第26卷 第1期 北 京 工 业 大 学 学 报 Vol.26 No.1
2000年 3 月 JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY Mar. 2000

四元数射影空间上的一类等参超曲面

邓米克
(北京工业大学计算机学院，北京，1000022)
肖良
(中国科技大学研究生院数学部，北京，100039)

摘 要 利用 QP^n 上实超曲面与其在 S^{4n+3} 上的 Hopf 原像的形状算子间的关系，讨论了四元数射影空间 QP^n 上的等参超曲面，指出 QP^n 上的某些等参超曲面之不同主曲率个数函数 g 不为常数．

关键词 等参超曲面，主曲率，四元数射空间

分类号 O189

0 引言

设 N 是一个黎曼流形，M 是 N 上一个完备超曲面．如果 M 及其平行超曲面都具有常中曲率，则 M 称为等参超曲面对任意的 $x\in M$，以 $g(x)$ 表示 M 在 x 处不同主曲率的个数，我们称 g 为 M 上的不同主曲率个数函数．到目前为止，实空间形式 E^n, S^n, H^n 及复空间形式 CP^n 和 CH^n 上等参超曲面已得到很好的研究[1~3]，实空间形式上的等参超曲面必为常主曲率超曲面，而其它黎曼空间上等参超曲率不一定是常数．Park 在文献 [4] 中讨论了复射影空间 CP^n 和四元数射影空间 QP^n 上的等参超曲面，并断言 CP^n 和 QP^n 上等参超曲面的不同主曲率个数函数为常值函数．文献 [3] 中，肖良证明了 CP^n 上等参超曲面 M 的不同主曲率个数函数为常值的充要条件是 M 为齐性超面，即 CP^n 上任一非齐性等参超曲面的不同主曲率个数函数一定不为常数．从而，否定了 Park 断言的前半部分．

本文将给出一类 QP^n 上等参超曲面，其不同的主曲率个数函数均不为常值函数．因而，指出了 Park断言的后半部分依然不正确．

1 预备知识

为了便于叙述，先简单回顾一下主曲率，四元数体 Q 及其 Q 上 n 维左向量空间 Q^n 和四元数射影空间 QP^n 的定义和基本性质．

设 N 是黎曼流形，M 是 N 的超曲面，ξ 是 M 的单位法向量场．设 ∇ 是 N 上的 Levi-Civita 联络．M 的形状算子 A_ξ 定义为：$\forall x\in M$，

$$A_\xi(x):\ T_xM\to T_xM:\ X\to -(\nabla_X\xi)^T$$

这里 $(\nabla_X\xi)^T$ 表示 $\nabla_X\xi$ 的切投影．我们称 $A_\xi(x)$ 的迹为 M 在 x 处的中曲率，$A_\xi(x)$ 的特征值为 M 在 x 处的主曲率．

四元数体 Q 是指一个四维实向量空间，其上乘法定义如下：

$$\gamma=\alpha\cdot\beta=(a_0,a_1,a_2,a_3)\cdot(b_0,b_1,b_2,b_3)=(c_0,c_1,c_2,c_3)$$

收稿日期：1999-03-04

其中 $c_0 = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3$；$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2$；$c_2 = a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3$；$c_3 = a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1$.

在 Q 上取一组基 $e = (1,0,0,0)$, $i = (0,1,0,0)$, $j = (0,0,1,0)$, $k = (0,0,0,1)$, 则这 4 个基向量间的乘法关系为 $e^2 = e, ei = ie = i, ej = je = j, ek = ke = k, i^2 = j^2 = k^2 = -e, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ki = j$. 此时, Q 上每一元素 α 均可表为 $\alpha = a_0e + a_1i + a_2j + a_3k$. 称 a_0 为 α 的实部, 记为 $a_0 = \mathrm{Re}\,\alpha$, 称 Q 中向量 $\bar{\alpha} = a_0e - a_1i - a_2 - a_3k$ 为 α 的共轭元素.

在四元数体 Q 上 n 元素组 Q^n 中, 按照 $\alpha + \beta = (q_1, \cdots, q_n) + (r_1, \cdots, r_n) = (q_1 + r_1, \cdots, q_n + r_n)$ 引进加法, 再按照 $\lambda\alpha = \lambda(q_1, \cdots, q_n) = (\lambda q_1, \cdots, \lambda q_n)$, $\lambda \in Q$ 引进纯量积, 则 Q^n 构成 n 维四元数(左)向量空间.

对 Q^n, 定义内积 $\langle , \rangle$ 为

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n} q_j \bar{r}_j\right)$$

使 Q^n 成为一欧氏空间 R^{4n}. 此时, Q^n 上的左乘 i, j, k 分别对应于 R^{4n} 上正交变换 J_1, J_2, J_3. J_1, J_2, J_3 满足下式

$$\left.\begin{aligned} &J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -I,\ J_2J_3 = -J_3J_2 = J_1 \\ &J_3J_1 = -J_3J_1 = J_2,\ J_1J_2 = -J_2J_1 = J_3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里, I 是 R^{4n} 上恒同变换.

反过来, 给定一个欧氏空间 R^{4n} 及其上四元结构, 即: 正交变换 J_1, J_2, J_3 满足关系 (1) 式, 则 R^{4n} 等同于一个四元数体上 n 维(左)向量空间 Q^n, 使 J_1, J_2, J_3 分别对应于 Q^n 上的左乘 i, j 和 k.

在 $Q^{n+1} - \{0\}$ 的元素间定义如下关系 $\sim$: $(q_0, q_1, \cdots, q_n) \sim (r_0, r_1, \cdots, r_n)$, 当且仅当存在一个非 0 四元数 λ, 使 $(q_0, q_1, \cdots, q_n) = \lambda(r_0, r_1, \cdots, r_n)$. 容易验证, 这是等价关系. 四元数射影空间 QP^n 就是商空间 $Q^{n+1} - \{0\} / \sim$.

记 $S^{4n+3} = \{z \in Q^{n+1} | \langle z, \bar{z} \rangle = 1\}$ 为 Q^{n+1} 上的单位球面.

考虑自然投影 $\pi: S^{4n+3} \to QP^n: z \to [z]$. 对于任意的 $p \in QP^n$, 其逆像 $\pi^{-1}(p)$ 是 S^{4n+3} 上的一个全测地 3 维球面. π 是著名的 Hopf 主丛, 结构群是 S^3 群.

$\forall x \in S^{4n+3}$, 其切空间可分解成正交直和 $T_xS^{4n+3} = V_x + H_x$, 其中 $V_x = \mathrm{span}\{J_1x, J_2x, J_3x\}$, H_x 是 V_x 的正交补空间. 我们分别称 V_x 和 H_x 为竖直和水平的空间. 容易看出 $V_x = \ker \pi_*(x)$. 因此, 对 QP^n 上的任意的向量场 X, 在 S^{4n+3} 上有唯一的向量场 $\bar{X}$, 使 $\bar{X}(x) \in H_x$ 且 $\pi_*(\bar{X}) = X$. 我们称 $\bar{X}$ 为 X 的水平提升.

由黎曼几何中一个熟知的事实, 在 QP^n 中存在唯一黎曼度量, 使 π 为黎曼淹没 (submersion), 即对 QP^n 上的任意的向量场 X 和 Y, 有 $\langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle_{S^{4n+3}} = \langle X, Y \rangle_{QP^n}$. 这里, $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 分别为 X 和 Y 的水平提升. 在此黎曼度量下, QP^n 是秩为 1 的 $4n$ 维紧致对称空间, 且截面曲率在 1 和 4 之间.

设 M 为 QP^n 上实超曲面, ξ 是 M 上单位法向量场, 则 $\bar{M} = \pi^{-1}(M)$ 是 S^{4n+3} 的超曲面, 而 ξ 的水平提升 $\bar{\xi}$ 是 $\bar{M}$ 的单位法向量场, 记 $\bar{M}$ 和 M 上的形状算子 (shape operator) 分别为 $\bar{A}_{\bar{\xi}}$ 和 A_ξ. 关于 $\bar{A}_{\bar{\xi}}$ 和 A_ξ 有

$$\bar{A}_{\bar{\xi}}\bar{Y} = \overline{A_\xi Y} + \sum_{i=1}^{3} \langle \bar{A}_{\bar{\xi}}\bar{Y}, J_iX \rangle J_iX \tag{2}$$

$$\bar{A}_{\bar{\xi}}J_iX = J_i\bar{\xi} \tag{3}$$

其中: X 是 $\bar{M}$ 在 $S^{4n+3} \subset Q^{n+1}$ 上的位置向量; Y 是 M 上的任一切向量场; J_1, J_2, J_3 是 Q^{n+1} 上的四元结构.

2 QP^n 上的一类等参超曲面

记 R^{8k}, $k \geq 2$ 为 $2 \times 4k$ 阶实矩阵全体, 即 $R^{8k} = \{X | X$ 是 $2 \times 4k$ 阶实矩阵$\}$ 所确定的欧氏空间, 其

内积定义为$\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\, XY^{\mathrm{T}}$,其中 Y^{T}表示 Y的转置. 下面我们以 e_{ij} 表示 i 行 j 列位置上的元素为 1 而其余位置的元素皆为0 的 $2\times 4k$ 阶矩阵. 记$S^{8k-1} = \{x\in R^{8k} \mid \langle X, X\rangle = 1\}$为 R^{8k} 上的单位球面. 在 S^{8k-1}上取点 $P = \cos(\frac{\pi}{4}-\theta)e_{11} + \sin(\frac{\pi}{4}-\theta)e_{22}$,其中$\theta$ 满足下列关系式:

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \cot(\theta) + \cot(\theta + \frac{\pi}{2}) \neq \cot(\theta + \frac{\pi}{4})$$

$$\cot(\theta + \frac{\pi}{4}) + \cot(\theta + \frac{3\pi}{4}) \neq \cot(\theta + \frac{\pi}{2})$$

令

$$K = SO(2)\times SO(4k) = \{(B, C) \mid B\in SO(2), C\in SO(4k)\}$$

定义 K 在 R^{8k} 上的作用如下:

$$(B, C)\cdot X = BXC$$

则 K 为 R^{8k} 上的正交子群.

考虑轨道$\overline{M} = K\cdot P$,经简单计算知道,$\overline{M}$在 P 点切空间为 $T_P\overline{M} = \{X = (x_{ij})\in R^{8k} \mid x_{11} = x_{22} = 0\}$. 由 $\dim T_P\overline{M} = 8k-2$, $\overline{M}$ 是 S^{8k-1}上齐性超曲面. 从而,$\overline{M}$是 S^{8k-1}上等参超曲面.在$\overline{M}$上取单位法向量场$\overline{\xi}$,使 $\overline{\xi}$ 在 P 点的值为

$$\overline{\xi} = \sin(\frac{\pi}{4}-\theta)e_{11} + \cos(\frac{\pi}{4}-\theta)e_{22}$$

则$\overline{M}$具有 4 个不同的常主曲率$\overline{\lambda}_i = \cos(\theta + \frac{(i-1)}{4}\pi)$, $i = 1, 2, 3, 4$

令

$$J_i = (I, A_i)\in K,\ i = 1, 2, 3 \tag{4}$$

其中 I是单位矩阵

$$A_i = \begin{pmatrix} E_i & & \\ & \ddots & \\ & & E_i \end{pmatrix}$$

这里

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $\{J_1, J_2, J_3\}$构成 R^{8k}上的一个四元结构. 由上节我们知道,R^{8k} 等同于一个四元数体上向量空间Q^{2k}. 设 π 为自然投影 $\pi: S^{8k-1}\to QP^{2k-1}$. 注意到结构群 $S^3\subset K$, $M = \pi(\overline{M})$是 QP^{2k-1}上超曲面,且$\overline{M} = \pi^{-1}(M)$. 在文献[5]中,Mullen 证明了 QP^n中实超曲面 M为等参的充要条件是其逆像 $\pi^{-1}(M)$在 S^{4n+3}中为等参的. 因此,M是 QP^{2k-1}上的等参超曲面.

定理 设 M是如上述的 QP^{2k-1}上的等参超曲面,则 M上的主曲率个数函数 g 一定不为常值.

证明 取 $P_1 = \cos(\frac{\pi}{4}-\theta)e_{11} + \sin(\frac{\pi}{4}-\theta)e_{25}\in\overline{M}$. 考虑 M在 $\pi(P)$和$\pi(P_1)$两点的主曲率. 经直接计算可得$\overline{A}_{\overline{\xi}}$在 P点关于$\overline{\lambda}_1$、$\overline{\lambda}_2$、$\overline{\lambda}_3$ 和 $\overline{\lambda}_4$的特征空间分别为:

$$\left.\begin{array}{l} V_1(P) = \mathrm{span}_R\{e_{12}+e_{21}\}, V_2(P) = \mathrm{span}_R\{e_{13},\cdots, e_{1,4k}\} \\ V_3(P) = \mathrm{span}_R\{e_{12}-e_{21}\}, V_4(P) = \mathrm{span}_R\{e_{23},\cdots e_{2,4k}\} \end{array}\right\} \tag{5}$$

而$\overline{A}_\xi$在P_1点关于$\overline{\lambda}_1$, $\overline{\lambda}_2$, $\overline{\lambda}_3$和$\overline{\lambda}_4$的特征空间分别为：

$$\left.\begin{aligned} V_1(P_1) &= \mathrm{span}_R\{e_{15}+e_{21}\},\ V_2(P) = \mathrm{span}_R\{e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{16}, \cdots, e_{1,4k}\} \\ V_3(P) &= \mathrm{span}_R\{e_{15}-e_{21}\},\ V_4(P) = \mathrm{span}_R\{e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{26}, \cdots, e_{2,4k}\} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

利用(2~6)式和$\overline{\lambda}_i = \cot\left(\theta + \frac{(i-1)}{4}\pi\right)$，不难得出$M$在$\pi(P)$点共有4个不同的主曲率$\overline{\lambda}_1+\overline{\lambda}_3$，$\overline{\lambda}_2+\overline{\lambda}_4$，$\overline{\lambda}_2$，$\overline{\lambda}_4$，即$g(\pi(P))=4$．而在$\pi(P_1)$点共有5个不同主曲率$\overline{\lambda}_1$，$\overline{\lambda}_2$，$\overline{\lambda}_3$和$\overline{\lambda}_2+\overline{\lambda}_4$，即$g(\pi(P_1))=5$．因此，$M$上的主曲率个数函数$g$不为常值．

参 考 文 献

1 Cartan E. Familles des surfaces isoparametriques dans les espace a courbure constance, Ann Mat. 1938, 17, 177~191

2 Münzner H F. Isoparmetrische Hyperflächen im Sphächen. I Math Ann, 1980, 251, 57~71, II Math Ann. 1981, 256, 215~232

3 肖良. Principal curvatures of isoparametric hypersurfaces in CP^n. Trans. of A. N. S,(待发表)

4 Park K S. Isoparametric fammilies on projective spaces. Math Ann, 1989, 284, 503~513

5 Mullen S. Isoparametric System on Symmetric Spaces, Geometry and Topology of Submanifods, VI Belgium, 1993

A Class of Isoparametric Hypersurfaces in Quaternion Projective Space

Deng Mike

(Computer Institute, Beijing Polytechnic University, Beijing, 100022)

Xiao Liang

(Department of Mathematics, Graduate School of USTC, Beijing, 100039)

Abstract The isoparametric hypersurfaces in quaternion projective spaces QP^n are discussed by using the relationship between the two shape operators of a real hypersurface in QP^n and its inverse image under the Hopf map in S^{4n-3}. And the nonconstancy of the number functions of distinct principal curvatures of some isoparametric hypersurfaces in QP^n is pointed.

Keywords isoparametic hypersurfaces, principal curvature, quaternion projective space