# 所有的具有参数为自然数以及Aleph的一般的连续统假设之间以及与选择公理之间相互关系的问题*

数学教研室 杨安洲

本文是[2[、[3]的提要形式。

$GCH(u,v)$是$\forall n\forall m\ (m^u\leqslant n\leqslant 2^{m^v}\Longrightarrow n=m^u\vee n=2^{m^v})$，其中$m$，$n$是无穷基数，$u$，$v$是自然数以及$Aleph$，$u\cdot v\neq 0$。把$GCH(u,v)$简记为$GCH(u)$，而$GCH(1)$即是通常的一般连续统假设$GCH$（这里是指基数形式的，而不是指$Aleph$形式的$(\forall r\epsilon on)\ (2^{\aleph_r}=\aleph_{r+1})$）。用$AC$表示选择公理。$C_r$是$2^{\aleph_r}=\aleph_{r+1}=\aleph_r^+$。$C^{(\alpha)}$是$(\forall r\epsilon on)(\aleph_r^{\aleph_\alpha}=\aleph_r\Longrightarrow C_r)$。$E^*(u,v)$是$\forall m(m^u=m^v)$。

**定理1.** $GCH(u,v)\Longrightarrow AC$。

**推论.**（[2]） 当$u,v$是自然数时，$GCH(u,v)\Longleftrightarrow GCH$。

运用[2]中的方法（先证$GCH(\aleph_\alpha)\Longrightarrow AC$）可得到它的证明。若用定理1. 则可简化[2]中结果的证明。

**定理2.** $GCH\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}GCH(\aleph_0)\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\cdots\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}GCH(\aleph_\alpha)\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\cdots\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}GCH(\aleph_\beta)\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\cdots\cdots\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}AC$，$(\alpha,\ \beta\epsilon on,\ \alpha<\beta)$。

先证明三个引理：①. $GCH(\aleph_\alpha)\Longleftrightarrow AC\&C^{(\alpha)}$；②. $GCH(\aleph_\alpha)\Longleftrightarrow GCH(\aleph_{\alpha+1})\&2^{2^{\aleph_\alpha}}=(2^{\aleph_\alpha})^+\&(\forall_r,\delta\epsilon on)(\delta\geqslant\alpha+2\&\aleph_\delta^{\aleph_\alpha}=\aleph_r\&\aleph_r^{\aleph_{\alpha+1}}\neq\aleph_r\Longrightarrow C_r)$；③. $GCH\Longleftrightarrow GCH(\aleph_0)\&2^{\aleph_0}=\aleph_1\&(\forall r\epsilon on)(r\geqslant 2\&\aleph_r^{\aleph_0}\neq\aleph_r\Longrightarrow C_r)$；然后用$Cohen$-$Solovay$-$\check{V}openka$定理（见[1]）就能得到证明。

**定理3.** 当$u<v\ (v\epsilon Alephs)$时，$GCH(u,v)$是不成立的；当$u\geqslant v\ (v\epsilon Alephs)$时，$GCH(u,v)\Longleftrightarrow GCH(u)$。

定理的后半部分的证明是容易的；定理的前半部分用以下三个引理：①. $GCH\ (u,v)$

---

* 本文是1977年8月数理逻辑专业会议上的报告之一。

$\Longleftrightarrow GCH(v) \& E^*(u,v)$，$(u<v,\ v\in Alephs)$；②．在$AC$下 $\overline{\overline{W}}(u)=\{\aleph_\tau:\aleph_\tau\in Alephs \,\&\, \aleph_\tau^u=\aleph_\tau\}$是眞类（*Proper Class*)；③．在$AC$下当$u<v$（$v\in Alephs$)时有$(\forall\aleph\in Alephs)(\exists\delta_0\in on)(\aleph_{\delta_0}>\aleph \,\&\, \aleph_{\delta_0}^u=\aleph_{\delta_0} \,\&\, \aleph_{\delta_0}^v>\aleph_{\delta_0})$，就能得到其证明。

由定理1.—3.可知，所有的具有参数为自然数以及 *Aleph* 的一般的连续统假设之间以及与选择公理之间相互关系的问题就得到了彻底的解决。

## 参考文献


[1]. Jech, T.J., Lectures in set theory, Berlin-Heidelberg New York, 1971.

[2]. 杨安洲，关于一般的连续统假设与选择公理的两个定理，数学学报，18,294—296,1975.

[3]. 杨安洲，具有参数的一般的连续统假设与选择公理，北京工业大学学报，1(1978).