第 18 卷 第 1 期　　北 京 工 业 大 学 学 报　　Vol.18, No.1
1992 年 3 月　　JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY　　Mar, 1992

# 有限集合上的函数和关系的完全理论中的两个未解决的问题

**杨安洲**

（应用数学系）

令 $X=\{0,1,\cdots,n-1\}$，$n$ 是自然数；若 $S$ 是集合，则用 $|S|$ 表示 $S$ 的基数（$S$ 中元素的个数）.

定义 1　令 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\cdots$ 是可数无穷多个独立的变元，任一独立变元 $x_m$ 的取值范围为 $X$；$X^m=X\times X\times\cdots\times X$（$i.e.\ m$ 个 $X$ 的笛卡尔乘积）；命 $\mathbb{F}(X)=\{f: f$ 是函数 & $(\exists m)$（$f$ 的定义域 $=X^m$）& $f$ 的值域 $\subseteq X\}$；若 $S\subseteq\mathbb{F}(X)$ 满足 $(\forall f\in\mathbb{F}(X))(\exists f_1,\cdots,f_k\in S)(f=f_1 f_2\cdots f_k)$，这里的乘积是指"函数的复合"，则称 $S$ 是 $\mathbb{F}(X)$ 的一个生成子集；说 $S$ 是独立的，意指 $S$ 中任一函数不能由 $S$ 中其余的某有限个函数经"函数复合"（有限次）而得到.

问题 1　令 $k\geqslant 1$，$\mathbb{C}=\{S: S$ 是 $\mathbb{F}(X)$ 的生成子集 & $S$ 是独立的$\}$，$\mathbb{C}_k=\{S_k: S_k\in \mathbb{C}\ \&\ |S_k|=k\}$，问 $|\mathbb{C}_k|=?$

（注 1　同样的，对于"偏函数"类 $\mathbb{F}^*(X)=\{f: f$ 是函数 & $(\exists m)$（$f$ 的定义域 $\subseteq X^m$）& $f$ 的值域 $\subseteq X\}$ 而言，也可提出类似于问题 1 的问题）.

定义 2　令 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots\cdots$ 是可数无穷多个独立的变元，独立变元的取值范围是 $X$，$X^m$ 是 $m$ 个 $X$ 的笛卡尔乘积，命 $\mathbb{R}=\{R:(\exists m)(R\subseteq X^m)\}=\bigcup_{m=0}^{\infty}\mathbb{R}_m=\bigcup_{m=0}^{\infty}\{R_m: R_m\subseteq\mathbb{R}_m\}$，对于 $R_m\in\mathbb{R}_m$ 可把这样的 $R_m=\{(x_1,\cdots,x_{m-1},x_m):(x_1,\cdots,x_{m-1},x_m)\in \mathrm{R}_m\}=R_m(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1},x_m)$ 理解作"多值函数" $x_m=f_{R_m}(x_1,\cdots,x_{m-1})$（$i.e.\ (x_1,\cdots,x_{m-1},x_m)\in R_m \rightleftarrows x_m=f_{R_m}(x_1,\cdots,x_{m-1})$），看作是由 $x_1,\cdots,x_{m-1}$ 的一组"值"对应到 $x_m$ 的"多个值"，$x_m$ 的"值"也在 $X$ 中，没有值时可令其为 *）；当对"多元关系（例如 $\mathrm{R}_k$）"（或"多值函数"）进行"关系的复合运算"时可把 $R_m(x_1,\cdots,x_{m-1},x_m)$ 理解作"多值函数 $x_m=f_{R_m}(x_1\cdots,x_{m-1})$ 的'值'"，可把它（$R_m$ 或 $f_{R_m}$）填入关系 $S(\cdots\cdots\square\cdots\cdots)$ 中的空位$\square$ 上，这样就定义好了"关系的复合运算"，$i.e.$ 中间过程中理解作"多值函数的'函数值'"，最后仍理解作"多元关系"；若略去了变元之后，则可简洁地写成"关系的乘积形式"；若 $S\subseteq\mathbb{R}$ 满足 $(\forall R\in\mathbb{R})(\exists R^{(1)},\cdots,R^{(l)}\in S)(R=R^{(1)}\cdots R^{(l)})$，则称 $S$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个生成子集；同样的，对 $S$ 而言也有独立的概念（参考定义 1）.

问题 2　令 $k\geqslant 1$，$\mathbb{C}_k=\{S_k: S_k$ 是 $\mathbb{R}$ 的生成子集 & $S_k$ 是独立的 & $|S_k|=k\}$，问 $|\mathbb{C}_k|=?$

（注 2　对于问题 1 与问题 2 中的 $\mathbb{C}_k$ 还可提出这样的问题：$\mathbb{C}_k$ 中的 $S_k$ 之间有什么关系，如何相互表出，如何得到 $\mathbb{C}_k$ 中的任一 $S_k$ 等等更为深入一些、更困难一些的问题）

收稿日期：1991－03－17.