

组合结构程序JJZ3的静力分析理论

赵超燮 陶振宗 张述良 郭文渝

(计算结构力学教研室)

摘 要

本文讨论弹性组合结构系统的静力分析理论,采用消元分解法解大型线性方程组,并附有几个计算实例说明程序的用法。

Static Analysis Theory of Composed Structure Program JJZ3

Zhao Chao-xie Tao Zhen-zong

Zhang Shu-liang Guo Wen-yu

This paper is concerned with static analysis theory suitable for elastic composed structure systems. The elimination decomposition method is adopted for solving large linear equations. Some examples to illustrate the use of the program are given.

一、前 言

JJZ3程序是用BCY语言编写的组合结构通用程序。1976年在TQ-16机上调试通过,后来陆续修改,增加了特征值计算。这里只介绍下列二十来种组合结构的静力(位移、内力和反力)计算:

1. 平面应力问题及平面桁架;
2. 连梁、平面框架;
3. 交叉梁系和薄板弯曲问题;
4. 梁板组合组构;
5. 空间桁架;
6. 空间刚架;

7. 加劲的或无加劲的任意壳体；
8. 加劲的或无加劲的抛物面旋转壳；
9. 加劲的或无加劲的圆柱壳；
10. 加劲的或无加劲的球壳；
11. 加劲的或无加劲的双曲扁壳。

本程序的解题能力仅取决于节点数，而与单元数、荷载组数、系数矩阵带宽等无关，可以解决大型复杂问题，计算小问题也是很有效的。在仅利用内存求解时，系数矩阵按一维变带宽存贮的总元素数不超过 14000，利用磁鼓分块求解时的总元素数不超过 50000，利用磁带分块求解时原则上不受上述限制。

二、坐标系及力与位移的符号规定

本文采用右手螺旋 Z 轴向下的直角坐标系（1 图）。

我们以节点位移为未知量。通常，节点选择在板（壳）的中面上或杆件形心轴上。在空间直角坐标系下，每个节点最多可以有 6 个位移未知数：

$$\mathbf{U}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ \dots \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

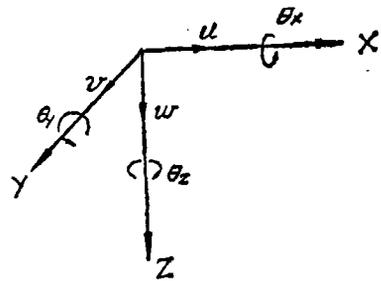


图 1

相应的节点力列阵为

$$\mathbf{P}_i = \begin{Bmatrix} P_{x_i} \\ P_{y_i} \\ P_{z_i} \\ M_{x_i} \\ M_{y_i} \\ M_{z_i} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

节点位移以图 1 所示的方向为正方向。节点力以与节点位移方向一致者为正。

位移 u 的单位为[长度]， θ 的单位为[弧度]；节点力 P 的单位为[力]， M 的单位为[力 \times 长度]。而板中面上任一点的内力为单位长度上的数值，其正负号与[1]中的规定相同。

三、单元分析

上列二十来种类型的结构，可以第 7 种为典型结构，而其它结构均为此类结构的特殊情

况，任意加劲的壳体可由空间梁元和壳元组成。

经验证明^[2]，采用平板壳元已能满足工程实践的要求，因此为了适应各种边界的要求，选用了三角形平板壳元。

下面分别研究平板壳元和空间梁元。

1. 三角形平板元

三角形平板元的节点位移列阵为(注)

$$\mathbf{U}_M = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \end{Bmatrix} \quad (18.1) \quad (3)$$

式中 \mathbf{U}_i 见(1)式，相应的节点力列阵为

$$\mathbf{P}_M = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中 \mathbf{P}_i 见(2)式。

在平板的中面内承受拉伸或压缩作用，同时承受横向弯曲的作用，则在 Kirchhoff 假设下，这时离板中面 Z 处任一点的线位移 $\tilde{\mathbf{u}}$ ：

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + Z(\mathbf{n} - \mathbf{k}) \quad (5)$$

式中： \mathbf{u} ——中面的线位移（见(1)式）；

Z ——板上任一点离中面的距离；

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ——变形前单位基向量；

\mathbf{n} ——变形后中面外法线方向单位向量。

$$\mathbf{n} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (6)$$

$$A = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$B = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7)$$

$$C = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

在小位移理论的情况下，(6)式可以简化为

$$\mathbf{n} = -\frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (8)$$

于是可以用中面位移 (u, v, w) 来表示任一点的位移：

(注)：为了简单明了起见，在推导过程中就不加局部坐标系的标志。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - 2z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v - 2z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w \end{pmatrix} \quad (9)$$

和应变列阵:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (10)$$

在研究薄板问题时,可以忽略不计 σ_z 、 γ_{yz} 和 γ_{zy} 。这样,任一点应力—应变关系变为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\mu^2)} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\mu^2)} (\mu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

于是单位体积内的应变能 V_0 可以写成

$$V_0 = \frac{E}{2(1-\mu^2)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 - 4\varepsilon_x \varepsilon_y) \quad (12)$$

式中: E ——弹性模量;

G ——剪切模量,在各向同性时 $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$;

μ ——泊松比。

将(10)式代入(12)式,并对整个板元沿厚度 t 进行积分后,就得到板元的应变能 V :

$$\begin{aligned} V = \int_{A_0} \frac{E t}{2(1-\mu^2)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{(1-\mu)}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right\} \\ dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_0} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{式中: } D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \text{——板的抗弯刚度;} \quad (14)$$

A_0 ——板的中面面积。

如果采用下列记号分别表示平面应力和板弯曲的应变、节点位移和节点力列阵:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_B = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{U}_P = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_{13} \\ u_{14} \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_{13} \\ P_{14} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{U}_B = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{15} \\ u_{16} \\ u_{17} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_B = \begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{15} \\ P_{16} \\ P_{17} \end{pmatrix} \quad (20)$$

则 (13) 式可以用下列矩阵表示

$$V = \frac{1}{2} \int_{A_0} \boldsymbol{\varepsilon}_P^T \mathbf{D}_P \boldsymbol{\varepsilon}_P dx dy + \frac{1}{2} \int_{A_0} \boldsymbol{\varepsilon}_B^T \mathbf{D}_B \boldsymbol{\varepsilon}_B dx dy \quad (21)$$

式中平面应力的弹性矩阵:

$$\mathbf{D}_P = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (22)$$

板弯曲的弹性矩阵:

$$\mathbf{D}_B = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (23)$$

如果以 \mathbf{N}_P 、 \mathbf{N}_B 表示平面应力和板弯曲时的形函数, 则板中面上任一点的位移可以用节点位移来表示

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_P \mathbf{U}_P \quad (24)$$

$$w = \mathbf{N}_B \mathbf{U}_B \quad (25)$$

于是分别代入 (15) 和 (16) 式得到:

$$\varepsilon_P = \mathbf{N}'_P \mathbf{U}_P = \mathbf{B}_P \mathbf{U}_P \quad (26)$$

同理 $\varepsilon_B = \mathbf{B}_B \mathbf{U}_B$ (27)

式中应变矩阵 \mathbf{B}_P 、 \mathbf{B}_B 的具体推导过程可以参见 [3、4]。因此 (21) 式可以改写成:

$$V = \frac{\mathbf{U}_P^T}{2} \int_{A_0} \mathbf{B}_P^T \mathbf{D}_P \mathbf{B}_P dx dy \mathbf{U}_P + \frac{\mathbf{U}_B^T}{2} \int_{A_0} \mathbf{B}_B^T \mathbf{D}_B \mathbf{B}_B dx dy \mathbf{U}_B \quad (28)$$

根据Castigliano 第一定理, 将 (28) 式对 \mathbf{U}_P 和 \mathbf{U}_B 求偏导数, 就得到节点力列阵:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{U}_P} = \mathbf{P}_P = \int_{A_0} \mathbf{B}_P^T \mathbf{D}_P \mathbf{B}_P dx dy \mathbf{U}_P = \mathbf{k}_P \mathbf{U}_P \quad (29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{U}_B} = \mathbf{P}_B = \int_{A_0} \mathbf{B}_B^T \mathbf{D}_B \mathbf{B}_B dx dy \mathbf{U}_B = \mathbf{k}_B \mathbf{U}_B \quad (30)$$

式中 \mathbf{k}_P 、 \mathbf{k}_B 分别为平面应力和板弯曲元的刚度矩阵, 将其写成分块矩阵。因此, 一旦选定每个单元的形函数 \mathbf{N}_P 和 \mathbf{N}_B 就可以确定平面应力和弯曲板元的单元刚度矩阵, 这时应将节点力和节点位移按照(3)和(4)式排列, 就得到

$\left[\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \right]$	$=$	k_{P11}		k_{P12}		k_{P13}		$\left[\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array} \right]$	
			k_{B11}		k_{B12}		k_{B13}		
			0		0		0		
		k_{P21}		k_{P22}		k_{P23}			
			k_{B21}		k_{B22}		k_{B23}		
			0		0		0		
		k_{P31}		k_{P32}		k_{P33}			
			k_{B31}		k_{B32}		k_{B33}		
	0		0		0				

(18 × 1)
(18 × 18)
(18 × 1)

上式中 k_{Pij} 、 k_{Bij} 分别为 k_P 和 k_B 的子矩阵, 其阶数分别为 2×2 与 3×3 阶。

或简写为

$$\overline{\mathbf{P}}_M = \overline{\mathbf{K}}_M \overline{\mathbf{U}}_M \quad (32)$$

上式字母上加“—”表示形成单元刚度矩阵时是按局部坐标系进行的, 因此平板壳元是 18×18 阶的。

2. 空间梁

设梁的形心轴线为一条直线, 取形心轴线为局部坐标系的 \overline{X} 轴, 垂直于形心轴的两个平面的两根惯性主轴作为局部坐标系的 \overline{Y} 轴和 \overline{Z} 轴。

每根梁元的节点位移列阵和节点力列阵为

$$\mathbf{U}_M = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{L,1} \\ \mathbf{U}_{L,2} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{P}_M = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{L,1} \\ \mathbf{P}_{L,2} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

式中下标 L 表示梁截面形心处的节点位移和节点力。

在梁的分析中采用平面截面假设。

考虑到梁的空间受力状态，不仅在 XOZ 平面发生弯曲，而且可以在 XOY 平面内发生弯曲，同时认为扭转与弯曲是不耦合的。因此，梁的纵向应变为

$$\varepsilon_{x\tau} = \frac{\partial u_L}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} + Y \frac{\partial^2 v_L}{\partial x^2} \quad (35)$$

上式第二项的负号表示 $+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ 和 $+x$ 对应于梁的受压纵向应变。于是梁的应变能为

$$\begin{aligned} V = & \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u_L}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI_Y}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w_L}{\partial x^2} \right)^2 dx \\ & + \frac{EI_Z}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v_L}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{GI_X}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (36)$$

上式： $\phi = \frac{\partial w}{\partial y}$ —— 扭转角；

I_X —— 抗扭惯性矩。

上式第一项积分式表示轴向变形所引起的应变能，进而可以列出两个方程：

$$\frac{\partial V}{\partial u_1} = P_1, \quad \frac{\partial V}{\partial u_7} = P_7. \quad (37)$$

第二项积分式表示 XOZ 平面内弯曲变形所引起的应变能，进而可以列出四个方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u_3} = P_3, & \quad \frac{\partial V}{\partial u_5} = P_5, \\ \frac{\partial V}{\partial u_9} = P_9, & \quad \frac{\partial V}{\partial u_{11}} = P_{11}. \end{aligned} \quad (38)$$

第三项积分式表示 XOY 平面内弯曲变形所引起的应变能，进而也可以列出四个方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u_2} = P_2, & \quad \frac{\partial V}{\partial u_6} = P_6, \\ \frac{\partial V}{\partial u_8} = P_8, & \quad \frac{\partial V}{\partial u_{12}} = P_{12}. \end{aligned} \quad (39)$$

第四项积分式表示由扭转变形所引起的应变能，进而可以列出两个方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u_4} = P_4, \\ \frac{\partial V}{\partial u_{10}} = P_{10}. \end{aligned} \quad (40)$$

常用截面的 f 值

矩形	1.2
圆形	10/9
圆管	2
工字形或狭矩形	$\sim A/A_{\text{腹板}}$

3. 梁板的共同工作

在组合结构中，如何保证梁板共同工作，关键在于建立变形协调条件。为了简化计算，采用板中面的位移来表示梁截面形心处的位移。这时把梁截面形心 L 与板元节点 B 的连线 BL 看成是一个刚臂（图 2），则 L 点的六个位移分量均可用 B 点的表示

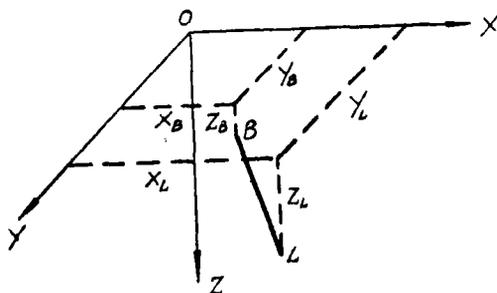


图 2

$$\begin{pmatrix} u_L \\ v_L \\ w_L \\ \theta_{xL} \\ \theta_{yL} \\ \theta_{zL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & D_z & -D_y \\ & 1 & & -D_z & & & & D_x \\ & & 1 & D_y & -D_x & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix} \quad (44)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} D_x &= x_L - x_B \\ D_y &= y_L - y_B \\ D_z &= z_L - z_B \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

值得注意的是在 (44) 式中， D_x 、 D_y 、和 D_z 在图 2 的情况下均为正值，也就是说 D_x 、 D_y 和 D_z 应按 (45) 式进行计算。

当梁截面形心 L 与板元节点 B 重合时，则无需进行变换了。在梁的高度不大时，通常就不考虑这种偏心的影响。

四、结构分析

在结构坐标系下，由结构的节点平衡条件可以得到一组平衡方程

$$\mathbf{KU} = \mathbf{P} \quad (46)$$

式中： \mathbf{K} —— 结构刚度矩阵；
 \mathbf{U} —— 节点位移未知量列阵；
 \mathbf{P} —— 用荷载列阵。

于是采用分块消元分解法^{[5]、[6]}，就可以解出节点位移列阵 \mathbf{U} ，然后计算单元内力和支座反力。通常，结构刚度矩阵可由结构坐标系下的单元刚度矩阵 \mathbf{K}_M 直接迭加而成

$$\mathbf{K} = \Sigma \mathbf{k}_M \quad (47)$$

因此首先要将局部坐标系下的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}_M$ 变换为 \mathbf{K}_M ，即

$$\mathbf{k}_M = \mathbf{Z}^T \bar{\mathbf{k}}_M \mathbf{Z}_B \quad (48)$$

式中： \mathbf{Z}_B ——坐标变换矩阵，下面就分别进行讨论。

1. 三角形平板元的 \mathbf{Z}_B

按下列规定选取局部坐标系（图3）：

- (1) 以三角形的形心作为局部坐标系的原点 \bar{O} ；
- (2) 使 $\bar{O} \bar{Z}$ 轴垂直于三角形板面；
- (3) 选取 $\bar{O} \bar{Y}$ 轴平行于 XOY 平面；
- (4) 使 $\bar{O} \bar{X}$ 轴垂直于 $\bar{O} \bar{Y}$ 轴。

于是三角形板元的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} \frac{ac}{st} & \frac{bc}{st} & -\frac{s}{t} \\ -\frac{b}{s} & \frac{a}{s} & 0 \\ \frac{a}{t} & \frac{b}{t} & \frac{c}{t} \end{pmatrix} \quad (49)$$

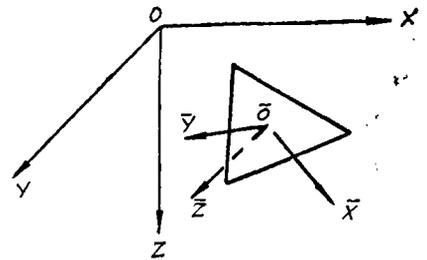


图 3

式中： $a = (Y_2 - Y_1)(Z_3 - Z_1) - (Y_3 - Y_1)(Z_2 - Z_1)$;
 $b = (X_3 - X_1)(Z_2 - Z_1) - (X_2 - X_1)(Z_3 - Z_1)$;
 $c = (X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (X_3 - X_1)(Y_2 - Y_1)$;
 $s = \sqrt{a^2 + b^2}$;
 $t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

当 $S \rightarrow 0$ 时，三角形 $\triangle 123$ 平行于 XOY 平面，则根据 C 值的正负分为：

如果 $C > 0$ 时， \bar{Z} 轴与 Z 轴指向相同

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

如果 $c < 0$ 时， \bar{Z} 轴与 Z 轴指向相反：

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (52)$$

2. 空间梁的 \mathbf{Z}_B

按下列规定选择梁元的局部坐标系 (图 4) :

(1) 取梁元的轴线作为 $\bar{O} \bar{X}$ 轴;

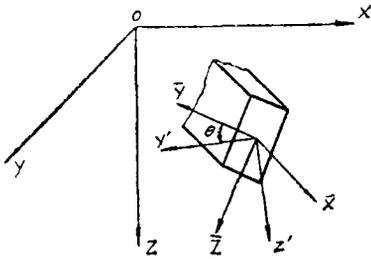


图 4

(2) 假设 $\bar{O} Y'$ 轴平行于 XOY 平面, 实际截面主轴 $\bar{O} \bar{Y}$ 与 $\bar{O} Y'$ 成 θ 角 (在右旋系下逆时针向量取);

(3) \bar{Z} 轴的指向与 Z 轴相同.

于是梁元的坐标变换矩阵 \mathbf{Z}_B 为

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} a/l & b/l & c/l \\ -b/s & a/s & 0 \\ -ac/sl & -bc/sl & s/l \end{pmatrix} \quad (53)$$

式中: $a = (X_2 - X_1)$;

$b = (Y_2 - Y_1)$;

$c = (Z_2 - Z_1)$; (54)

$l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

$s = \sqrt{a^2 + b^2}$.

当 $s = 0$ 时, 说明梁元垂直于 XOY 平面, 这时, 如果 $c > 0$, 则 \bar{X} 轴指向与 Z 轴相同

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

如果 $c < 0$, 则 \bar{X} 轴指向与 Z 轴相反

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

当 $\bar{O} Y'$ 与 $\bar{O} \bar{Y}$ 之间的夹角不等零时, 则还要把上述结果进行一次变换, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Z}_B \quad (57)$$

关于荷载列阵 \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_Q + \mathbf{P}_q + \mathbf{P}_t \quad (58)$$

式中: \mathbf{P}_Q —— 直接施加在节点上的节点力列阵;

\mathbf{P}_q —— 单元上均布荷载引起的节点力列阵.

$$\mathbf{P}_q = \Sigma \mathbf{P}_{mq} \quad (59)$$

$$\text{式中 } \mathbf{P}_{mq} = \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \cdot q dA \quad (60)$$

N ——形函数, 有关弯曲板元的 N_B 见附 1.

实践证明, 板元在横向均布荷载 q 的情况下, 可以按 $qA/3$ 移置到三个节点. 而在集中力 Q 作用在板元内应利用形函数来移置. 这时设 Q 的作用点坐标为 (X_P, Y_P) , 则只要将 X_P 和 Y_P 的值代入板弯曲元的形函数 N_B 中, 再乘以 Q 值, 就可以得到 P_{mQ} , 即

$$P_{mQ} = N^T_B(X_P, Y_P) \times Q \quad (61)$$

P_t ——由于变温引起的节点力列阵

$$P_t = \sum P_{mt} \quad (62)$$

式中 P_{mt} ——由于变温引起的单元节点力列阵

$$P_{mt} = \int_{A_0} B^T D \epsilon_0 dA \quad (63)$$

式中 ϵ_0 ——初应变列阵, 由变温的性质而确定的应变列阵, 例如在单元变温为常数的情况下所引起平面应力问题的初应变为

$$\epsilon_0 = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

式中: α ——材料的线膨胀系数;

T ——变温的度数.

本程序对各种节点作以下的处理

1. 节点的约束处理

本程序由机器自动对节点位移未知量编号矩阵 (或叫定位向量), 来处理各种约束情况采用

- 3 ——表示虚节点;
- 2 ——表示相关节点;
- 1 ——表示节点在这个位移方向无约束;
- 0 ——表示节点在这个位移方向有约束;
- 1 ——非有效的位移未知量;
- 2 ——对于共面节点所应该删去的位移未知量; 因为平板壳元每个节点只有五个位移未知量, 如果某节点周围的单元全在一个平面内时, 就应该删去使该平面旋转的未知量分量.
- 3 ——虚节点.

(-1、-2、-3 为打印出来的结果, 而输入的信息只能填 0、1、2、3).

2. 对于共面节点的处理

假设平面垂直于 Z 轴, 则 $\bar{\theta}_z = 0$.

$\therefore \bar{\theta}_z = \theta_x \cos(\bar{Z}, X) + \theta_y \cos(\bar{Z}, Y) + \theta_z \cos(\bar{Z}, Z)$, 于是得到

$$\theta_x \lambda_{\bar{z}, x} + \theta_y \lambda_{\bar{z}, y} + \theta_z \lambda_{\bar{z}, z} = 0 \quad (65)$$

式中: $\lambda_{\bar{z}, x}$ 、 $\lambda_{\bar{z}, y}$ 、 $\lambda_{\bar{z}, z}$ ——局部坐标系 \bar{Z} 轴的方向余弦。

由 (65) 式知, 如果 $|\lambda_{\bar{z}, z}| \approx 1$, 则 $\theta_z = 0$, 这时第六个未知量编号为 -2;

$|\lambda_{\bar{z}, y}| \approx 1$, 则 $\theta_y = 0$, 这时第五个未知量编号为 -2;

$|\lambda_{\bar{z}, x}| \approx 1$, 则 $\theta_x = 0$, 这时第四个未知量编号为 -2.

3. 对于给定位移的节点处理

如果某一位移分量 (u_i) 已知, 设 $u_i = c$, 则用

$$K_{ij} u_j = kc \quad (66)$$

来修正 (46) 式的主对角线元素与相应的右端项, 只要 k 的值取得足够大 (这里取 10^{12}), 计算结果 $u_i = c$.

4. 对于弹性支承节点的处理

如果在节点的某一位移未知量 u_j 方向有弹性支承, 则认为 u_j 是无约束的, 但应在 u_j 的方向加一个弹簧, 并将相应的弹簧刚度 k_s 迭加到主对角线元素 K_{jj} 上.

五、计算实例

例题中尺寸单位未注明者, 均为 t, m 或 kg, cm .

例 1 以图 5 的双曲扭壳为例, 周边固定. $E = 28500$, $\mu = 0.4$, 壳厚 $t = 0.8$, 在自重 0.01 作用下, 表 1 列出 4×4 网格的各点竖向位移值.

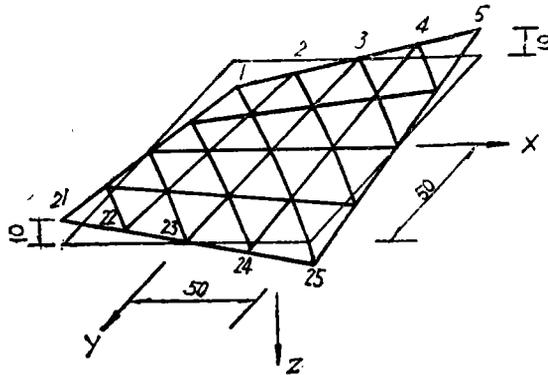


图 5

表 1 4×4 网格几点的竖向位移值

点 号	8	12	13*	14	18
挠 度	0.0277	0.0277	0.0305	0.0277	0.0277

*在 *AFDDL-TR-68-150* 第 635 页: 27 个自由度曲面元的结果为 0.0345;

36 个自由度曲面元的结果为 0.0275.

例 2 图 6 为钢筋混凝土框架与剪力墙的平面组合结构, $E = 2000000$, $\mu = 0.17$, 墙厚 0.10, 1~5 梁截面 0.4×0.4 , 11~15 梁截面 0.4×1.0 , 1~21 柱截面 0.4×0.8 , 5~25 柱截面 0.4×0.4 , 水平荷载 5 作用在 1 点, 2.5 作用在 11 点.

表 2 列出 1 点和 11 点的位移及内力。

表 2 位移和内力

位移		u	v	θ_z
点号				
1		-0.00059	-0.00009	.00007
11		0.00033	-0.00008	.00004
内力(梁)		N (轴力)	Q (剪力)	M (弯矩)
点号				
1		2.45	0.25	0.23
11		2.15	1.32	1.58

显然，这个结果比起不考虑剪力墙作用的纯框架的位移和内力小得多了。

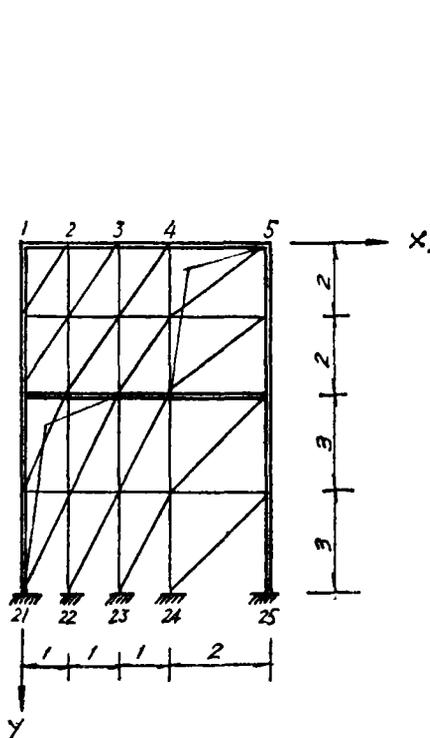


图 6

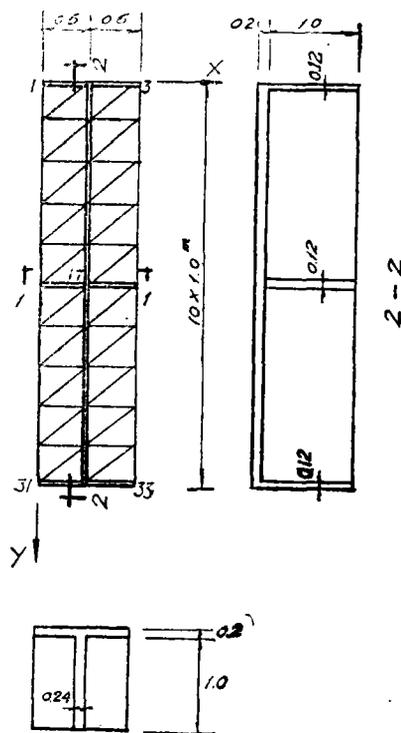


图 7

例 3 图 7 所示 T 形截面简支梁，仅支承在节点 2 和 32 点，铰接在板中面上。梁由一块翼板和一道纵梁、三道横梁组成。荷载 1 单位作用在 17 点。

纵梁的 $I_x = 0.00391$

$I_y = 0.02$

$I_z = 0.00115$

横梁的 $I_x = 0.000534$
 $I_y = 0.01$
 $I_z = 0.000144$

$E = 3.3 \times 10^4$, $\mu = 0.17$.

表 3 列出第 17 点的挠度和弯矩

表 3 挠 度 和 弯 矩

项 目 \ 资 料	本程序	材料力学解	矩形元**
挠 度	0.0001078	0.0001052	0.00010799
弯 矩	2.45*	2.50	2.47

* 未计入板单元的弯矩。

** 见郑州工学院土建系等：梁板组合桥跨结构计算程序。
1977.12.

本程序在三年来的试算过程中，试算一些结构物，很多兄弟单位与有关同志参与了这一工作，或者用不同的语言在不同机器上进行调试，使程序得到不断的完善与改进，特此表示感谢。

参 考 文 献

- [1] S 铁摩辛柯等，板壳理论，科学出版社，1977.
- [2] R. W. Clough 等，A Finite Element Approximation for The Analysis of Thin Shells, Int. J. Solids Structures 1968, Vol. 4, PP43—60.
- [3] G. P. Bazley 等, Triangular Elements in Plate Bending Conforming and Nonconforming Solution, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL—TR—66—88, AD646300, PP. 547—576, 1965.
- [4] 北京工业大学土建系，有限元法与结构计算程序，1977.3（第一版）或 1979.3（第二版）。
- [5] 赵超燮，陶振宗，消元分解法，北京工业大学学报，1979 年第 1 期。
- [6] 赵超燮，陶振宗，JJZ3 组合结构程序，1978 年高等学校结构力学交流会论文集第二集。

附 1 非协调弯曲板元的形函数

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} = & (Z_1^2(3-2Z_1) + 2Z_1Z_2Z_3 - Z_1^2(b_3Z_2 - Z_3b_2) - (b_3 - b_2)Z_1Z_2Z_3/2 \\
 & - Z_1^2(C_3Z_2 - Z_3C_2) - (C_3 - C_2)Z_1Z_2Z_3/2 + Z_2^2(3-2Z_2) + 2Z_1Z_2Z_3 \\
 & - Z_2^2(b_1Z_3 - Z_1b_3) - (b_1 - b_3)Z_1Z_2Z_3/2 - Z_2^2(C_1Z_3 - Z_1C_3) \\
 & - (C_1 - C_3)Z_1Z_2Z_3/2 + Z_3^2(3-2Z_3) + 2Z_1Z_2Z_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -Z_3^2(b_2Z_1 - Z_2b_1) - (b_2 - b_1)Z_1Z_2Z_3/2 \\
 & -Z_3^2(C_2Z_1 - Z_2C_1) - (C_2 - C_1)Z_1Z_2Z_3/2
 \end{aligned}$$

N 为 (1×9) 阶行阵, 式中:

$Z_1 = A_1/A, Z_2 = A_2/A, Z_3 = A_3/A$ —— 面积坐标.

$$b_1 = Y_2 - Y_3, b_2 = Y_3 - Y_1, b_3 = Y_1 - Y_2,$$

$$C_1 = X_3 - X_2, C_2 = X_1 - X_3, C_3 = X_2 - X_1.$$

—— 三角形板元三个节点的坐标差值.