

# 非线性波在动脉内传播的理论

伍时桂

李兆治<sup>(1)</sup>

(北京工业大学)

(纽约州立大学)

【摘要】提出了一个新的非线性脉搏波在动脉内传播的理论模型，推导了一个新的血管壁—外周组织系统的非线性运动方程组。这组运动方程与代表血液流动的粘性不可压缩运动的方程、连续方程以及流体和血管壁本构方程相结合，可用数值方法求解非线性脉搏波在动脉内的传播。其数值解包含压力脉搏波、血流速度波和血流量波以及血管壁的波动和变形等。

关键词：非线性脉搏波，数学模型，血管壁的运动方程，外周组织，本构方程

在我们早期的文章中<sup>[1]~[3]</sup>，曾经探讨了动脉血管非线性力学性质，建立了大血管的非线性粘弹性数学模型及非线性弹性数学模型。这两个理论模型可应用于动脉壁的力学分析和非线性脉搏波传播问题的研究。这项研究，是为了在具有外周组织的动脉血管中，对非线性脉搏波传播现象的一个定量描绘。本文是这个研究的第一部分，主要是从理论上探讨血管—结缔组织系统的运动方程及非线性脉搏波传播的数学模型。有关这个数学模型的某些简化及其数值解问题，将在作者的后继文章中讨论。

血管的脉搏波传播现象及其动力学特性，在生理学、临床医学分析及生物医学工程应用上是很重要的，它们曾经是很多作者特别感兴趣和关注的研究对象。McDonald(1960)<sup>[5]</sup>、冯元桢(1968)<sup>[6]</sup>和Skalak(1980)等人<sup>[7]</sup>的著作，曾经对早期的研究做了深入的评论。血流脉搏波传播的第一个分析模型是由Morgan和Kiely(1954)<sup>[8]</sup>提出的，他们研究了粘性液体中一维线性化波的传播，并在该模型中把血管壁假设为线弹性、齐性和各向同性的圆筒。该模型还考虑了结缔组织的附加质量，但没有包含组织的约束。Womersley(1957)<sup>[9]</sup>也采用这样一个基本的数学模型，并加上一个纵向分布约束来模拟外周组织的影响。Jager(1965)<sup>[10]</sup>等人提出了一个厚壁管模型，但没有考虑组织的约束。另外，他们还采用各向同性材料的Hooke定律来模拟管壁的本构关系。Mirsky(1967)<sup>[11]</sup>也采用这个模型，但他把动脉壁模拟为具有Womersley约束的各向异性弹性体。一个完整的线性化脉搏波模型是Atabek<sup>[12]</sup>在1968年提出的。在他的模型中，外周组织被假定为具有惯性质量和摩擦的正交各向异性线性弹性振动系统，而动脉壁则用线性增量应力—应变关系来近似。虽然以上的理论模型能够给出脉搏波传播特性的一些近似的或定性的结果，但像所有其它线性化公式一样，都存在着这样或那样的问题。其一是，在模型中所引进的结缔组织参数是物理上含糊不清

本文于1988年1月20日收到。

\* 本文为国家自然科学基金会资助的课题。

(1) 李兆治教授(Dr. George C. Lee)为美国纽约州立大学布法罗分校理工学院院长。

的或很难从实验上确定的；其二是缺乏能在宽广范围内描绘血管壁和外周组织力学性质的本构关系。因此，以上线性化理论模型很难在非线性脉搏波传播的分析中推广和应用。

Lambert (1958)<sup>[13]</sup>, Anliker 等人(1971)<sup>[14]</sup>, Ling 和 Atabek(1972)<sup>[15]</sup> 以及其他几位作者探讨过脉搏波的非线性理论。但这些研究仅限于一维或拟一维波的传播，以及血管壁的弹性性质主要采用压力-面积（或压力-半径）的经验关系来表示，这些模型基本上不包含外周组织的影响。由于不直接包含血管壁和结缔组织的力学性质，现存的这些非线性理论在动脉脉搏波的分析上有相当大的局限性。

与旧的理论不同，本文建立了一个包含有血管壁和外周组织运动的一般非线性脉搏波传播的理论模型。在这一模型中，作者从基本力学定律以及血管和外周组织的非线性变形和运动出发，详细地推导了血管壁-外周组织系统的非线性运动方程组，其中仅含血管壁和流体的应力以及血管的非线性几何。血管壁的应力是采用作者所建立的动脉壁非线性本构方程给出，而血管内壁上的流体应力则由流体应力张量分量所组成的更一般的边界应力公式给出。由于这个运动方程组包含了更多的生理和力学因素，因此它们与血液流动方程相结合，可用于求解血流压力、速度、流量及血管壁的波动和变形等的非线性脉搏波在动脉血管内传播的问题。

## 1 基本假设

在本文的分析中要用到如下的重要假设：

(1) 血管壁是局部正交、各向异性、弹性和不可压缩的材料；(2) 血管是薄壁及可经受大变形的轴对称旋转体；(3) 作用在血管壁上的力将不会影响到血管壁的局部正交性，即流体和外周组织的应力仅影响到管壁内的应力和应变，但不会影响它们的正交性；(4) 主动脉及其外周组织被模拟为一个薄壁弹性介质，而对嵌入其它组织的动脉，其外周组织则模拟为有限或无限厚度的弹性介质。应力波在此种介质内的传播将随径向距离的增加而衰减；(5) 重力可忽略不计。

## 2 血管壁的运动方程

图1(a)表示了血管在血流脉搏波作用下的运动和变形。一般地，如果血管起初是一个圆

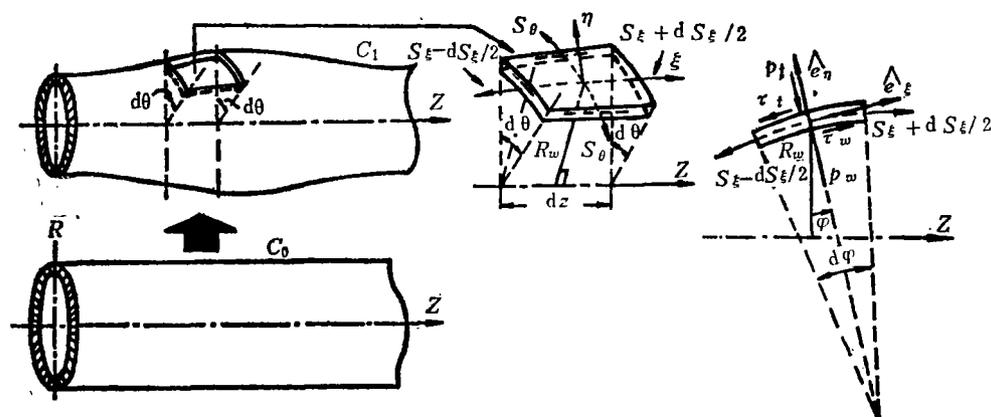


图1. 动脉的变形及作用于壁上的应力

筒或任意的旋转体,且流动是轴对称的,则血管在脉搏压力和血流作用下的运动和变形也将是轴对称的.血管的运动和变形可用柱坐标 $(z, \theta, r)$ 和中间曲面坐标 $(\xi, \theta, \eta)$ 等两个曲线坐标系来描绘.在后一个坐标系中, $\xi$ 是沿管壁中间面子午方向的弧长, $\eta$ 是垂直于中间面的法向坐标(见图1).令 $R_w$ 表示血管中间面的半径, $h$ 是壁厚.对轴对称脉搏波传播的问题, $R_w$ 和 $h$ 可认为仅是 $z$ 和时间 $t$ 的函数,即

$$R_w = R_w(z, t), \quad h = h(z, t) \quad (1)$$

如果血管为薄壁管且壁厚的时间变化可以忽略,方程(1)中的壁厚 $h$ 也可考虑作为常数.

我们取血管壁的一个微元段 $(dz, d\theta, h)$ 来进行分析.作用在该微元6个表面上的应力分别是: $(S_\xi - dS_\xi/2)$ ,  $(S_\xi + dS_\xi/2)$ ,  $S_\theta$ ,  $S_\theta$ ,  $(P_w, \tau_w)$ 和 $(P_l, \tau_l)$ (见图1(b)、和(c)).其中, $S_\xi$ 和 $S_\theta$ 是管壁的纵向和周向张应力; $P_w$ 和 $\tau_w$ 分别表示流体作用在管内壁上的壁法向应力和壁剪切应力; $P_l$ 和 $\tau_l$ 分别表示外周组织的约束法向应力和约束剪切应力.所有这6组力分量应与该微元管壁的惯性力平衡.下面我们分别按柱坐标和中间曲面坐标两种情况写出血管壁的运动方程.

## 2.1 柱坐标中的血管壁运动方程

血管壁运动方程可根据达朗伯原理由图1力系的平衡得到.柱坐标中沿 $z$ 和 $r$ 方向的血管壁运动方程可写为

$$\begin{aligned} \rho_e a_z^e = & (R_w h)^{-1} [1 + (\partial R_w / \partial z)^2]^{-1/2} \{ (P_l - P_w) R_w (\partial R_w / \partial z) \\ & + (\tau_w - \tau_l) R_w + (\partial / \partial z) [S_\xi h R_w (1 + (\partial R_w / \partial z)^2)^{-1/2}] \\ & + 0.5h(1 + (\partial R_w / \partial z)^2)^{-3/2} [1 + (\partial R_w / \partial z)^2 - R_w (\partial^2 R_w / \partial z^2)] \\ & [P_w + P_l] (\partial R_w / \partial z) - \tau_w - \tau_l \} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho_e a_r^e = & (R_w h)^{-1} [1 + (\partial R_w / \partial z)^2]^{-1/2} \{ (P_w - P_l) R_w + (\tau_w - \tau_l) \\ & X R_w (\partial R_w / \partial z) + (\partial / \partial z) [S_\xi h R_w (\partial R_w / \partial z) (1 + (\partial R_w / \partial z)^2)^{-1/2} \\ & - S_\theta h (1 + (\partial R_w / \partial z)^2)^{1/2} - 0.5h(1 + (\partial R_w / \partial z)^2)^{-3/2} \\ & + (\partial R_w / \partial z)^2 - R_w (\partial^2 R_w / \partial z^2)] \times [P_w + P_l + (\tau_w + \tau_l) (\partial R_w / \partial z)] \} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\rho_e$ 表示血管壁的密度, $a_z^e$ 和 $a_r^e$ 分别为相应于 $z$ 和 $r$ 方向的加速度分量.方程(2)和(3)可用于描绘具有一定厚度 $h$ 的血管壁运动.在管壁相当薄时,由于 $S_\xi$ 和 $S_\theta$ 跟 $(P_w/h)$ 基本上是同数量级的,相比起来,方程(2)和(3)中包含 $0.5h$ 的项也可忽略不计.因此,在薄壁血管的情况下,方程(2)和(3)可简化为

$$\begin{aligned} \rho_e a_z^e = & \frac{1}{h \sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} \left\{ (P_l - P_w) \frac{\partial R_w}{\partial z} + \tau_w - \tau_l \right. \\ & \left. + \frac{h}{R_w} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{S_\xi R_w}{\sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \rho_e a_r^e = & \frac{1}{h \sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} \left\{ P_w - P_l + (\tau_w - \tau_l) \frac{\partial R_w}{\partial z} \right. \\ & \left. + \frac{h}{R_w} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{S_\xi R_w}{\sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right) \right] \right\} - \frac{S_\theta}{R_w} \end{aligned} \quad (5)$$

方程(4)和(5)便为柱坐标中薄壁血管的非线性运动方程。

## 2.2 中间曲面坐标下的血管壁运动方程

如采用血管壁中间曲面的子午线及其法线为曲线坐标线，则血管壁的运动方程在形式上还要简单。类似于柱坐标情况的推导，若将所有作用在血管壁微元上的力和惯性力在  $\xi$  和  $\eta$  方向上投影，则可得中间曲面坐标的血管壁运动方程为

$$\rho_e a_\xi^e = \frac{1}{R_w \sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial z} (S_\xi h R_w) - S_\sigma \frac{\partial R_w}{\partial z} \right] + \frac{\tau_w - \tau_l}{h}; - \frac{1}{2R_w} (\tau_w + \tau_l) \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} + R_w K_\xi \right] \quad (6)$$

$$\rho_e a_\eta^e = \frac{1}{R_w \sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} [S_\xi R_w K_\xi + S_\sigma] + \frac{P_w - P_l}{h} - \frac{1}{2R_w} (P_w + P_l) \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} + R_w K_\xi \right] \quad (7)$$

其中  $a_\xi^e$  和  $a_\eta^e$  分别为相应于  $\xi$  和  $\eta$  方向的加速分量； $K_\xi$  为子午线的曲率，有

$$K_\xi = - \frac{\partial^2 R_w / \partial z^2}{[1 + (\partial R_w / \partial z)^2]^{3/2}} \quad (8)$$

在薄壁血管时，方程(6)和(7)中的最后一项也可忽略不计，于是方程(6)和(7)被简化为

$$\rho_e a_\xi^e = \frac{\tau_w - \tau_l}{h} + \frac{1}{R_w \sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (S_\xi R_w) - S_\sigma \frac{\partial R_w}{\partial z} \right] \quad (9)$$

$$\rho_e a_\eta^e = \frac{P_w - P_l}{h} - \frac{1}{R_w \sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} [S_\xi R_w K_\xi + S_\sigma] \quad (10)$$

在方程(2)、(3)或(4)、(5)及方程(6)、(7)或(9)、(10)中，加速度可用血管壁位移来表示；应力  $S_\xi$  和  $S_\sigma$  可借助血管壁本构方程表达为应变或位移的函数； $P_w$  和  $\tau_w$  是流速度的函数，可通过流体的本构方程表示。因此，在运动方程中仅外周组织的约束应力  $P_l$  和  $\tau_l$  是未知的，需要做特殊的研究。方程(4)和(5)或方程(9)和(10)是轴对称薄壁血管的一般非线性运动方程，无论血管壁的本构方程是弹性的还是粘弹性的均能适用。

## 2.3 血管壁的速度和加速度

现在让我们来推导血管壁加速度分量的表达式，它可按连续介质力学方法建立。令  $\vec{u}$  表示血管壁上任意点的位移矢量， $u_z$  和  $u_r$  是柱坐标下的位移分量， $u_\xi$  和  $u_\eta$  为曲面坐标下的位移分量。位移矢量可以表示为

$$\vec{u} = \vec{r} - \vec{r}^* = u_z \hat{e}_z + u_r \hat{e}_r = u_\xi \hat{e}_\xi + u_\eta \hat{e}_\eta \quad (11)$$

其中  $\vec{r}^*$  和  $\vec{r}$  分别表示管壁上同一点在平衡态（或未变形态）和变形态的位置矢量； $\hat{e}_z$ 、 $\hat{e}_r$  及  $\hat{e}_\xi$ 、 $\hat{e}_\eta$  等均为单位方向矢量。

如果是薄壁血管，径向位移分量  $u_r$  也可表示为

$$u_r = R_w - R^* \quad (12)$$

方程(12)中的  $R^*$  是壁中间面的平衡态或未变形态半径，若血管在未变形时为圆筒，则  $R^*$  是

一常数。

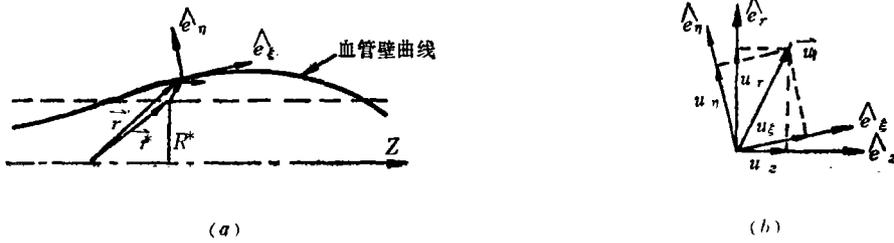


图2. 柱坐标和曲面坐标中的位移分量

血管壁上点的速度可定义为

$$\vec{q} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right|_{r^*} \quad (13)$$

而加速度可定义为

$$\vec{a}^e = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + (\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q} \quad (14)$$

### 2.3.1 柱坐标下的速度和加速度公式

在柱坐标下, 当血管壁作轴对称运动时, 其速度只有轴向和径向两个分量, 它们是

$$q_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} \quad q_r = \frac{\partial u_r}{\partial t} \quad (15)$$

加速度分量可按(14)式求出

$$\begin{aligned} a_z^e &= \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_z \frac{\partial q_z}{\partial z} + q_r \frac{\partial q_z}{\partial r} \\ a_r^e &= \frac{\partial q_r}{\partial t} + q_z \frac{\partial q_r}{\partial z} + q_r \frac{\partial q_r}{\partial r} \end{aligned} \quad (16)$$

在式(16)中, 径向梯度项可以忽略不计, 因为血管壁的厚度较薄, 速度分量沿壁厚的空间变化将是不重要的. 如略去式(16)中最后一项, 则柱坐标下的速度公式也可表达为

$$\begin{aligned} a_z^e &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) \\ a_r^e &= \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{\partial u_r}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

### 2.3.2 中间曲面坐标下的速度和加速度公式

将式(11)最后等式对时间  $t$  求偏导数, 可导出曲面坐标下的速度分量  $q_\xi$  和  $q_\eta$  的公式:

$$q_\xi = \frac{\partial u_\xi}{\partial t} - u_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad q_\eta = \frac{\partial u_\eta}{\partial t} + u_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (18)$$

式中  $\varphi$  是中间曲面内的子午线之切线与  $z$  轴的夹角. 由于  $\tan \varphi = \partial R_w / \partial z$ , 因此

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\partial^2 R_w}{\partial t \partial z} \quad (19)$$

类似地, 由式(14)可得曲面坐标下的加速度公式为

$$\begin{aligned} a_{\xi}^c &= \frac{\partial q_{\xi}}{\partial t} - q_{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + q_{\xi} \frac{\partial q_{\xi}}{\partial \xi} + q_{\eta} \frac{\partial q_{\xi}}{\partial \eta} + K_{\xi} q_{\xi} q_{\eta} \\ a_{\eta}^c &= \frac{\partial q_{\eta}}{\partial t} + q_{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + q_{\xi} \frac{\partial q_{\eta}}{\partial \xi} + q_{\eta} \frac{\partial q_{\eta}}{\partial \eta} - K_{\xi} q_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

或略去相对于  $\eta$  的导数项后得

$$\begin{aligned} a_{\xi}^c &= \frac{\partial q_{\xi}}{\partial t} - q_{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + q_{\xi} \frac{\partial q_{\xi}}{\partial \xi} + K_{\xi} q_{\xi} q_{\eta} \\ a_{\eta}^c &= \frac{\partial q_{\eta}}{\partial t} + q_{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + q_{\xi} \frac{\partial q_{\eta}}{\partial \xi} - K_{\xi} q_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (21)$$

另外, 在给定瞬时, 有  $d\xi^2 = dS^2 = dR_w^2 + dz^2$ , 于是

$$\left( \frac{\partial}{\partial \xi} \right)_{\xi} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} \frac{\partial}{\partial z}$$

利用上述导数变换, 曲面坐标下的加速度公式最后可写为

$$\begin{aligned} a_{\xi}^c &= \frac{\partial q_{\xi}}{\partial t} - q_{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q_{\eta}}{\sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} \frac{\partial q_{\xi}}{\partial z} + K_{\xi} q_{\xi} q_{\eta} \\ a_{\eta}^c &= \frac{\partial q_{\eta}}{\partial t} + q_{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{q_{\xi}}{\sqrt{1 + (\partial R_w / \partial z)^2}} \frac{\partial q_{\eta}}{\partial z} - K_{\xi} q_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

将式(18)、(22)与式(15)、(17)相比较, 可见曲面坐标下的加速度公式要比柱坐标下的公式复杂得多, 因此尽管曲面坐标下的血管壁运动方程较简单, 但应用曲面坐标形式的公式来解包含非线性血管壁运动的问题并不方便, 所以, 曲面坐标形式的公式在推导某些线性化理论的公式时还是有很大用处的。

### 3 外周组织的运动方程及其简化

血管非线性波传播分析的一个主要困难是如何确定或消除在血管壁运动方程中的未知外周组织约束应力。正如前面所指出, 早期的许多研究是采用 Euler 的血压-面积 (或半径) 关系律来得到波传播问题的数值解。而在另外研究中, 某些作者则是采用惯性质量、弹簧和阻尼器所构成的弹性振动系统来模拟外周组织的影响。这些探讨并没有提出有关血管和外周组织运动对波传播行为影响之清楚的物理解释。

在目前研究中, 为了克服这个困难, 我们引进外周组织的运动方程及外周组织内外边界元上的关系来消除血管壁运动方程中的未知应力  $P_z$  和  $\tau_z$ 。按照假设, 包围血管壁的外周组织是一个轴对称弹性介质, 则在柱坐标下其运动方程可以表示为

$$\rho_t a_z^t = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) \quad (23)$$

$$\rho_t a_r^t = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_r) - \frac{\sigma_{\theta}}{r} \quad (24)$$

其中  $\rho_t$  和  $a_z^t$ 、 $a_r^t$  分别表示外周组织的密度和点的加速度分量,  $\sigma_z$ 、 $\sigma_{\theta}$  和  $\sigma_r$  是外周组织内以柱坐标表示的法向物理应力,  $\tau_{rz}$  是唯一的剪切应力。

下面我们将方程(23)和(24)简化为由血管壁边界变量和外周组织外边界变量所表达的微

分方程。令  $R_0$  和  $R_1$  分别表示外周组织的内径和外径，对薄壁血管可近似地令  $R_0 \approx R_w$ 。现分成两种情况进行简化。

### 3.1 小组织厚度情况： $(R_1 - R_0)/R_0 \sim 0(1)$

主动脉的外周组织可以看作小组织厚度的情况。此时，结缔组织的厚度与血管壁的厚度是同数量级的，外周组织可考虑为包围血管的一个薄壁管。从  $R_0$  至  $R_1$  积分方程(23)和(24)，有

$$\int_{R_0}^{R_1} \rho_t a_z^t r dr = (\tau_{rz})_1 R_1 - (\tau_{rz})_0 R_0 + \int_{R_0}^{R_1} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} r dr \quad (25)$$

$$\int_{R_0}^{R_1} \rho_t a_r^t r dr = (\sigma_r)_1 R_1 - (\sigma_r)_0 R_0 + \int_{R_0}^{R_1} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} r dr - \int_{R_0}^{R_1} \sigma_\theta dr \quad (26)$$

其中  $(\ )_0$  和  $(\ )_1$  分别表示血管壁和外周组织的外边界的变量值。方程(25)和(26)右边的第三项可用下面著名的微积分公式进行变换：

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{g(z)}^{h(z)} f(z, r) dr = \int_{g(z)}^{h(z)} \frac{\partial}{\partial z} f(z, r) dr + f(z, h) h'(z) - f(z, g) g'(z)$$

将第三项中  $z$  的微分号提到积分号外以后，得

$$\int_{R_0}^{R_1} \rho_t a_z^t r dr = \left[ (\tau_{rz})_1 - (\sigma_z)_1 \frac{\partial R_1}{\partial z} \right] R_1 - \left[ (\tau_{rz})_0 - (\sigma_z)_0 \frac{\partial R_0}{\partial z} \right] R_0 + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_0}^{R_1} \sigma_z r dr \quad (27)$$

$$\int_{R_0}^{R_1} \rho_t a_r^t r dr = \left[ (\sigma_r)_1 - (\tau_{rz})_1 \frac{\partial R_1}{\partial z} \right] R_1 - \left[ (\sigma_r)_0 - (\tau_{rz})_0 \frac{\partial R_0}{\partial z} \right] R_0 + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_0}^{R_1} \tau_{rz} r dr - \int_{R_0}^{R_1} \sigma_\theta dr \quad (28)$$

另外，由外周组织外、内边界，我们可得如下边界关系：

$$(\tau_{rz})_1 - (\sigma_z)_1 \frac{\partial R_1}{\partial z} = p_a \frac{\partial R_1}{\partial z} \quad (29)$$

$$(\sigma_r)_1 - (\tau_{rz})_1 \frac{\partial R_1}{\partial z} = -p_a$$

和

$$(\tau_{rz})_0 - (\sigma_z)_0 \frac{\partial R_0}{\partial z} + \tau_t - P_t \frac{\partial R_0}{\partial z} = 0 \quad (30)$$

$$(\sigma_r)_0 - (\tau_{rz})_0 \frac{\partial R_0}{\partial z} + P_t + \tau_t \frac{\partial R_0}{\partial z} = 0$$

式(29)中的  $p_a$  表示周围环境的压力。将式(29)和(30)代入方程(27)和(28)，于是便有

$$\int_{R_0}^{R_1} \rho_t a_z^t r dr = p_a R_1 \frac{\partial R_1}{\partial z} + \tau_t R_0 - P_t R_0 \frac{\partial R_0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_0}^{R_1} \sigma_z r dr \quad (31)$$

$$\int_{R_0}^{R_1} \rho_t a_r^t r dr = -p_a R_1 + P_t R_0 + \tau_t R_0 \frac{\partial R_0}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_0}^{R_1} \tau_{rz} r dr - \int_{R_0}^{R_1} \sigma_\theta dr \quad (32)$$

现在，我们引进如下的变换，将上述方程简化为更方便的形式：

$$\begin{aligned} a_z^i &= (a_z^e)_0 F_1(r/R_0), \quad a_r^i = (a_r^e)_0 F_2(r/R_0) \\ \sigma_z &= (\sigma_z)_0 F_3(r/R_0), \quad \sigma_\theta = (\sigma_\theta)_0 (r/R_0) F_4(r/R_0) \\ \tau_{rz} &= (\tau_{rz})_0 F_5(r/R_0) \end{aligned} \quad (33)$$

其中 $(a_z^e)_0$ 和 $(a_r^e)_0$ 表示血管壁外边界上的加速度分量，它们与管壁的加速度分量（即按壁厚平均得到的分量） $a_z^e$ 和 $a_r^e$ 是不同的。因此，对薄壁血管可近似地令 $(a_z^e)_0 = a_z^e$ ， $(a_r^e)_0 = a_r^e$ 。式(33)中的函数 $F_i(r/R_0)$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ )是变换函数，显然在 $r=R_0$ 时将 $F_i(1)=1$ ， $i=1, \dots, 5$ 。将式(33)代入方程(31)和(32)，便简化为如下形式的方程

$$\rho_i \alpha_1 R_0 a_z^e = p_a \frac{R_z}{R_0} \frac{\partial R_1}{\partial z} + \tau_t - P_t \frac{\partial R_0}{\partial z} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} [\alpha_2 (\sigma_z)_0 R_0^2] \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \alpha_1 R_0 a_r^e &= -p_a \frac{R_1}{R_0} + P_t + \tau_t \frac{\partial R_0}{\partial z} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} [\alpha_5 (\tau_{rz})_0 R_0^2] - \alpha_4 (\sigma_\theta)_0 \\ &\dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

其中

$$\alpha_i = \frac{1}{R_0^2} \int_{R_0}^{R_1} F_i(r/R_0) r dr = \int_1^\lambda F_i(\lambda) \lambda d\lambda \quad (36)$$

$$(i=1, \dots, 5; \lambda=r/R_0 \text{ 和 } \lambda_1=R_1/R_0)$$

$\alpha_i$ 称为无量纲当量系数，其中 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 为外周组织的轴向和径向惯性系数，而 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$ 和 $\alpha_5$ 则为外周组织的应力系数。

方程(35)中的应力 $(\sigma_\theta)_0$ 实际上也是血管壁外边界上的周向应力，对于薄壁血管可直接令 $(\sigma_\theta)_0 = S_\theta$ 。至于方程(34)和(35)中的应力 $(\sigma_z)_0$ 和 $(\tau_{rz})_0$ ，可以表达为

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_0 &= \cos^2 \varphi (1 + \beta_1 K_t h) (S_t + \tau_w \tan \varphi - P_w \tan^2 \varphi) \\ (\tau_{rz})_0 &= \tan \varphi \cos^2 \varphi (1 + \beta_2 K_t h) (S_t + \tau_w \tan \varphi + P_w) \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 是修正系数， $0 \leq \beta_1, \beta_2 < 1$ 。如果沿血管壁厚度的平均应力恰好在壁的中间曲面上，可令 $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$ 。对于长波传播问题，由于有 $|\partial R_w / \partial z| < 1$ 和 $|\partial^2 R_w / \partial z^2| < 1$ ，因此式(37)中包含有 $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 的项对薄壁血管一般是小量。在这种情况下，如果 $\tan \varphi$ ， $\cos \varphi$ 和 $K_t$ 用 $\partial R_w / \partial z$ 、 $\partial^2 R_w / \partial z^2$ 来表示，并在式(37)中略去包含 $h$ 、 $\partial R_w / \partial z$ 和 $\partial^2 R_w / \partial z^2$ 等的三阶以上的小量，则式(37)可简化为

$$\begin{aligned} (\sigma_z)_0 &= \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \left[ S_t \left( 1 - \beta_1 h \frac{\partial^2 R_w}{\partial z^2} \right) + \tau_w \frac{\partial R_w}{\partial z} - P_w \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ (\tau_{rz})_0 &= \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\partial R_w}{\partial z} \left[ S_t + \tau_w \frac{\partial R_w}{\partial z} + P_w \right] \end{aligned} \quad (38)$$

将式(38)代入方程(34)和(35)，略去超过二阶以上的小量及项 $\tau_w (\partial R_w / \partial z)^2$ ，使得

$$\begin{aligned} \rho_i \alpha_1 R_0 a_z^e &= p_a \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial R_1}{\partial z} + \tau_t - P_t \frac{\partial R_w}{\partial z} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\alpha_2 S_t R_0^2 (1 - \beta h (\partial^2 R_w / \partial z^2))}{1 + (\partial R_w / \partial z)^2} \right] \\ &+ \frac{\alpha_3 R_0}{1 + (\partial R_w / \partial z)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tau_w \frac{\partial R_w}{\partial z} - P_w \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \rho_i \alpha_2 R_0 a_r^e &= -p_a \frac{R_1}{R_0} + P_t + \tau_t \frac{\partial R_w}{\partial z} - \alpha_4 S_\theta + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\alpha_5 (S_t + P_w) R_0^2 \partial R_w}{1 + (\partial R_w / \partial z)^2} \right] \\ &\dots\dots\dots(40) \end{aligned}$$

方程(39)和(40)便是所需要的藉助血管壁变量表达的外周组织运动方程组。

### 3.2 大组织厚度情况: $(R_z - R_0)/R_0 \gg 1$

大血管一般地不仅有结缔组织连接, 而且有肌肉和其它物质包围着它们, 连结情况依赖于血管的类型及其在体内的位置. 所有和血管连结的材料在力学性质上不一定相同, 但为了简化脉搏波传播问题的分析, 可以忽略这些材料性质的差异, 近似地把它们模拟为具有有限厚度或无限厚度的单一外周组织。

在血管的外周组织为有限厚度的情况下, 外周组织的运动方程仍可用方程(39)和(40)来表达. 所以, 只需对无限组织厚度情况进行研究. 根据基本假设, 应力波在无限厚度外周组织内的传播是随径向距离的增加而衰减的. 另外, 假设所有应力都相对于周围压力  $P_0$  来计算且  $r$  充分大时,  $a_z^i$  比  $a_r^i$  的衰减更快, 以及  $\tau_{rz}$  与  $\sigma_z$  至少是同时衰减的. 按照这些假设, 为了使无量纲当量系数的积分是有限的, 应该要求当  $r/R_0 \rightarrow \infty$  时, 加速度分量和应力分量按下列数量级衰减:

假设  $a_z^i \sim (r/R_0)^{-(\delta_1+3)}$ ,  $a_r^i \sim (r/R_0)^{-(\delta_2+3)}$   
 则  $\sigma_z \sim (r/R_0)^{-(\delta_1+3)}$ ,  $\tau_{rz} \sim (r/R_0)^{-(\delta_1+3)}$  (在  $r/R_0 \rightarrow \infty$  时)  
 $\sigma_r \sim (r/R_0)^{-(\delta_2+1)}$ ,  $\sigma_\tau \sim (r/R_0)^{-(\delta_2+1)}$

其中  $\delta_1$  和  $\delta_2$  是小于 1 的正数. 这样以来, 方程(23)和(24)的积分将是

$$\rho_i \int_{R_0}^{\infty} a_z^i r dr = - \left[ (\tau_{rz})_0 - (\sigma_z)_0 \frac{\partial R_0}{\partial z} \right] R_0 + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_0}^{\infty} \sigma_z r dr \dots\dots\dots(41)$$

$$\rho_i \int_{R_0}^{\infty} a_r^i r dr = - \left[ (\sigma_r)_0 - (\tau_{rz})_0 \frac{\partial R_0}{\partial z} \right] R_0 + \frac{\partial}{\partial z} \int_{R_0}^{\infty} \tau_{rz} r dr - \int_{R_0}^{\infty} \sigma_r dr \dots\dots\dots(42)$$

若仍采用式(33)的变换, 则无量纲当量系数  $\alpha_i$  的积分可以表达为

$$\alpha_i \equiv \int_1^{\infty} F_i(\lambda) \lambda d\lambda = \int_0^1 G_i(\xi) \frac{d\xi}{\xi^2} \quad (i=1, \dots, 5) \quad (43)$$

其中, 变量  $\lambda = r/R_0$ ,  $\xi = R_0/r$  和变换函数  $G_i(\xi) \equiv F_i(\lambda)$ , 且有  $G_i(0) = F_i(\infty) = 0$ ,  $G_i(1) = F_i(1) = 1$ .

应用边界条件(38)并略去包含  $\beta_1 h$  的项, 则无限组织厚度的外周组织运动方程可简化为

$$\rho_i \alpha_1 R_0 a_z^i = \tau_i - P_i \frac{\partial R_w}{\partial z} + \alpha_3 \left\{ \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{S_i R_0^2}{1 + (\partial R_w / \partial z)^2} \right] + \frac{R_0}{1 + (\partial R_w / \partial z)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tau_w \frac{\partial R_w}{\partial z} - P_w \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \quad (44)$$

$$\rho_i \alpha_2 R_0 a_r^i = P_i + \tau_i \frac{\partial R_w}{\partial z} - \alpha_4 S_0 + \frac{\alpha_5}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{(S_i + P_w) R_0^2}{1 + (\partial R_w / \partial z)^2} \frac{\partial R_w}{\partial z} \right] \quad (45)$$

## 4 血管壁-外周组织系统的动力学方程

为了简单起见, 下面我们将仅对薄壁血管情形进行讨论. 方程(39)和(40)是小组织厚度

和有限组织厚度情况的外周组织运动方程，而方程(44)和(45)则是无限组织厚度情况运动方程。将这些方程与血管壁运动方程(4)和(5)相对比，不难看出 $[P_t(\partial R_w/\partial z) - \tau_t]$ 是方程(4)和(39)或(44)的共同因子，而 $[P_t + \tau_t(\partial R_w/\partial z)]$ 是方程(5)和(40)或(45)的共同因子。因此，只要将方程(39)、(40)或方程(44)、(45)直接代入方程(4)、(5)，消去未知应力 $P_t$ 和 $\tau_t$ ，即可得到薄壁血管情形下的血管壁-外周组织系统的动力学方程。

4.1 小组织厚度和有限组织厚度情况

将方程(39)和(40)分别代入方程(4)和(5)，便有

$$a_z^e = \frac{1}{\psi_1} \left\{ p_a \frac{R_1}{R_0} \frac{\partial R_1}{\partial z} + \tau_w - P_w \frac{\partial R_w}{\partial z} + \frac{h}{R_w} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sqrt{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{S_t R_w}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\alpha_3 S_t R_0^2 (1 - \beta_1 h (\partial^2 R_w/\partial z^2))}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{\alpha_3 R_0}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tau_w \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right) - P_w \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \quad (46)$$

$$a_r^e = \frac{1}{\psi_2} \left\{ -p_a \frac{R_1}{R_0} + P_w + \tau_w \frac{\partial R_w}{\partial z} - S_0 \left[ \alpha_4 + \frac{h}{R_w} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{h}{R_w} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sqrt{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{S_t R_w}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{\partial R_w}{\partial z} \right] + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\alpha_5 (S_t + P_w) R_0^2}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{\partial R_w}{\partial z} \right] \right\} \quad (47)$$

其中  $\psi_1$  和  $\psi_2$  称为单位面积并合质量：

$$\psi_1 = \rho_e \{ h[1 + (\partial R_w/\partial z)^2]^{1/2} + R_0 \alpha_1 (\rho_t/\rho_e) \} \\ \psi_2 = \rho_e \{ h[1 + (\partial R_w/\partial z)^2]^{1/2} + R_0 \alpha_2 (\rho_t/\rho_e) \} \quad (48)$$

4.2 无限组织厚度情况

将方程(44)和(45)分别代入方程(4)和(5)，便可得到无限组织厚度情况下的血管壁-外周组织系统动力学方程为

$$a_z^e = \frac{1}{\psi_1} \left\{ \tau_w - P_w \frac{\partial R_w}{\partial z} + \frac{h}{R_w} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sqrt{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{S_t R_w}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{\alpha_3}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{S_t R_0^2}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \right] + \frac{\alpha_3 R_0}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \tau_w \frac{\partial R_w}{\partial z} - P_w \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} \\ \dots\dots\dots (46)$$

$$a_r^e = \frac{1}{\psi_2} \left\{ P_w + \tau_w \frac{\partial R_w}{\partial z} - S_0 \left[ \alpha_4 + \frac{h}{R_w} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2} \right] \right. \\ \left. + \frac{h}{R_w} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sqrt{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{S_t R_w}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{\partial R_w}{\partial z} \right] + \frac{\alpha_5}{R_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{(S_t + P_w) R_0^2}{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \frac{\partial R_w}{\partial z} \right] \right\} \quad (50)$$

顺便指出，方程(46)和(47)的  $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ 、 $\alpha_3$ 、 $\alpha_4$  和  $\alpha_5$  跟方程(49)和(50)的是不同的，前者的  $\alpha_i$  由式(36)定义，而后者的  $\alpha_i$  则由式(43)定义。参数  $\alpha_i$  可通过血管壁运动的实验测量来确定，但也可在非线性脉搏波的分析中采用数值技术或凑试函数方法经验地确定。若组织厚度  $h_i$  小于管径  $R_w$ ，这些参数可解析地表达为

$$\alpha_i = \sqrt{1 + (\partial R_w/\partial z)^2} \{ (h_i/R_0) + \varepsilon_i (h_i/R_0)^2 + \sigma_i (h_i/R_0)^3 \} \quad (51)$$

其中  $\varepsilon_i$  和  $\sigma_i$  为经验常数。在近似探讨中， $(h_i/R_0)^3$  项可以忽略，仅  $\varepsilon_i$  是需要的。若令

$\epsilon_i = \sigma_i = \beta_i = 0$ , 则方程(46)和(47)就是血管壁和外周组织作为整体的壁运动方程。

## 5 血液流动控制方程

血液是一种不可压缩粘性流体, 其流动一般地可用不可压缩粘性流体的运动方程和连续方程来描绘。在轴对称流动的情况下, 其控制方程可表达为

$$z \text{ 向动量: } \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_{rz})}{\partial r} \quad (52)$$

$$r \text{ 向动量: } \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_{rr})}{\partial r} - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \quad (53)$$

$$\text{连续方程: } \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0 \quad (54)$$

其中  $\rho$  是血液密度,  $v_z$  和  $v_r$  是血液沿  $z$  和  $r$  方向的速度分量,  $T_{zz}$ 、 $T_{\theta\theta}$  和  $T_{rr}$  是柱坐标下的三个法应力,  $T_{rz}$  为切应力。这些应力分量可根据血液是牛顿流体还是非牛顿流体的假设由相应的本构方程给出具体的表达式。

对大多数大动脉管内的血液流动, 血液的力学行为很近似于牛顿流体。如假设血液为牛顿流体, 则运动方程(52)和(53)可用下面的 Navier-Stokes 方程代替:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \\ &+ \nu \left\{ \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ &+ \nu \left\{ \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right\} \end{aligned} \quad (56)$$

其中  $p$  是血液的压力,  $\nu$  是血液的运动粘度。

## 6 本构方程

方程(39)和(40)或方程(44)和(45)所包含的应力  $S_i$ 、 $S_\theta$  及  $P_w$ 、 $\tau_w$  应该由血管壁及流体的本构方程给出。

### 6.1 血管壁的本构方程

血管壁本质上是一种非线性粘弹性材料, 但作者的研究<sup>[2]、[3]</sup>表明, 对大动脉来说, 粘性是次要的效应, 占主导地位的实际上还是弹性。在血管壁是一种局部正交、横向同性和不可压缩的弹性材料的假设下, 作者得出了如下以张量符号表示的二阶非线性弹性本构方程:

$$S_i = -p' + A_i^j E_j + \bar{B}_i^j E_j E_k \quad (i=1, 2, 3) \quad (57)$$

其中  $S_i$  是物理应力分量,  $S_1 = S_\theta$ ,  $S_2 = S_\theta$  和  $S_3 = S_\theta$ ;  $p'$  是动脉组织的“静水压力”;  $E_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) 是物理应变分量,  $E_1 = E_\theta$ ,  $E_2 = E_\theta$ ,  $E_3 = E_\theta$ 。对薄壁血管, 物理应变和位移的关系可表示为

$$E_1 = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)^2 \right], \quad E_2 = \frac{u_r}{R^*} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_r}{R^*} \right)^2 \quad (58)$$

而  $E_3$  由不可压缩条件来确定:

$$(1+2E_1)(1+2E_2)(1+2E_3)=1 \quad (59)$$

方程(57)中的系数  $A_i, \overline{B}_i^k (i, j, k=1, 2, 3)$  是由 Lamè 弹性常数组合得到的常数<sup>[2], [8]</sup>. 无论如何, 静水压力  $p'$  是未知的, 在具体应用时, 一个补充条件或假设是需要的.

## 6.2 流体的本构方程及壁应力

血液作轴对称流动的本构方程可表达为

$$\begin{aligned} T_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad T_{\theta\theta} = -p + 2\mu \frac{v_r}{r}, \quad T_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ T_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (60)$$

此处,  $\mu$  为血液的粘度. 若假设血液为牛顿流体,  $\mu$  可考虑为跟应变率无关的常数或作为温度的函数. 然而, 若将血液假设为 Casson 非牛顿流体, 则  $\mu$  可按下式给定

$$\begin{aligned} \mu &= [ (4\eta_c^2 J_2)^{1/4} + \tau_c^{1/2} ]^2 / (4J_c)^{1/2} \\ J_2 &= \frac{1}{4} \left\{ 2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (61)$$

其中  $\eta_c$  为 Casson 粘度,  $\tau_c$  相当于屈服应力,  $J_2$  为二阶应变率张量不变量.

流体的壁应力  $P_w$  和  $\tau_w$  为

$$\begin{aligned} P_w &= \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ -T_{rr} \right\}_w + 2(T_{rz})_w \frac{\partial R_w}{\partial z} - (T_{zz})_w \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \\ \tau_w &= \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ -(T_{rz})_w \left[ 1 - \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right] - \left[ (T_{rr})_w - (T_{zz})_w \right] \frac{\partial R_w}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (62)$$

此处  $( )_w$  表示变量在内壁上的值. 若将式(60)代入, 则式(62)可改写为

$$\begin{aligned} P_w &= p - 2\mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \frac{\partial R_w}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right)_w \\ \tau_w &= -\mu \left[ 1 + \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1} \left( \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)^2 \right] + 2 \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \frac{\partial R_w}{\partial z} \right)_w \end{aligned} \quad (63)$$

## 7 讨论

在本文中, 作者已经推导了小组织厚度及大组织厚度的血管壁-外周组织系统动力学方程(46)、(47)及方程(49)、(50). 在这些方程中仅含血管壁和流体的应力以及血管的几何. 外周组织对血管的效应主要通过参数  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  和  $\alpha_5$  等来描绘. 当血液模拟为牛顿流体时, 可用方程(46)、(47) (对无限组织厚度情况, 可由方程(49)、(50)) 与流体的控制方程(54)~(56)相结合来构成非线性脉搏波传播的基本方程. 若血液作为非牛顿流体, 则应将方程(46)、(47) (或方程(49)、(50)) 跟方程(52)~(54)相结合. 这些非线性波基本方程需藉助血管壁和流体的本构方程(57)~(60)及(62)来连结, 加上适当的初边值条件后, 就可求解动脉中的非线性波传播. 其解的内容可包含: 1) 压力波; 2) 血液速度波; 3) 血流量波; 4)

血管的波动等。无论如何，由于基本方程组是非线性的，解析解极端困难，只能靠计算机通过数值方法来求这个问题。数值解方法和结果将在我们的后继文章中给出。

### 参 考 文 献

- [1] Wu S G & Lee G C. On Nonlinear Viscoelastic Properties of Arterial Tissue, *J. Biomech Engg* 1984; 106: (a); 42~47
- [2] Wu S G, Lee G C & Tseng N T. Nonlinear Elastic Analysis of Blood Vessels, *J. Biomech. Engg.* 1984; 106: (b); 376~81
- [3] 伍时桂, 李兆治, 曾念祖. 中国生物医学工程学报. 1985; (4): 187~198
- [4] 伍时桂和李兆治, 非线性脉搏波在具有外周组织的动脉内传播的理论模型, 全国第二届生物学术会议论文汇编(一), 1985
- [5] McDonald D A, *Blood Flow in Arteries*. Williams & Wikins, 1960
- [6] Fung Y C, *Biomechanics: Its Scope, History, and some Problems of Continuum Mechanics in Physiology*. *Appl. Mech. Rev.*, 1968; 21: 1
- [7] Skalak R, et al. *Mechanics of Blood Flow*, *Advances in Bioengineering* (V. C. Mow, Ed.), ASME, New York, 1980; 25~40
- [8] Morgan G W, Kiely J P. Wave Propagation in A Viscous Liquid Contained in A Flexible Tube, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1954; 25: 323
- [9] Womersley J R. An Elastic Tube Theory of Pulse Transmission and Oscillating Flow in Mammalian Arteries. WADC Technical Report TR 56-616, Wright Air Dev. Ctr., Ohio, 1957
- [10] Jager G N, et al. Oscillatory Flow Impedence in Electrical Analog of Arterial System; Representation of Sleeve Effect and Non-Newtonian Properties of Blood, *Cir. Res.* 1965; 16: 121
- [11] Mirsky I. Wave Propagation in A Viscous Fluid Contained in An Orthotropic Elastic Tube, *Biophys. J.* 1967; 7: 165
- [12] Atabek H B. Wave Propagation Through A Viscous Fluid Contained in A Tethered, Initially Stressed Orthotropic Elastic Tube, *Biophys. J.*, 1968; 8: 626
- [13] Lambert J W. On the Nonlinearities of Fluid Flow in Nonrigid Tubes. *J. Franklin Inst.*, 1958; 266: 83
- [14] Anliker M, et al. Nonlinear Analysis of Flow Pulses and Shock Waves in Arteries, I & II, *Z. Angew. Math. Phys.*, 1971; 22: 217~46 & 563~81
- [15] Ling S C & Atabek H B. A Nonlinear Analysis of Pulsatile Flow in Arteries. *J. Fluid Mech.*, 1972; 55: 493

# A Theory of Nonlinear Wave Propagations in Arteries

Wu Shigui Lee George C

**【Abstract】** A new theoretical model of nonlinear wave propagations in arteries with surrounding tissues was put forward. The equations of motion for the blood vessels and their peripheral tissues as a system have been derived. These equations were expressed in terms of the stresses of the vessel wall and fluid, and the geometry of the blood vessel. They can be used to solve numerically the problems for the propagations of nonlinear pulse waves in arteries together with the momentum and continuity equations of incompressible-viscous flow, as well as the constitutive equations well, as of fluid and vessel wall. The numerical solutions can involve pressure, velocities and flowrate of the blood flow, as well as displacements, velocities and stresses of the the vessel wall. These physical variables of propagations of pulse waves in arteries are all of significance physiologically and clinically.

**Key Words:** Nonlinear Pulse Waves, Mathematical Model, Motions (Equations of Arterial Walls; Peripheral Tissue Constitutive Equations