

# 正交异性圆柱壳受冲扭联合作用的 弹性波传播

吴 斌

(北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 北京, 100022)

韩 强 杨桂通

(太原工业大学应用力学研究所, 太原, 030024)

**摘 要** 给出了计及剪切变形和转动惯性的正交异性圆柱壳的轴对称运动方程的量纲一的形式. 应用广义特征线理论得到了沿特征线上的相容方程, 并采用数值积分计算了受轴向冲击和扭转联合作用下有限长圆柱壳的波传问题. 该方法适于更为复杂的模型.

**关键词** 圆柱壳, 弹性波, 正交异性, 广义特征线法

**分类号** O347.4

研究结构中弹性波传播的问题是弹性动力学的一个重要分支. 文献 [1, 2] 分别用 Laplace 变换法和摄动法研究了半无限长薄膜型圆柱壳端部受轴向扰动时轴对称弹性波的传播问题. 滕宁钧<sup>[3]</sup> 等人用广义射线法研究了 Timoshenko 型圆柱壳受轴对称冲击载荷作用时的弹性瞬态波的传播和反射过程. Spillers<sup>[4]</sup> 用特征线法研究了 Timoshenko 型半无限长圆柱壳给定初始质点速度下的弹性波传播问题. 李永池<sup>[5]</sup> 用特征线法研究了正交各向异性复合材料板斜绕的薄壁管在拉扭联合作用下的应力波传播. 吴斌<sup>[6]</sup> 用特征线法研究了正交各向异性复合材料圆柱壳受冲击载荷作用的弹性波传播, 并与滕宁钧的结果进行了对比.

本文以中面位移、转角和内力合量为独立变量, 运用广义特征线理论, 给出了正交异性复合材料 Timoshenko 型圆柱壳受轴对称冲击载荷作用的弹性波传播数值计算模型, 并以广义特征线理论研究了有限长圆柱壳受轴对称冲击载荷和冲击扭矩联合作用时的弹性瞬态波的传播和反射过程.

## 1 基本理论

我们采用广义变分原理, 推导了一组包括剪切变形和转动惯性效应的受轴对称荷载作用壳体运动方程. 具体如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial x} &= \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial x} + \frac{Q_2}{R} &= \rho h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{N_{22}}{R} &= \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - Q_1 &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial x} - Q_2 &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中,  $\rho$  为材料密度,  $h$  为壳体的厚度,  $R$  为壳体中面的半径,  $U(x, t)$ 、 $V(x, t)$ 、 $W(x, t)$ 、 $\psi_1(x, t)$ 、 $\psi_2(x, t)$  分别为壳体中面的轴向位移、径向位移和壳中面变形前直法线的转角;  $x$  为轴向坐标,  $t$  为时间. 正交异性材料壳体的物理方程为:

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= hD_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + hD_{12} \frac{W}{R} \\ N_{12} &= hG_{12} \frac{\partial V}{\partial x} \\ N_{22} &= hD_{22} \frac{W}{R} + hD_{21} \frac{\partial U}{\partial x} \\ Q_1 &= k_1 hG_{13} \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \psi_1 \right) \\ Q_2 &= k_2 hG_{23} \left( \psi_2 - \frac{V}{R} \right) \\ M_{11} &= \frac{h^3 D_{11}}{12} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ M_{12} &= \frac{h^3 G_{12}}{12} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \gamma_{12} \cdot \gamma_{12} \gamma_{21}} \\ D_{12} = D_{21} &= \frac{\gamma_{21} E_{22}}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} = \frac{\gamma_{12} E_{11}}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} \\ D_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}} \end{aligned}$$

$E_{11}$ 、 $E_{22}$  为沿  $x$ 、 $\theta$  方向的弹性模量,  $\gamma_{12}$ 、 $\gamma_{21}$  为相应的 Poisson 比,  $G_{13}$ 、 $G_{23}$  为横向剪切弹性模量,  $k_1$ 、 $k_2$  为折减系数.

为研究方便, 将(1)、(2)式化成量纲一的形式, 令:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{u} &= \dot{U} / c, \quad \dot{v} = \dot{V} / c, \quad \dot{w} = \dot{W} / c, \quad \omega_\zeta = \dot{\psi}_2 a / c, \quad \tau = ct / a \\
 \zeta &= x / a, \quad n_\zeta = \frac{N_{11}}{D_{11} h}, \quad n_\theta = \frac{N_\theta}{D_{11} h}, \quad n_{\zeta\theta} = \frac{N_{12}}{D_{11} h}, \quad q_\zeta = \frac{Q_1}{D_{11} h}, \quad q_\theta = \frac{Q_2}{D_{11} h} \\
 m_\zeta &= \frac{M_{11}}{D_{11} h^2}, \quad m_{\zeta\theta} = \frac{M_{12}}{D_{11} h^2}, \quad c = \sqrt{D_{11} / \rho}, \quad \alpha_1 = \frac{D_{12}}{D_{11}}, \quad \alpha_2 = \frac{k_1 G_{13}}{D_{11}} \\
 \alpha_3 &= \frac{D_{22}}{D_{11}}, \quad \alpha_4 = \frac{G_{12}}{D_{11}}, \quad \alpha_5 = \frac{k_2 G_{23}}{D_{11}}, \quad \beta_1 = a / R, \quad \beta_2 = 1 / h
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中， $a$  为特征长度，可选圆柱壳的长度或半径。代入(1)、(2)式中，得如下矩阵形式：

$$W_\tau - A^\zeta W_\zeta - B = 0 \quad (4)$$

其中， $W_\tau$ 、 $W_\zeta$  分别表示对  $\tau$ 、 $\zeta$  的导数， $A^\zeta$  为系数矩阵， $W$  为广义速度、内力合向量表示的向量， $B$  为向量。其形式为：

$$W = [\dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w} \ \omega_\zeta \ \omega_\theta \ n_\zeta \ n_{\zeta\theta} \ n_\theta \ q_\zeta \ q_\theta \ m_\zeta \ m_{\zeta\theta}]^T \quad (5)$$

$$B = [0 \ \beta_1 q_\theta - \beta_1 n_\theta - 12\beta_2^2 q_\zeta - 12\beta_2^2 q_\theta \alpha_4 \beta_1 w \ 0 \ \alpha_3 \beta_1 w \ \alpha_2 \omega_1 \ \alpha_5 (\omega_2 - \beta_1 v) \ 0 \ 0]^T \quad (6)$$

$A^\zeta$  表达式为：

$$A^\zeta = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\beta_2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12\beta_2 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12\beta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_4}{12\beta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (7)$$

根据广义特征线理论：

$$\det |\lambda I + A^\zeta| = 0 \quad (8)$$

解之，得特征根  $\lambda$  为：

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= \pm 1 = \pm c_1, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\alpha_4} = \pm c_{s2}, \quad \lambda_{5,6} = \pm \sqrt{\alpha_2} = \pm c_{s1} \\
 \lambda_{7,8} &= \pm 1 = \pm c_1, \quad \lambda_{9,10} = \pm \sqrt{\alpha_4} = \pm c_{s2}, \quad \lambda_{11} = \lambda_{12} = 0
 \end{aligned} \quad (9)$$

则沿特征线上的相容方程为：

$$\left. \begin{aligned}
 & -c_1 d\dot{u} + dn_\zeta = \alpha_1 \beta_1 \dot{w} d\tau \\
 & c_1 d\dot{u} + dn_\zeta = \alpha_1 \beta_1 \dot{w} d\tau \\
 & -c_{s2} d\dot{v} + dn_{\zeta\theta} = -c_{s2} \beta_1 q_\theta d\tau \\
 & c_{s2} d\dot{v} + dn_{\zeta\theta} = c_{s2} \beta_1 q_\theta d\tau \\
 & -c_{s1} d\dot{w} + dq_\zeta = c_{s1} \beta_1 n_\theta d\tau + \alpha_2 \omega_1 d\tau \\
 & c_{s1} d\dot{w} + dq_\zeta = -c_{s1} \beta_1 n_\theta d\tau + \alpha_2 \omega_1 d\tau \\
 & -c_1 d\omega_1 + 12\beta_2 d m_\zeta = 12\beta_2^2 q_\zeta c_1 d\tau \\
 & c_1 d\omega_1 + 12\beta_2 d m_\zeta = -12\beta_2^2 q_\zeta c_1 d\tau \\
 & -c_{s2} d\omega_2 + 12\beta_2 d m_{\zeta\theta} = 12\beta_2^2 q_\theta c_{s2} d\tau \\
 & c_{s2} d\omega_2 + 12\beta_2 d m_{\zeta\theta} = -12\beta_2^2 q_\theta c_{s2} d\tau \\
 & -\alpha_1 dn_\zeta + dn_\theta = \beta_1 (\alpha_3 - \alpha_1^2) \dot{w} d\tau \\
 & dq_\theta = \alpha_5 (\omega_2 - \beta_1 \dot{v}) d\tau
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

## 2 数值方法与计算结果

设在 $\zeta - \tau$ 平面, 弹性波沿特征线传播规律及相应的差分网格见图 1.

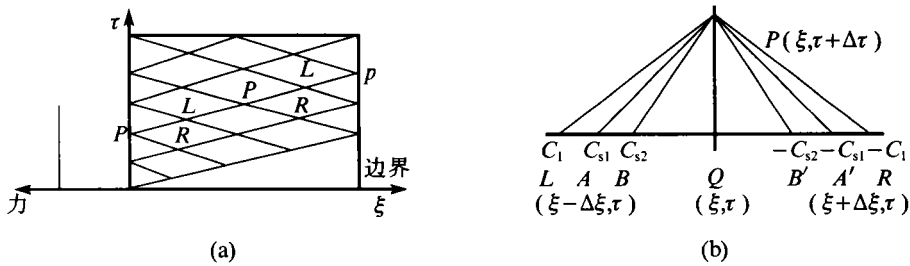


图1 弹性波传播及差分网格示意图

将(10)式沿其特征线积分, 可得域内一点  $P$  物理量. 为方便起见, 我们把图中  $A$ 、 $B$  及  $A'$ 、 $B'$  点的物理量用  $L$ 、 $R$ 、 $Q$  差分点的物理量线性插值来描述. 积分后可写成如下的矩阵形式:

$$aW_P = bW_Q + cW_L + dW_R \quad (11)$$

其中,  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  为  $12 \times 12$  系数矩阵, 下标表示图中的差分点的物理量,  $W$  定义与(5)式一致. 若  $a$  有逆, (11)式便可求解. 在壳体的两端边界, 计算用右行特征线和左行特征线来确定.

以下我们给出一端为自由端加轴向冲击载荷, 另一端为固支的算例. 按下述参数计算:

$$E_{11} = 6.8599 \times 10^8 \text{ N} / \text{M}^2, \quad E_{22} = 2.0799 \times 10^8 \text{ N} / \text{M}^2,$$

$$G_{12} = G_{23} = G_{13} = 0.7958 \times 10^8 \text{ N} / \text{M}^2$$

$$\gamma_{12} = 0.04, \quad \gamma_{21} = 0.131926, \quad k_1 = k_2 = 0.83, \quad L = 0.4 \text{ M}, \quad a = R = 0.02 \text{ M}, \quad h = 0.002 \text{ M}$$

$$NN = 101, \quad JJ = 401, \quad \bar{p} = 10000 \text{ N}, \quad m = 20000 \text{ NM} \quad (12)$$

图 2 给出了轴向速度  $\dot{u}$  随时间变化的时程曲线. 在加载端  $\zeta = 0$  处质点的速度在反射之前保持一定值 ( $\dot{u} = 0.3$ ), 而当  $\tau \geq 20$  时在端部发生反射, 质点速度发生跃变. 对于  $\zeta = 5$  的点, 质点受到扰动的时间要滞后一定的时间, 且在研究的范围内接受了固定端和加载端的两次反射信息, 而  $\zeta = 10$  为固定端, 其质点速度恒为零.

图 3 是轴向力随时间变化的时程曲线. 由图 2 可知:  $\zeta = 0$  处给定了加载的大小, 它在传播过程中保持不变, 而  $\zeta = 5$  的位置则在时间为  $\tau = 5$  时被激发, 随后保持到  $\tau = 15$  时与反射波作用时轴力加倍. 而反射后的波形并不平直, 呈波浪形. 这是由于沿轴向特征线上的相容方程中  $\dot{w}$  影响的结果. 而其波幅变化的大小取决于  $\beta_1$ 、 $C_{s1}$ 、 $\alpha_1$  及  $\alpha_3$  等参数的选取. 其整个传播过程与一维纵波传播类似.

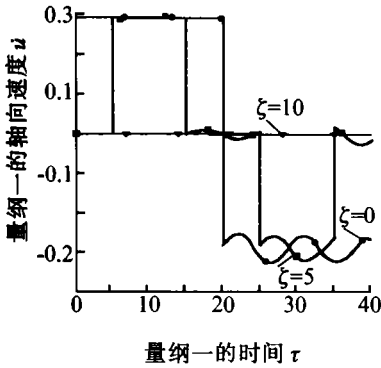


图2 轴向速度  $\dot{u}$  时程曲线

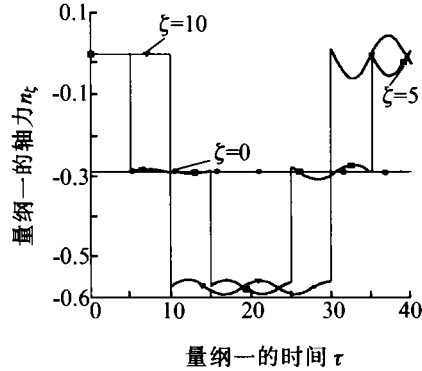


图3 轴向力  $n_{\zeta}$  时程曲线

图 4 为弯矩  $m_{\zeta}$  随时间变化的时程曲线. 由于弯曲波和剪力  $q_{\zeta}$  是相互耦合的, 在固支端的弯矩随时间增大, 其影响最明显.

图 5 为环向速度  $\dot{v}$  随时间变化的时程曲线. 图中环向质点波速比纵向波速慢, 且基本上波形无衰减.  $\zeta = 7.5$  的位置上有反射波作用, 使波形有明显的变化.

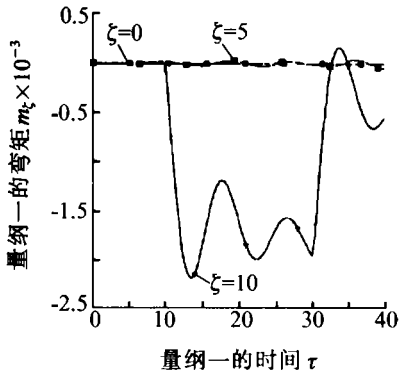


图4 弯矩  $m_{\zeta}$  时程曲线

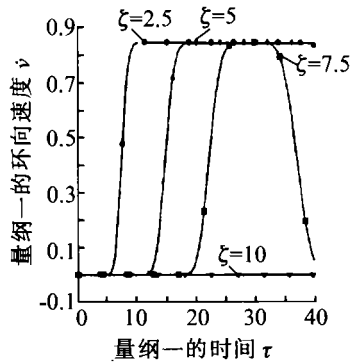
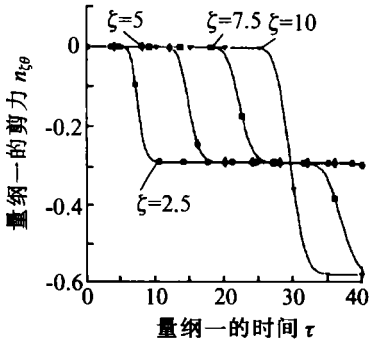
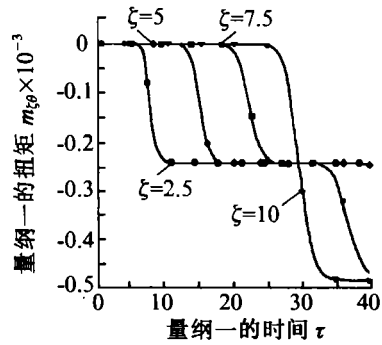


图5 环向速度  $\dot{v}$  的波形曲线

图 6 为剪力  $n_{z0}$  随时间变化的时程曲线. 剪力经反射后其数值加倍, 与纵波在固支端反射情况类似, 但传播速度要慢于纵波波速.

图 7 为扭矩  $m_{z0}$  随时间变化的时程曲线. 其传播过程和剪力的传播大致相同.

图6 剪力  $n_{c\theta}$  的时程曲线图7 扭矩  $m_{c\theta}$  时程曲线

### 3 结论

1) 本文给出了 Timoshenko 型正交异性圆柱壳受轴对称轴向冲击与扭矩作用的波动模型, 并给出沿特征线上的相容方程。

2) 给出了正交异性圆柱壳受冲击载荷与冲击扭矩作用下的计算结果。由于给出的正交异性方向与坐标方向重合, 且从(10)式可以看出: 轴向冲击加载与冲击扭矩联合作用下对几种物理量弹性波传播的规律是不耦合的, 因而轴向加载与扭转联合作用的传播规律可以看各自单独作用下的规律迭加起来即可。

3) 冲击扭矩作用下剪力随时间的变化规律与纵波模型类似, 经固定端反射后剪力加倍, 此处为材料最易破坏的地方。

4) 扭转波速较纵波波速慢, 且波形保持不变, 没有弥散, 这与冲击载荷作用下的弯曲波是不同的。

5) 就轴力而言, 与一维杆的传波特性相类似, 且与各向同性壳体的波动特性类似, 但随参数的改变, 峰值上有波浪产生, 波型有差异。

### 参 考 文 献

- 1 Berkowitz H M. Longitudinal impact of a semi-infinite elastic cylindrical shell. Journal of Applied Mechanics. Trans of ASME, 1963, 30(3): 347~355
- 2 Geers T L. Analysis of wave propagation in elastic cylindrical shells by the perturbation method. J Appl Mech ASME, 1972, 39(2): 385~389
- 3 滕宁钧, 苏先榭, 王仁. 有限长圆柱壳中轴对称弹性瞬态波. 力学学报, 1992, 24(6): 680~690
- 4 Sillers W R. Wave Propagation in a thin cylindrical shell. J Appl Mech, 1965, 32(2): 346~350
- 5 李永池. 复合材料薄壁管中的波传播. 复合材料学报, 1988, 5(2): 1~10
- 6 吴斌. 有限长正交异性圆柱壳的弹性波传播. 现代力学与科技进步. 北京: 清华大学出版社, 1997. 1190~1193

1983

- 5 Gill P E, Murry W. Newton type methods for linealy constrained optimization, London: Academic Press, 1974
- 6 Gill P E, Murry W, Wright M H. Practicol optimization, Academic Press, 1981

## An Algorithm for Solving Quadratic Programming

Gao Lüduan Yang Zhonghua

( Department of Applied Mathematics, Beijing Polytechnic University, Beijing, 100022 )

**Abstract** A new algorithm for solving quadratic programming with equality constraints is proposed, and the solving method is discussed for the case in which an equality constraint is added or deleted. This new algorithm together with the discussion fulfils the requirement of the active set method.

**Keywords** quadratic programming, active set method, equality constraint

---

上接第28页

## Action of Axial Impact and Torsion

Wu Bin

( College of Mechanical Engineering and Applied Electronic Technology,  
Beijing Polytechnic University, Beijing, 100022 )

Han Qiang Yang Guitong  
( Taiyuan Polytechnic University, Taiyuan, 030024 )

**Abstract** Upon the theory of generalized characteristic curves, the non-dimensional kinematic equations for the motion of an orthogonal anisotropy circular cylindrical shell under axial impact are derived including the shear deformation and rotary inertia effect. The wave propagation problem of a cylindrical shell with finite length, acted by both axial impact and torsion, is calculated through numerical integration. The method in question is applicable to even more complicated model.

**Keywords** cylindrical shell, elastic wave, orthogonal anisotropy, method of generalized characteristic curves