

二维层流边界层流动方程解的一个数值探讨

马新胜 伍时桂

(热能工程系)

摘 要

本文讨论了拟线性化方法在求解定常二维层流边界层方程中的应用,并采用有限差分将Falkner—Skan方程的边值问题化为数值方程计算,避免了使用传统的初值方法求解该方程的困难。数值比较表明,拟线性化数值解的结果和文献中的Evans准确解是相当满意地一致。

A Numerical Approach to the Solution of Two Dimensional Laminar Boundary Layer Equations

Ma Xing-sheng Wu Shi-gui

Abstract

This paper discussed the application of Quasi-Linearized Method in solving the two dimensional steady laminar boundary layer equations. To avoid the difficulty caused due the use of the initial value method, the boundary value problem of Falkner-Skan equation was reduced to the numerical equations by means of the finite difference method. The results obtained by the present method were compared with the accurate solution by Evans. It was shown that both results are satisfactorily consistent.

一、引 言

1904年, Prandtl 提出了著名的层流边界层理论^[1]。这个理论的出现, 不仅使得很多大雷诺数的流动问题可以加以简化和分析, 而且大大地促进了粘性流体力学的发展和在工程技术上的广泛应用。

Prandtl 的二维层流边界层方程是一组非线性的偏微分方程, 但在某些定常流动情况下, 可用相似性的方法化为常微分方程来求解。Prandtl 的学生之一 Blasius 在 1908 年首先用此方法求解了绕平板的定常层流。后来 Hiemenz (1911) 求解了驻点流动, Pohlhausen

(1921) 求解了收敛渠道流动, 而 Falkner-Skan (1931) 则研究了更一般的楔形流动。无论如何, 前三种流动总可以作为后一种流动的特殊情况, 因而这里仅讨论 Falkner-Skan 相似解方程^{[1]、[2]}, 其定解问题可描述为

$$\left. \begin{aligned} f'''' + ff'' + \beta(1-f'^2) &= 0 \\ f(0) = f'(0) &= 0, \quad f'(\infty) = 1 \end{aligned} \right\}$$

式中 f 相当于无量纲流函数, β 是控制外流压力梯度的参数。

这是一个三阶非线性常微分方程的边值问题。形式上虽然简单, 但数学上仍然得不出解析解。常规的数值计算方法通常都是用尝试法求解。就是说, 另外假定一个边界条件 $f''(0) = \alpha$, 使其变为初值问题, 这样就可用 Runge-Kutta 方法等求解这一初值问题。以后, 只需迭代修正 α , 使其满足 $f'(\infty) = 1$ 。

为了避免估算所缺少的初值 $f''(0)$ 而引起的困难, 本文探讨了一个用拟线性化和有限差分相结合的方法来直接求解这种非线性常微分方程的边值问题。并以一般形式的 Falkner-Skan 方程为例子进行数值研究, 同时跟以往的结果作了比较。计算实验表明: 该方法的结果完全可靠, 同时它还具有简单、直接和快速、稳定的特点。

二、Falkner-Skan 方程

让我们考虑通过一楔形物体的二维层流边界层流动。

假设流动定常、流体不可压缩。在小曲率物面正交曲线坐标系下, Prandtl 二维层流边界层方程可表示为

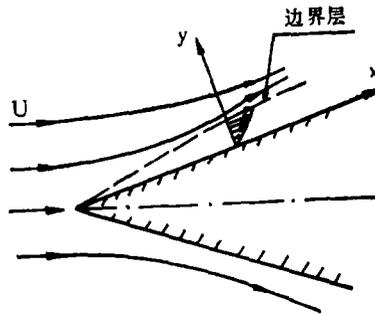


图1 流动示意图

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 u 和 v 分别表示沿 x 和 y 方向的速度分量, U_e 表示边界层外的势流速度。

边界条件

$$\left. \begin{aligned} \text{在物体表面上: } y = 0, \quad u = v = 0 \\ \text{在边界层之外: } y = \infty, \quad u = U_e(x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

现推导 Falkner—Skan 相似性方程。设

$$U_e(x) = cx^m \quad (3)$$

其中 c 为常数, m 为一指数。作下面的相似变换:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= y \sqrt{\frac{1+m}{2}} \frac{U_e}{\nu x} \\ u &= U_e f'(\eta) \\ v &= -\sqrt{\frac{1+m}{2}} \frac{\nu U_e}{x} \left\{ f(\eta) + \frac{m-1}{m+1} \eta f'(\eta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

代入动量方程 (连续方程已用来确定 v 的表达式) 和边界条件 (2), 得出下面常微分方程:

$$f'''' + ff'' + \beta(1-f'^2) = 0 \quad (5)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \quad (6)$$

方程 (5) 就是关于绕楔形物体流动的 Falkner—Skan 相似解方程。上面 $\beta = \frac{2m}{1+m}$ 称

为压力梯度参数。 β 取值不同决定了不同的流动类型。 $\beta > 0$, 表示顺压梯度流动, 这相当于楔形流或 Jeffery—Hamel 收敛楔形槽内的流动; $-2 \leq \beta < 0$, 表示逆压梯度流动, 这相当于绕楔角的膨胀流; $\beta = 0$, 表示零压梯度流动, 这相当于 Blasius 的平板流动。因此, β 的取值范围完全复盖了一整类的流动问题。

Evans(1968)^[3] 曾广泛地讨论了这类流动问题, 他的计算表明, 当 $\beta = -0.19884$ 时, 在物面上将首次遇到分离点。若 β 更小, 在壁面将出现回流。当然, 回流解没有定量意义, 因为边界层近似在回流状态不成立。所以, $\beta = -0.19884$ 将作为数值计算的下限。

方程 (5) 是一个三阶非线性常微分方程, 解析解是不可能的。下面我们用拟线性化数值方法来求解这一边值问题。

三、算法的构造

为了应用拟线性化方法解方程 (5), 让我们先做些变换。令

$$F = f, \quad G = F'$$

代入方程 (5) 和 (6), 得出关于 G 的二阶方程:

$$\left. \begin{aligned} G'' + FG' + \beta(1-G^2) &= 0 \\ G(0) = 0, \quad G(\infty) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

这是一个典型的关于 G 的边值问题, 利用有限差分变成隐式的三对角方程很容易求解。

另外一个方程为

$$F = \int_0^\eta G d\eta \quad (8)$$

这是一个很简单的数值积分问题。

方程 (7) 和 (8) 构成了一个封闭的流动方程组。在某一确定的 β 下, 循环迭代求解 (7) 和 (8), 可唯一解出 F 和 G 。

所以,现在问题的关键在于如何构造出方程(7)的有限差分近似。下面将集中讨论这一问题。

方程(7)关于 G 是一个非线性常微分方程。在写出它的基本有限差分格式之前,先必须进行拟线性化处理。方程(7)的拟线性化方法是很多的,可以采用相邻点的Taylor展开来做,也可以基于 k 次迭代值对 $(k-1)$ 次迭代值的Taylor展开来做。这里仅讨论后一种拟线性化方法。

设第 k 次迭代方程为

$$(G'')^k + F^{k-1}(G')^k + \beta[1 - (G^2)^k] = 0 \quad (9)$$

将非线性项 $(G^2)^k$ 在 $(k-1)$ 次的值处展开,并忽略二阶以上的小项,得

$$\begin{aligned} (G^2)^k &= (G^2)^{k-1} + 2G^{k-1}(G^k - G^{k-1}) \\ &= 2G^{k-1}G^k - (G^2)^{k-1} \end{aligned}$$

代入方程(9),并整理为

$$(G'')^k + P(G')^k + QG^k = R \quad (10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} P &= F^{k-1} \\ Q &= -2\beta G^{k-1} \\ R &= -\beta[1 + (G^2)^{k-1}] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这时,方程(10)成为拟线性常微分方程。这样,在构造差分格式时就方便多了。

下面用中心差分构造出方程(10)的有限差分格式。将区间 $I = [0, \eta_0]$ (本文用 $\eta_0 = 7$ 近似 $\eta = \infty$ 。经验表明,在这个值处粘性影响已相当小)分成 N 个小区间,得到 $N+1$ 个节点。在任意内点处 G' 和 G'' 的中心差分是

$$\begin{aligned} G'_n &= \frac{G_{n+1} - G_{n-1}}{2\Delta\eta} \\ G''_n &= \frac{G_{n+1} - 2G_n + G_{n-1}}{\Delta\eta^2} \end{aligned}$$

代入方程(10),并稍加整理得

$$\begin{aligned} (2 + \Delta\eta P_n)G_{n+1}'' + 2(\Delta\eta^2 Q_n - 2)G_n'' \\ + (2 - \Delta\eta P_n)G_{n-1}'' = 2\Delta\eta^2 R_n \quad (2 \leq n \leq N) \end{aligned} \quad (12)$$

若令

$$\left. \begin{aligned} A_n &= 2 - \Delta\eta P_n \\ B_n &= 2(\Delta\eta^2 Q_n - 2) \\ C_n &= 2 + \Delta\eta P_n \\ D_n &= 2\Delta\eta^2 R_n \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

则方程(12)可写成更简单的形式:

$$A_n G_{n+1}'' + B_n G_n'' + C_n G_{n-1}'' = D_n \quad (2 \leq n \leq N) \quad (14)$$

根据边界条件(7),可补充两个方程,写成

$$\left. \begin{aligned} B_1 G_1^k + C_1 G_2^k &= D_1 \\ A_{N+1} G_N^k + B_{N+1} G_{N+1}^k &= D_{N+1} \end{aligned} \right\} (15)$$

其中取 $B_1=1, C_1=D_1=0$ 和 $A_{N+1}=0, B_{N+1}=D_{N+1}=1$ 。这样，方程 (14) 和 (15) 便构成了如下形式的含三对角矩阵的代数方程组：

$$\begin{pmatrix} B_1 & C_1 & & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & & \\ & \diagdown & & \diagup & & \\ & & A_N & B_N & C_N & \\ & & & \diagdown & & \diagup \\ & & & & A_{N+1} & B_{N+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_N \\ G_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_N \\ D_{N+1} \end{pmatrix} \quad (16)$$

有关这种类型的方程组的解法很多。本文采用追赶法求解^[5]。

方程 (8) 可以采用任何一种常规数值积分法算出。

四、计算机程序设计

采用 FORTRAN 语言，程序逻辑分以下几个单元：

1. SUBROUTINE SSETRM：根据追赶法解三对角方程 (16)。
2. SUBROUTINE INTEG：采用梯形求积公式，数值积分方程 (8)。
3. SUBROUTINE DERIVE：用来求 G 的一阶导数 (即 $f''=G'$)，以研究剪应力的变化情况。 G' 在内点采用中心差分，在边界点上应用 Newton 二阶差分公式。
4. 主程序：负责给出 F 和 G 迭代前的初始值 (在本文中，以 $G=\eta, F=\frac{1}{2}\eta^2$ 作为起始迭代函数)，调用各子程序，并输出结果。

粗略的程序框图为

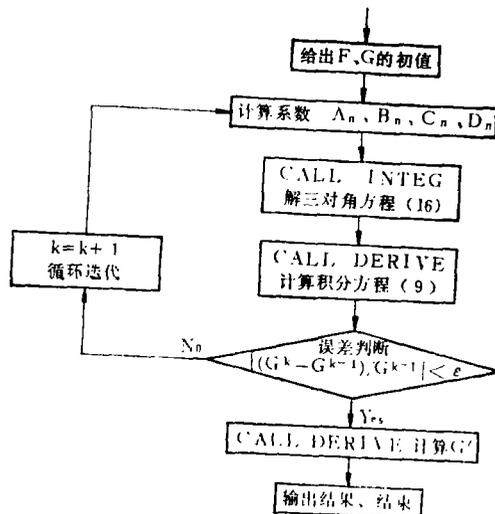


图1 程序框图

五、结果及分析

计算实验是在 PDP11/23 小型计算机上进行的。流动参数 β 分为 6 种情形, 分别取作 $\beta = -0.1985, -0.18, 0.0, 0.3, 1.0, 2.0$ 。计算步长取 $\Delta\eta = 0.07$ (即相当于 $N = 100$) 和 $\Delta\eta = 0.14$ (相当于 $N = 50$)。所有情形下的迭代收敛判别相对误差均限于 10^{-4} 。现将其数值计算结果说明如下。

1. 按 $N = 100$ 计算所得的结果绘于图 2、图 3 中, 其中图 2 表示速度分布曲线 f' , 图 3 表示剪应力分布曲线 f'' 。这一结果同文献中的典型曲线相比较, 其变化趋势完全一致。另外, 由图 2 也可看出, 对于 $\beta > 0$ 的加速流动 (顺压梯度), 速度剖面是外凸无拐点的曲线, 而对于 $\beta < 0$ (逆压梯度) 的减速流动, 紧靠壁面附近出现内凹, β 值越小, 内凹现象越加明显。当 $\beta = -0.1985$ 时 (一般公认的精确值是 -0.19884), 壁面上 $f''(0)$ 为零, 即壁剪应力到处为零。这表明, 边界层开始从壁面分离。若 $\beta < -0.1985$, f' 在壁附近变负, 表示产生回流。因为回流解没有定量意义, 所以, 在这个范围内的结果没有输出。

2. 表 1 给出了拟线性化方法所得的壁面剪切应力 $f''(0)$ 与 Evans 应用 Runge—Kutta 法所得的结果之比较。可以看出, 对所有 β 值两者的 $f''(0)$ 是十分符合的, 小数点后三位数字完全一致, 只是在第四位才开始有微小变化, 其误差 $< 0.1\%$ 。造成这种误差的原因, 可能是由于我们的迭代收敛判别误差 ϵ 和步长 $\Delta\eta$ 取的较大。同样, 产生流动分离的 β 值与文献上 β 精确值的差别, 也可能是由上述原因造成的。

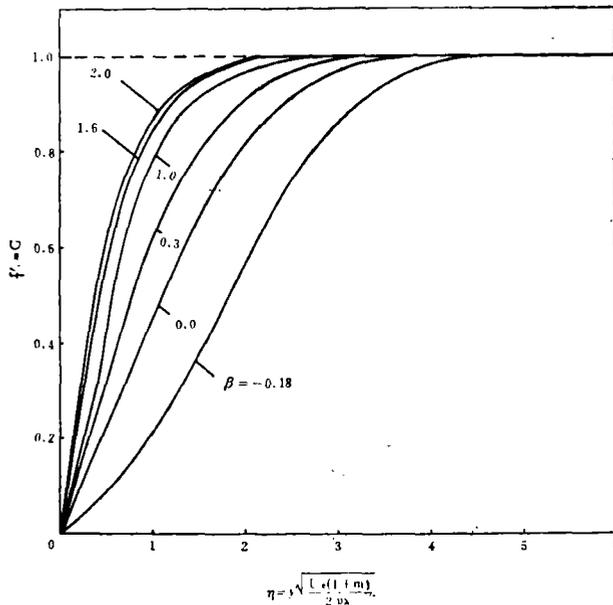


图2 速度分布

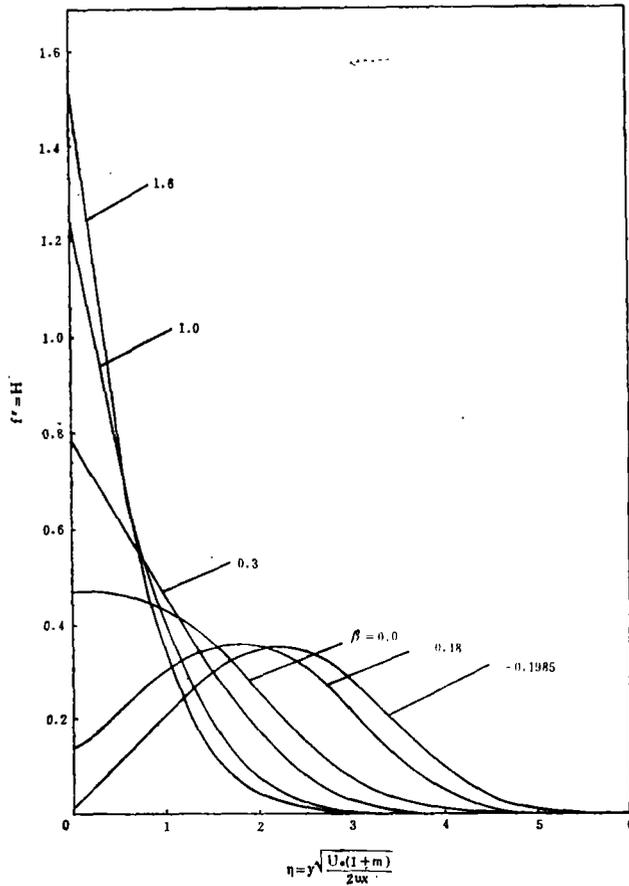


图3 剪应力分布

表 1 不同 β 值下 $f''(0)$ 值之比较

β	-0.18	0.0	0.3	1.0	2.0
作者的方法 (迭代精度 10^{-4})	0.12877	0.46965	0.77480	1.23263	1.68702
Evans 的方法 (迭代精度 10^{-7})	0.12864	0.46960	0.77476	1.23259	1.68722

六、结束语

在本文中，作者讨论了求解定常二维层流边界层问题的拟线性化数值方法，并将此方法在 Falkner—Skan 方程的边值问题上做了计算实验。根据结果，可作出如下结论：

1. 数值试验表明，拟线性化方法是求解非线性常微分方程的有效方法之一，它的优点是简单、直接、准确和可靠，同时该方法对数值计算非常稳定且容易编写程序。

2. 按拟线性化方法计算所得的结果与文献上 Evans 的结果比较表明:两者是相当满意地一致。数值上的差别仅出现在小数点后第4位上。可以设想,如果采用更细的差分网格和提高迭代精度,则会得出更精确的结果。

3. 本文仅讨论了拟线性化方法在具有一个三阶非线性常微分方程型的二维不可压缩层流边界层问题上的应用。毫无疑问,也可把它用在多个高阶常微分方程组边值问题上。另外,若将拟线性化处理方法稍加改变,也可用来求解具有偏微分方程型的粘性流动边值问题。

参 考 文 献

- [1] Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, CH. IX, McGraw—Hill Book Co. 1968, p163—200
- [2] F.M. 怀特, 《粘性流体动力学》, 魏中磊、甄思森译, 机械工业出版社, 1982年 p271—278
- [3] Evans, H.: Laminar Boundary Layer, Addison—Wesley, Reading, Mass., 1968.
- [4] Gerald, C.F., Applied Numerical Analysis (2nd Ed.), Ch. 5, Addison—Wesley Publishing Co., 1978, p250—291.
- [5] 李荣华、冯果忱: 《偏微分方程数值解法》, 高等教育出版社, 1980年, p255—261