

# 守恒律方程组的显式有限元格式及应用

季晓梅, 黄振侃, 齐 凯

(北京工业大学 应用数理学院, 北京 100022)

**摘 要:** 为了模拟爆轰波在轴对称的变截面激波管中的运动, 采用柱坐标系下多维双曲型守恒律方程组的显式有限元方法, 得到好的数值效果. 该格式保证了统一非线性稳定性, 适合于对流占优的问题和 multidimensional 非线性双曲型守恒律间断解计算. 在爆轰波的数值模拟中, 对变  $\gamma$  和状态方程的处理, 具有创造性.

**关键词:** 守恒律; 有限元方法; 爆轰波

**中图分类号:** O 175.29

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0254 - 0037(2006)11 - 1047 - 05

近年来, 在非结构网格上求解双曲型守恒律方程和方程组的间断解成为计算数学的前沿问题. 先后出现了 Runge-Kutta 间断 Galerkin 有限元方法、有限体积法、多尺度算法等. 任何格式在间断解附近收敛阶不可能是高阶的, 只有对光滑解, 才可能有高阶收敛性. 在文献[1]的基础上, 得到柱坐标系下多维双曲型守恒律方程组的显式有限元格式. 在格式中, 限制器控制数值解梯度在每个单元上变化剧烈, 对一维和多维问题都能统一处理, 且保证统一的非线性稳定, 对强间断有高分辨率, 对光滑解的逼近程度高. 本文重点模拟爆轰波在轴对称的变截面激波管中的运动, 对变  $\gamma$  和状态方程的处理有创造性. 该格式可用于进行大规模科学工程计算.

## 1 格式的推导

在实际问题中, 有时要处理旋转的绕流问题. 其特点是有一个对称轴, 和对称轴垂直的任意截面都是圆心在对称轴上的圆. 如果来流平行于对称轴, 整个流动是对称的, 流体质点的运动都在通过对称轴的平面上.  $v_\theta = 0$  在空间中任取一点 A, 将它绕对称轴旋转一周得到圆上各点的物理量取相同的值. 因此, 只要研究通过对称轴平面的流体运动即可, 它代表了平面的流体运动. 该平面上的任意一条曲线代表以它为母线的旋转面.

在柱坐标系下, 三维轴对称情形下的理想气体的运动方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_z \\ \rho u_r \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_z^2 + p \\ \rho u_z u_r \\ u_z(e + p) \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \rho u_r \\ r \rho u_z u_r \\ r \rho u_r^2 \\ r u_r(e + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

设  $(\rho, \rho u_z, \rho u_r, e)^T|_{t=0} = u_0$ , 加入黏性项后, 方程组变为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_z \\ \rho u_r \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_z^2 + p \\ \rho u_z u_r \\ u_z(e + p) \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \rho u_r \\ r \rho u_z u_r \\ r \rho u_r^2 \\ r u_r(e + p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla(\epsilon \nabla \rho) \\ \nabla(\epsilon \nabla(\rho u_z)) \\ -\frac{\partial p}{\partial r} + \nabla(\epsilon \nabla(\rho u_r)) \\ \nabla(\epsilon \nabla e) \end{pmatrix}$$

收稿日期: 2004-12-17.

基金项目: 北京工业大学校青基金资助(JQ0602200369), 北京工业大学博士科研启动基金资助(4010005701001), 北京市自然科学基金资助(1042006), 教育部留学回国人员科研启动基金资助(2004176).

作者简介: 季晓梅(1970-), 女, 江苏省无锡市人, 副教授.

式中  $\epsilon$  随网格的变化而变化. 记  $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_z \\ \rho u_r \\ e \end{pmatrix}$ . 弱解的提法为找  $U \in H^1(R^2), \nabla\varphi \in H^1(R^2)$ , 使

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{R^2} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_z \\ \rho u_r \\ e \end{pmatrix} \cdot r \varphi dx - \int_{R^2} \begin{pmatrix} \rho u_z & \rho u_r \\ \rho u_z^2 + p & \rho u_r u_z \\ \rho u_z u_r & \rho u_r^2 + p \\ u_z(e+p) & u_r(e+p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{pmatrix} \cdot r dx + \\ & \int_{R^2} \epsilon \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial z} & \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} & \frac{\partial \rho u_z}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho u_r}{\partial z} & \frac{\partial \rho u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial e}{\partial z} & \frac{\partial e}{\partial r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{pmatrix} \cdot r dx = \int_{R^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varphi dx \end{aligned}$$

初始条件为

$$\int_{R^2} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_z \\ \rho u_r \\ e \end{pmatrix} \cdot \varphi \cdot r |_{t=0} dx = \int_{R^2} \varphi \cdot r \cdot u_0 dx.$$

在二阶有限元格的基础上<sup>[1]</sup>, 作者推导了三维轴对称区域下的有限元格式, 令空间  $R^2$  被剖分成三角形单元, 用  $T$  表示. 所作的剖分及假设同文献[1]. 有类似于文献[1]的 2 个恒等式, 边界条件的处理也类似.

(a) 如果  $u, v \in P_1(T)$ , 则

$$\int_T r \cdot \nabla u \cdot \nabla v dx = \sum_{i < j} a_{ij}^T (u_i - u_j)(v_j - v_i);$$

(b) 如果  $v \in P_1(T)$ ,  $c$  是常量, 则

$$\int_T r \cdot c \cdot \nabla v dx = \sum_{i < j} a_{ij}^T c T E h_{ij} (v_i - v_j)$$

其中  $u_i, u_j, v_i, v_j$  分别为  $u, v$  在节点  $X_i, X_j$  上的值

$$a_{ij}^T = \int_T r \cdot \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dx, \varphi_i, \varphi_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

对给定的时间步长  $\Delta t$ , 格式的解  $u_i^n = u(X_i, n\Delta t)$ . 它取分片线性函数且连续. 从  $t = n\Delta t$  开始, 由已知的  $u_i^n = u(X_i, n\Delta t)$  得到  $u_i^{n+1} = u(X_i, (n+1)\Delta t)$ ,  $v$  也同样取为分片线性函数. 半离散化格式为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_i} \frac{du_i^n}{dt} r \cdot \varphi_i dx + \sum_{T \in T_1} \sum_{j \in I_T} a_{ij}^T J(u_i^n, u_j^n) h_{ij} + \sum_{T \in T_2} \left\{ \sum_{j \in I_T} \epsilon_{T\alpha} a_{ij}^T (u_j^n - u_i^n) - \right. \\ & \left. \int_T r \cdot f(u^n) \cdot \nabla \varphi_i dx \right\} = \int_{\Omega_i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varphi_i dx. \end{aligned}$$

仍类似于文献[1-2]方程组的二阶格式的推导, 为了得到显示格式, 采用通常的“质量集中”思想作近似  $\int_{\Omega_i} \frac{du_i^n}{dt} \varphi_i dx \approx A_i \frac{du_i^n}{dt}$ . 其中,  $A_i = \int_{\Omega_i} r \cdot \varphi_i dx$ . 下面用 Runge-Kutta 方法作时间方向上的离散<sup>[3-4]</sup>

$$K_i^n = -\frac{\Delta T}{A_i} \sum_{T \in T_1} \sum_{j \in I_T} a_{ij}^T J(u_i^n, u_j^n) h_{ij} - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{T \in T_2} \sum_{j \in I_T} \epsilon_{T\alpha} a_{ij}^T (u_j^n - u_i^n) -$$

$$\int_T r \cdot f(u^n) \cdot \nabla \varphi_i dx + \sum_{T \in \Gamma} \frac{\Delta t}{A_i} \int_{T_i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varphi_i dx.$$

$\omega_j^n = u_j^n + K_j^n, \forall j$ . 设  $\omega^n$  的  $\omega_j^n$  线性插值函数, 令

$$\hat{T}_1 = \{T \in \Gamma; |\nabla \omega^n| > C_0, x \in T\}, \hat{T}_2 = \{T \in \Gamma; |\nabla \omega^n| \leq C_0, x \in T\},$$

其中  $C_0$  为一个正的常数, 它起限制器的作用. 再令

$$L_i^n = -\frac{\Delta t}{A_i} \sum_{T \in \Gamma_1} \sum_{j \in I_T} a_{ij}^T J(\omega_i^n, \omega_j^n) h_{ij} - \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{T \in \Gamma_2} \sum_{j \in I_T} \varepsilon_T a_{ij}^T (\omega_j^n - \omega_i^n) -$$

$$\int_T r \cdot f(\omega^n) \cdot \nabla \varphi_i dx + \frac{\Delta t}{A_i} \sum_{T \in \Gamma} \int_T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varphi_i dx$$

$$J(\omega_i, \omega_j) = \varepsilon_1 \left( \int_{x_i}^{x_j} Y ds \right)^{-1} ((Y\omega)_j - (Y\omega)_i)$$

其中  $Y$  的计算以  $\omega^n$  代替  $u^n$ , 则有限元格式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{2} (K_i^n + L_i^n), u_i^0 = \int_{\Omega_i} \frac{r \cdot u^0 \varphi_i}{A_i} dx.$$

## 2 爆轰波的算法分析

爆轰驱动技术已成为当前高温高焓实验设备的主流. 在三维轴对称情形下的理想气体的非定常流动基础上进行的 C-J 爆轰波的数值计算. 模拟了爆轰波在变截面激波管的运动规律.

激波管中, 激波后流场的均匀性直接影响实验气流的品质. 正向爆轰驱动产生高强度激波<sup>[5]</sup>, 在传播过程中发生衰减, 影响了波后流场的均匀性. 由于爆轰波特有的高温, 高压及其伴随的 Taylor 稀疏波的特点, 使得爆轰驱动产生的强激波衰减与常规激波风洞产生的激波衰减有明显的不同. 实验表明: 爆轰驱动产生的强激波衰减与驱动方式和驱动状态密切相关. 爆轰驱动是将氢氧混合气按一定比例冲入激波风洞的驱动段(又称为爆轰段), 用高能点火装置将混合气引爆, 将爆轰后的气体作为激波风洞驱动气源的一种驱动方式. 一般分为正向爆轰和反向爆轰. 在传统的反向爆轰中, 爆轰波的波尾被用作高压驱动气体, 用这种方式能获得较长的实验时间, 所得到的压力, 温度不如由自由活塞激波管产生的高. 原因有 2 个方面: 一是驱动气体的压力只有 C-J 压力的 39%, 二是爆轰波的动能没有利用. 在传统的正向爆轰中, 尽管能得到更高的温度和压力, 但是由于爆轰波后面 Taylor 膨胀波的影响, 所得到的高温高焓气流不如传统的反向爆轰所得到的气流稳定. 为克服这 2 个方面的困难, 采用变截面激波管<sup>[6]</sup>模拟爆轰过程中, 流体力学的控制方程一般是可压的 Euler 方程或者可压的 Navier-Stokes 方程, 同时, Chapman-Jouguet 的理论也起着关键的作用. 建立的爆轰模型中, 控制方程是柱坐标系下的可压的 Euler 方程组. 假定化学反应的速度是无穷大, 不考虑反应层的厚度.

反映爆轰波在化学反应阶段的状态方程为  $e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \rho w^2 + \rho \cdot q$ , 其中,  $q$  为每单位质量化学能的变化, 近似地把  $q, \gamma$  看成是  $\rho$  的分片线性函数. 在爆轰波的附近, 适当取个质点  $x_i$ , 取  $\rho^0 < \rho^1$  用  $\hat{x} = x_i + (u_i^n + c_i^n) \Delta t$  跟踪爆轰波. 其中,  $u_i^n, c_i^n$  通过  $\hat{x}$  所在的三角形网格上, 利用  $t = n \Delta t$ , 可得到  $u, c$  的线性插值在该点上的值. 当  $x > \hat{x}$  时,

$$q = \begin{cases} Q_0 & \rho < \rho^0 \\ \frac{Q_0}{\rho_0 - \rho^1} (\rho - \rho^0) + Q_0 & \rho^0 \leq \rho \leq \rho^1 \text{ 及 } \gamma = \begin{cases} \gamma_0 & \rho < \rho^0 \\ \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\rho^0 - \rho^1} (\rho - \rho^0) + \gamma_0 & \rho^0 \leq \rho \leq \rho^1 \\ \gamma_1 & \rho > \rho^1 \end{cases} \\ 0 & \rho > \rho^1 \end{cases}$$

当  $x \leq \hat{x}$  可认为是离爆轰波较远的区域,  $q = 0, \gamma = \gamma_1$  为已燃气, 在变截面的计算上也适用. 在原有的格式上对状态方程以上的调整, 对  $\gamma, q$  在三角形网格上作线性插值. 先在等截面激波管上作数值实验, 在进入变截面激波管计算, 用某时刻精确解作初值的基础向上求解. 这样的近似, 能较真实地反应爆轰波作用的规律.

对变  $\gamma$  的处理也是计算的核心.  $q = 0$  由于化学反应结束, 对于不同介质界面的计算, 都采用 Lagrange 坐标. 在 Euler 坐标系下, 根据流体力学的理论,  $\frac{\partial \gamma}{\partial t} + (u, v) \cdot \nabla \gamma = 0$ , 采取特征线方法  $\gamma(x_i - u \cdot \Delta t, y_i - v \cdot \Delta t, (n-1) \cdot \Delta t) = \gamma(x_i, y_i, n \cdot \Delta t)$ , 是最简洁的处理方法. 在柱坐标系下的 Euler 方程组中,  $\gamma$  的方程与其他方程关联不是特别密切, 可以单独处理. 此时, 状态方程为  $e = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \rho v^2$ . 同一网格中的不同介质按线性插值处理. 将驱动阶段爆轰波冲破隔膜时刻的解作为初值向上求解, 对  $\gamma$  在三角形网格上作线性插值. 计算整个管子就需近万个点, 由于爆轰波涉及到的物理量基本上是大尺度, 适当地进行无量纲化, 转化为小尺度问题进行计算. 这样, 能捕捉到尖锐的激波和接触间断. 令:  $z' = \frac{z}{X'}, r' = \frac{r}{X'} u' = \frac{u}{U'} = \frac{v}{V'} = \frac{p}{P'} = \frac{e}{E}$  得到关于  $z', r', u', v', p', e'$  的方程组, 它具有相似不变性. 利用方程组的二阶显式有限元格式求解方程组, 就得到原方程组的解, 这样取得了很好的效果. 对称轴上压力分布较真实地反映了爆轰波由变截面收缩段挤入直管后, 在较长一段距离内, 流场的分布特点及爆轰波的运动规律.

### 3 爆轰波的数值例子

设初始温度  $T = 288.5 \text{ K}$ . 水蒸汽的绝热指数  $\gamma_1 = 1.219$ ,  $\text{H}_2, \text{O}_2$  混合气和压缩的绝指数为  $\gamma_0 = 1.4$ , 单位质量的气体反应能  $Q_0 = 8.39 \times 10^6 \text{ J/kg}$ , 初始压力  $p_0 = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ . 当化学反应结束后, 爆轰波以极大的速度冲破隔膜, 这时, 未燃气为压缩空气, 状态  $(\rho_0, u_0, v_0, p_0) = (0.49059, 0.0, 0.0, 0.0162)$ . 把第 1 阶段计算得到各节点上的物理量作为已燃气的初始状态, 取 10 024 个节点, 18 691 个三角形单元,  $\Delta t = 0.00005, \epsilon_1 = 0.005$ . 从对称轴上的压力变化, 能清晰地反映出爆轰波在变截面部分发生的反射、相交和汇聚等现象, 形成渐进的一致稳定的高熵流. 图 1 为相应于爆轰波的波前刚刚到达变截面的状态, 仍然保持自相似解. 可以观察到典型的 Taylor 膨胀波, 它由爆轰的波前、膨胀波和均匀压力流组成. 图 2 为激波汇聚形成压力脉冲, 生成上行波和下行波出现爆轰过驱动的情形. 压力峰值比 C-J 压力略高, 相应于在很短的时间内, 激波在对称轴上合并情形, 激波沿变截面反射, 反射的结果造成上行激波压力升高, 弥补稀疏波引起的压力下降. 这个激波很快合并成 1 个几乎垂直于对称轴的激波. 图 3 为爆轰波的波前, 图 4 为激波的波前, 波的反射会重复出现, 这些波的反射会在这一区域内产生非常大的压力流. 结果压力峰值是爆轰波波前初始压力的值的 40 倍. 一般气流穿过激波, 总焓不变. 但是, 这样设计的正向爆轰, 由于变截面的加速作用, 使得总焓升高. 由于压力峰值衰减得非常快, 所得到的渐进的几乎均匀稳定的气流的压力值只有 C-J 压力的 70%.

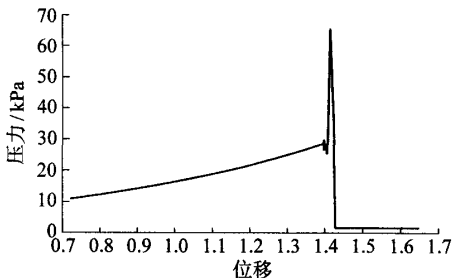


图 1 爆轰波的自相似解

Fig. 1 Self similar solution of detonation wave

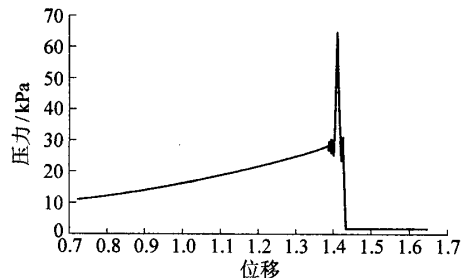


图 2 爆轰驱动激波的情形

Fig. 2 Detonation drives shocks

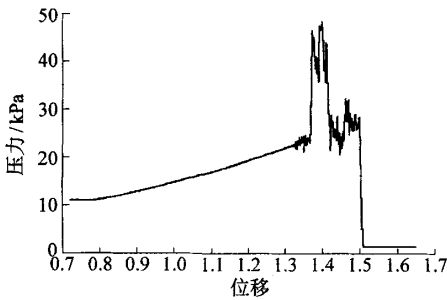


图 3 爆轰波的波前  
Fig. 3 Detonation front

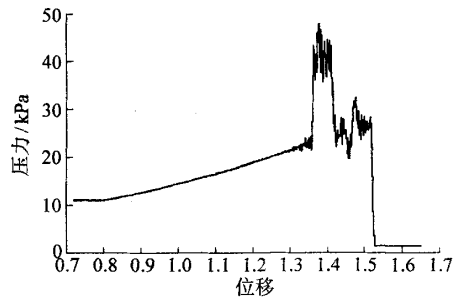


图 4 激波的波前  
Fig. 4 Shock front

## 4 结论

本文给出了爆轰波的算例, 通过算例分析可知存在激波的衰减, 因此在激波管内造成更加均匀稳定的实验气流是完全可能的。

### 参考文献:

- [1] YING Long-an, JI Xiao-mei, DENG Jiong. A second-order explicit finite element scheme for multi-dimensional systems of conservation laws(Chinese)[J]. Math. Numer. Sin., 2001, 23(3): 321-332.
- [2] 季晓梅. 多维守恒律方程的二阶有限元格式及应用[D]. 北京: 北京大学数学科学学院, 2000.  
JI Xiao-mei. The second-order finite element scheme to systems of multi-dimensional conservation laws and its application[D]. Beijing: School of Mathematic Science, Peking University, 2000. (in Chinese)
- [3] 李开泰. 有限元方法[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1988.
- [4] 陆金甫, 顾丽珍, 陈景良. 偏微分方程差分方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [5] 周毓麟. 一维不定常流体力学[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [6] JIANG Zong-lin, YU Hong-ru, TAKAYAMA K. Investigation into converging gaseous detonation drivers[C]// 22nd International Symposium on Shock Waves, Imperial College, London, 1999, 7: 18-23.

## Explicit Finite Element Scheme for the Hyperbolic Conservation Laws

JI Xiao-mei, HUANG Zhen-kan, QI Kai

(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

**Abstract:** In order to simulate the motivation of detonation wave in the axis-symmetry shock tube with converging cross-sections, we use an explicit finite element scheme for nonlinear multi-dimensional hyperbolic conservation laws, and obtain satisfactory computing results. The scheme is uniformly guarantees nonlinear stability, which is suitable for solving convection dominated problems and providing continuous solutions to nonlinear multi-dimensional hyperbolic conservation laws. In the numerical simulation of detonation wave, the idea to deal with the argument  $\gamma$  and the state equation is creative and the scheme can be used in the scientific computing on a large scale.

**Key words:** conservation laws; finite element method; detonation wave