqslant Z_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha$$

当 n 较大时,有$\frac{4Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}<1$,且 $-Z_{\alpha/2}\leqslant\frac{\sqrt{5n}\,(3S_n^2-\pi^2\sigma^2)}{4\pi^2\sigma^2}\leqslant Z_{\alpha/2}$的充要条件为

$$\frac{3S_n^2}{\pi^2}\left(1+\frac{4Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}\right)^{-1}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{3S_n^2}{\pi^2}\left(1-\frac{4Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}\right)^{-1}$$

于是,有

$$P\left\{\frac{3S_n^2}{\pi^2}\left(1+\frac{4Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}\right)^{-1}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{3S_n^2}{\pi^2}\left(1-\frac{4Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}\right)^{-1}\right\}\approx 1-\alpha$$

即 σ 的置信度为 $1-\alpha$ 的渐近置信区间可由式(9)表示.

定理 2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$为随机变量 X的一个简单样本,X的分布密度由式(2)给出. 记$\overline{X}_n$为样本均值,S_n^2为样本方差,$S_n=\sqrt{S_n^2}$,则有

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n-\mu)}{S_n}\longrightarrow N(0,1) \tag{10}$$

证 首先,对任给的$\varepsilon>0$,由 $E(S_n^2)=(\pi^2\sigma^2)/3$ 及引理 2,利用切比雪夫 (Cebyshev)不等式,有

$$P\left\{\left|S_n^2-\frac{\pi^2\sigma^2}{3}\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\frac{\mathrm{Var}(S_n^2)}{\varepsilon^2}=\frac{\pi^4\sigma^4}{45\varepsilon^2 n}\left[21-\frac{5(n-3)}{n-1}\right]\to(n\to\infty)$$

从而,$S_n^2\longrightarrow(\pi^2\sigma^2)/3$. 由此结论及引理 4,可知

$$S_n\longrightarrow(\pi\sigma)/\sqrt{n}\text{ 及 }(\pi\sigma)/\sqrt{3S_n}\longrightarrow 1$$

其次,由中心极限定理,可知$[\sqrt{3n}\,(\overline{X}_n-\mu)]/(\pi\sigma)\xrightarrow{L}N(0,1)$. 再由引理 3,得

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n-\mu)}{S_n}=\frac{\sqrt{3n}\,(\overline{X}_n-\mu)}{\pi\sigma}\,\frac{\pi\sigma}{\sqrt{3}\,S_n}\xrightarrow{L}N(0,1)$$

由定理 2,可得μ的渐近置信估计.

推论 2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$为随机变量 X的一个简单样本,X的分布密度由式(2)给出. 记 $\overline{X}_n$为样本值,S_n^2为样本方差,$S_n=\sqrt{S_n^2}$,则对给定的置信水平 $0<\alpha<1$,μ的置信度为 $1-\alpha$的渐近置信区间为

$$\left[\overline{X}_n-\frac{S_nZ_{\alpha/2}}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_n+\frac{S_nZ_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right] \tag{11}$$

定理 3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$为随机变量 X的一个简单样本,X的分布密度由式(2)给出. 记 S_n^2为样本方

差，$S_n=\sqrt{S_n^2}$，则

$$\frac{\sqrt{5n}\,(\sqrt{3}\,S_n-\pi\sigma)}{2\pi\sigma}\xrightarrow{L}N(0,1) \tag{12}$$

证 在定理2中已证得 $S_n\xrightarrow{P}\frac{\pi\sigma}{\sqrt{3}}$，利用此结论，亦可得

$$\frac{2\pi\sigma}{\sqrt{3}\,S_n+\pi\sigma}\xrightarrow{P}1$$

再由定理1及引理3，得

$$\frac{\sqrt{5n}\,(\sqrt{3}\,S_n-\pi\sigma)}{2\pi\sigma}=\frac{2\pi\sigma}{\sqrt{3}\,S_n+\pi\sigma}\,\frac{\sqrt{5n}\,(3S_n^2-\pi^2\sigma^2)}{4\pi^2\sigma^2}\xrightarrow{L}N(0,1)$$

由定理3，可得σ的渐近置信估计.

推论3 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为随机变量X的一个简单样本，X的分布密度由式(2)给出．记S_n^2为样本方差，$S_n=\sqrt{S_n^2}$，则对给定的置信水平$0<\alpha<1$，σ的置信度为$1-\alpha$的渐近置信区间为

$$\left[\frac{\sqrt{3}\,S_n}{\pi}\left(1+\frac{2Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}\right)^{-1},\ \frac{\sqrt{3}\,S_n}{\pi}\left(1-\frac{2Z_{\alpha/2}}{\sqrt{5n}}\right)^{-1}\right] \tag{13}$$

参考文献：

[1] 孙山泽．非参数统计讲义[M]．北京：北京大学出版社，2000．32．

[2] 茆诗松．高等数理统计[M]．北京：高等教育出版社，1998．42．

[3] 陈希孺．高等数理统计学[M]．北京：中国科学技术大学出版社，1999．136．

The Asymptotic Confidence Estimation of Logistic Distribution Parameter(Ⅰ)

CHENG Wei-hu[1]，CHEN Dong[2]

(1. College of Applied Sciences，Beijing Polytechnic University，Beijing 100022，China；

2. Department of Basic Sciences，Beijing Union University，Beijing 100101，China)

Abstract: The asymptotic normal estimation of location parameter and scale parameter is proposed by sample mean and sample variance of Logistic distribution simple sample. Then the asymptotic confidence estimation of the parameter is given for Logistic distribution.

Key words: Logistic distribution；consistency；asymptotic normality；interval estimation