

有限元动态方程差分解法的研究

杨家华

(机械工程学系)

【摘要】构造了一种求解有限元动态方程的稳定的差分格式，并将其成功地应用于求解结构振动问题。这种差分方法对求解有限元动态方程是有效的。

关键词：有限元，动态方程，差分方法

用有限元法求解弹性结构的动态响应问题，总要归结为求解下面的有限元动态方程：

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P \quad (1)$$

式中： M ——结构整体质量矩阵。

C ——结构整体阻尼矩阵。

K ——结构整体刚度矩阵。

\ddot{U} 、 \dot{U} 、 U ——在振动问题中分别表示节点加速度向量，节点速度向量和节点位移向量。

P ——节点外力向量。

求解方程(1)，常用的方法有两类：一是通常所说的直接解法，大多是用逐步积分法或差分法。另一种就是振型迭加法，该方法把系统的主振型组合成模态矩阵 Φ ，用模态矩阵 Φ 作为变换矩阵，进行坐标变换：

$$U = \Phi y \quad (2)$$

如果模态矩阵 Φ 能使阻尼矩阵 C 变成对角阵，就可以使方程(1)解除耦联，得到一个用广义坐标 y 表达的互不耦合的方程组：

$$M_i \ddot{y}_i + C_i \dot{y}_i + K_i y_i = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

这里共有 n 个单自由度的二阶常微分振动方程，可以用求解单自由度振动方程的各种解法求出 y_i ，再根据(2)式求出节点位移向量 U 。

采用振型迭加法的优点是在求得振动位移向量 U 的同时，可以得到系统各阶振型以及各阶振动在位移向量 U 中贡献的大小。但是，模态矩阵 Φ 如不能使阻尼矩阵 C 对角化。这种方法的使用就碰到问题。直接解法不受这种限制，可以用于求解方程(1)，也可用于求解方程(3)。

在众多的直接解法中，Wilson的 θ 法似乎得到人们较多的注意，在SUP5程序中就采用 θ 法，文献[1]也应用 θ 法求解机床主轴部件的响应历程。差分法的应用似乎不多。文献[2]介绍了Nastran程序使用差分法。1981年以来，我们较深入地研究了差分法求解有限元动态方程的问题，并将其成功地应用于机床主轴部件动态特性的计算。

文献[2]介绍的差分格式是：

$$\ddot{U} = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} \quad (4)$$

$$\dot{U} = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} \quad (5)$$

$$U = \alpha u_{k+1} + (1-2\alpha)u_k + \alpha u_{k-1} \quad (6)$$

取 $\alpha = \frac{1}{3}$ 代入方程(1)可得如下公式:

$$u_{k+1} = \left(\frac{M}{h^2} + \frac{C}{2h} + \frac{K}{3} \right)^{-1} \left[P_k + \left(\frac{2M}{h^2} - \frac{K}{3} \right) u_k + \left(-\frac{M}{h^2} + \frac{C}{2h} - \frac{K}{3} \right) u_{k-1} \right] \quad (7)$$

式中, $P_k = \frac{1}{3}(p_{k-1} + p_k + p_{k+1})$.

用(7)式求出 u_{k+1} , 再由(6)式就可以求解 U .

我们采用了不同于(7)式的计算公式, 现作一一介绍.

1 二阶常微分线性振动方程的差分解法

1.1 差分公式及其稳定性探讨

对于下边的单自由度振动方程的求解是大家熟知的:

$$m \ddot{Y} + c \dot{Y} + kY = P_d \quad (8)$$

当 $P_d = P \cos \omega t$ 时, 就是稳态简谐激振动方程, 其解为通解和特解之和, 其特解为:

$$Y(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \quad (9)$$

$$A = \frac{P}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \quad (10)$$

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2} \right) \quad (11)$$

式中, A 为振幅, φ 为相位差.

用差分方法求解方程(8)时, 用中心差商代替微商, 则有:

$$\ddot{Y}_k = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \quad (12)$$

$$\dot{Y}_k = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \quad (13)$$

并且, 令

$$Y_k = \frac{y_{k+1} + y_{k-1}}{2} \quad (14)$$

$$P_d = p_k = P \cos \omega k h \quad (15)$$

式中, h 为时间步长, y_{k+1} , y_k , y_{k-1} 分别为对应时间 t_{k+1} , t_k , t_{k-1} 的差分计算位移值.

将公式(12)~(15)代入(8), 即可得出;

$$\begin{aligned}
 y_{k+1} &= \left(\frac{m}{h^2} + \frac{c}{2h} + \frac{k}{2} \right)^{-1} \left[p_k + \frac{2m}{h^2} y_k + \left(\frac{c}{2h} - \frac{m}{h^2} - \frac{k}{2} \right) y_{k-1} \right] \\
 &= \frac{2h^2}{2m + hc + h^2 k} p_k + \frac{4m}{2m + hc + h^2 k} y_k + \frac{hc - 2m - h^2 k}{hc + 2m + h^2 k} y_{k-1}
 \end{aligned} \tag{16}$$

给定两个初值 y_k 、 y_{k-1} ，就可以用(16)式解出 y_{k+1} ，再用(12)~(14)式就可以求出 \ddot{Y}_k 、 \dot{Y}_k 和 Y_k 。

任何一种差分解法，必须保证有足够的稳定性。为了保证其稳定性，条件稳定的算法必须采用极小的时间步长，以致于在有限元计算中往往因此而失去其应用的价值，因此，在有限元计算中，差分格式必须是绝对稳定的，(16)式就满足绝对稳定的条件。

直接考察(16)式可以发现：

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} y_{k+1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{2h^2}{2m + hc + h^2 k} p_k + \frac{4m}{2m + hc + h^2 k} y_k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{hc - 2m - h^2 k}{hc + 2m + h^2 k} y_{k-1} \right) = 2y_k - y_{k-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故有：} \lim_{h \rightarrow 0} Y_k &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{k+1} + y_{k-1}}{2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{k+1}}{2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{k-1}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} (2y_k - y_{k-1}) + \frac{1}{2} y_{k-1} = y_k
 \end{aligned}$$

该式表明，当时间步长 h 趋于零时， t_k 时刻的振动位移差分计算结果 y_k 精确地等于 Y_k ，因此，在作差分计算时，可以直接取 y_k 为振动位移值，而不必按(14)式计算，因为，时间步长 h 的取值总是不大的。

对(16)式取极限还可得：

$$\lim_{h \rightarrow \infty} y_{k+1} = \frac{2p_k}{k} - y_{k-1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{故有，} \lim_{h \rightarrow \infty} Y_k &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{k+1} + y_{k-1}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2p_k}{k} - y_{k-1} \right) + \frac{y_{k-1}}{2} \\
 &\quad + \frac{p_k}{k} = y_j
 \end{aligned}$$

式中， y_j 相当于将 p_k 作用于系统上结构产生的静位移，这表明，当时间步长趋于无穷大时，振动位移 Y_k 的值趋于静位移值 y_j ，换句话说，是趋于一个有限值。

综上所述可以认为，(16)式是一个绝对稳定的差分公式。计算的实践也表明，差分计算结果是绝对稳定的。

1.2 差分计算结果的验证和参数选取分析

为了考察计算的稳定性以及计算参数的合理取值范围，我们用(16)式求解如下的方程：

$$\ddot{Y} + C\dot{Y} + Y = \sin \omega t$$

很显然，固有频率 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ 。

我们采用不同的时间步长 h 来计算相频曲线和幅频曲线，图1和图2分别为时间步长取

振动周期 T 的 $\frac{1}{8}$ 和 $\frac{1}{32}$ ，经过32个振动周期的计算得到的。左图是相频曲线，右图是幅频曲线。

比较两图发现：步长 h 大时，会产生两个明显的问题：(1)共振频率前移，低于理论精确值。(2)共振振幅偏大。

当时间步长 h 小于周期的 $\frac{1}{32}$ 时，计算所得的幅值和共振频率与理论精确解的误差已经非常小了。

图3、图4、图5分别为经过64、16、4个周期的计算，时间步长为周期的 $\frac{1}{32}$ 的频响曲线。比较这三张图发现：计算的时间长度（以周期 T 为单位）对计算结果有很大影响，所需计算周期数的多少与阻尼比有关，阻尼比大时，所需的周期数少。如图5，仅计算4个周期。但从幅频曲线看，除阻尼比最小的一条曲线与精确值相比误差很大外，其余4条误差都很小。从相频曲线看，计算周期少，将引起明显的相位误差，小阻尼时尤为严重。在低于或高于固有频率的范围内，出现一段振荡曲线，但在固有频率处，相位角仍是 -90° ，与理论精确值相等。消除相位计算误差，在小阻尼时比较困难，因为增大计算周期数，意味着增加机时。如果在计算时对相位的精度要求不严格，仅要求计算较准确的幅值，那么可以选取较小的周期数。

如果按公式(1)，即按Nastran公式计算，取 $h = \frac{T}{32}$ ，周期数为16， $P_k = p_k$ ，就得到如图6所示的频响曲线图。与图4比较，可见两者没有什么区别。但要指出一点，据文献[2]介绍，Nastran程序中取 $P_k = \frac{1}{3}(p_{k-1} + p_k + p_{k+1})$ ，而这里取 $P_k = p_k$ 。图7是按 $P_k = \frac{1}{3}(p_{k-1} + p_k + p_{k+1})$ 计算的情况。由图可见：幅值小于理论精确值，相频曲线上移，即相位值大于精确值。图8是取 $P_k = \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_{k-1})$ ，按公式(16)计算所得的曲线，与图7相比，除数值上的差别外，其问题是一样的。可见，为保证差分计算结果的准确性，不宜采用文献[2]介绍的取 $P_k = \frac{1}{3}(p_{k-1} + p_k + p_{k+1})$ 的算法。

考察一下差分计算的响应历程，对我们理解上述现象也许是有益的。图9和图10分别是取初值 y_k 和 y_{k-1} 等于0和10计算所得的响应历程。由图可见，不管计算时初值如何，经过若干个周期的计算，响应总是变成稳定的简谐振动，即振动方程的特解。由此可见，要求得稳定振动的振幅和相位，必须经过若干个周期的计算才行，即计算的周期数要足够大。

综上所述，我们得到以下结论：

(1) 振动计算时，时间步长 h 不宜太大，但为了节省机时，取步长 h 不大于周期 T 的 $\frac{1}{16}$ 为宜。

(2) 计算时间不宜过短，用周期 T 计算，小阻尼比时周期数应大于16。

(3) 计算时不宜采用文献[2]介绍的力的平均格式计算, 宜取 $P_k = p_k$ 计算.

(4) 初值对最后计算结果没有影响.

(5) 所用差分公式相当于取 $\alpha = \frac{1}{2}$ 所得的差分公式, 故取 $\alpha = \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{3}$, 对计算结果无明显影响.

2 有限元动态方程的差分解法

2.1 求解有限元动态方程的差分公式

前边讨论的单自由度解法可以直接推广到有限元动态方程的求解中. 把节点速度向量和节点加速度向量用差商代替:

$$\ddot{U}_k = \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} \quad (17)$$

$$\dot{U}_k = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} \quad (18)$$

并且令:

$$U_k = \frac{u_{k+1} + u_{k-1}}{2} \quad (19)$$

$$P = P_k \quad (20)$$

将(17~20)式代入方程(1), 则有:

$$M \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} + C \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} + K \frac{u_{k+1} + u_{k-1}}{2} = P_k$$

由此, 可解出

$$u_{k+1} = \left(\frac{M}{h^2} + \frac{C}{2h} + \frac{K}{2} \right)^{-1} \left[P_k + \frac{2M}{h^2} u_k + \left(\frac{C}{2h} - \frac{M}{h^2} - \frac{K}{2} \right) u_{k-1} \right] \quad (21)$$

式中: h 是时间步长, u_{k+1} 、 u_k 、 u_{k-1} 分别表示对应时间 t_{k+1} 、 t_k 、 t_{k-1} 的节点振动位移向量的差分计算结果, P_k 为对应时间 t_k 作用在结构上的干扰力向量, \ddot{U}_k 、 \dot{U}_k 分别为对应时间 t_k 的节点振动加速度向量、节点振动速度向量的差分计算结果.

将公式(16)和(21)比较, 可以看到, 两个公式具有几乎完全相同的形式.

只要知道 P_k 、 u_k 和 u_{k-1} 的初值, 就可以用(21)式求解出 u_{k+1} , 以后的计算就可以逐一进行, 从而一步一步求出系统在干扰力向量 P_k 的作用下的响应. 知道了 u_{k+1} 、 u_k 、 u_{k-1} 就可以根据(17)式和(18)式, 求出节点振动的加速度向量和速度向量.

2.2 用差分公式求解有限元动态方程实例

我们按(21)式编写了机床主轴部件动态响应的计算程序, 用来计算机床主轴部件稳态简谐激振的响应, 图11和图12就是用该程序计算CA6140主轴部件所得的结果.

图11给出了有限元计算时主轴部件的简化模型结构, 由图可见, 主轴被分成25个单元, 有3个径向弹性支承. 还可看到计算所得的静位移曲线、一阶、二阶振型曲线以及有关的数据. 图12是用差分方法计算出的幅频曲线, 在该曲线上, 一阶和二阶共振峰清晰可见, 并且共振幅值与实测结果误差小于30%, 曲线形状与实测结果吻合得相当好.

我们采用不同的时间步长和周期数进行试算, 并将计算所得的幅频曲线、相频曲线、响

应历程曲线加以比较分析，可以看到：

(1) 用(21)式求解有限元动态方程，计算结果是绝对稳定的。

(2) 用(21)式求解有限元动态方程，必须合理地确定公式中的有关参数，参数选择是否得当，将直接影响计算结果的准确性。本文对单自由度振动方程差分计算参数选择的结论，在有限元动态方程的求解中完全适用，由参数选择不当产生的幅频曲线和相频曲线的某些特点，在有限元动态方程的求解中同样存在。

3 小结

1. 提供了一种求解有限元动态方程的差分计算公式，并将其成功地应用于机械结构的振动计算中。

2. 研究了差分公式中有关参数的选取对计算结果的影响，并提供了有关参数合理取值的参考意见。说明只有合理的选择有关计算参数，才能保证经过有限次差分计算得到较为精确的结果。

3. 本文的探索表明，有限元动态方程采用差分解法具有很大的实用价值，在振动计算中，幅值和相位的计算都可以得到与理论分析或实验测试几乎一致的结果，就说明了这一点。

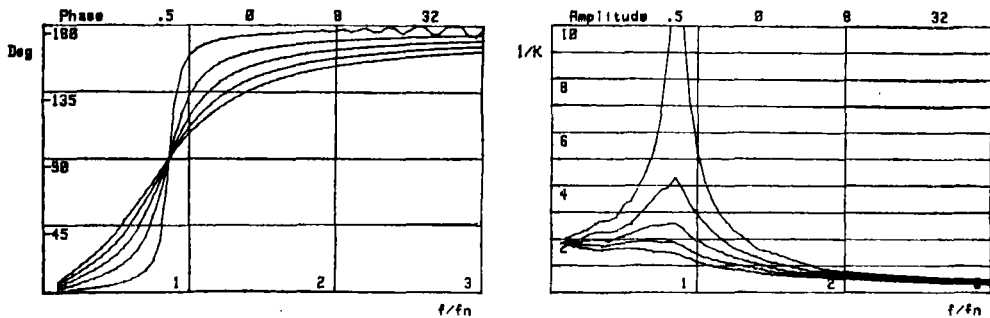


图 1

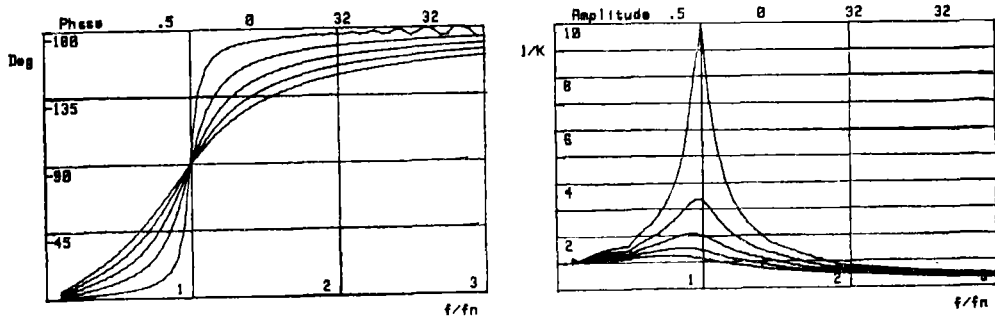


图 2

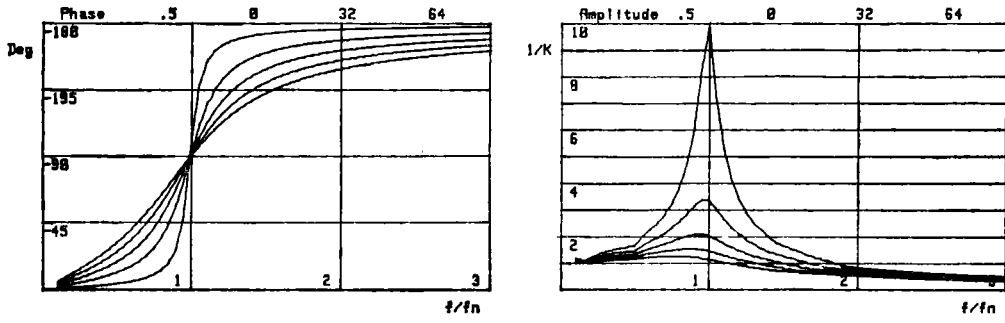


图 3

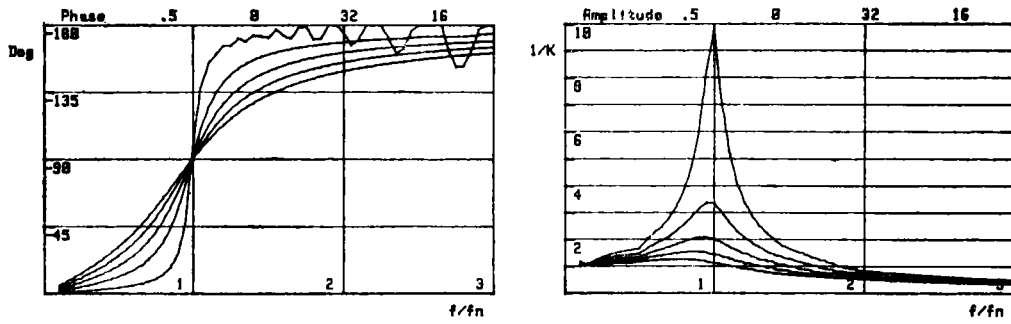


图 4

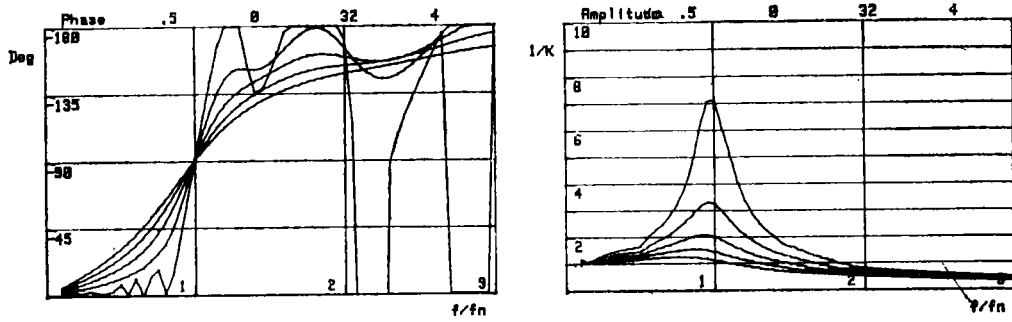


图 5

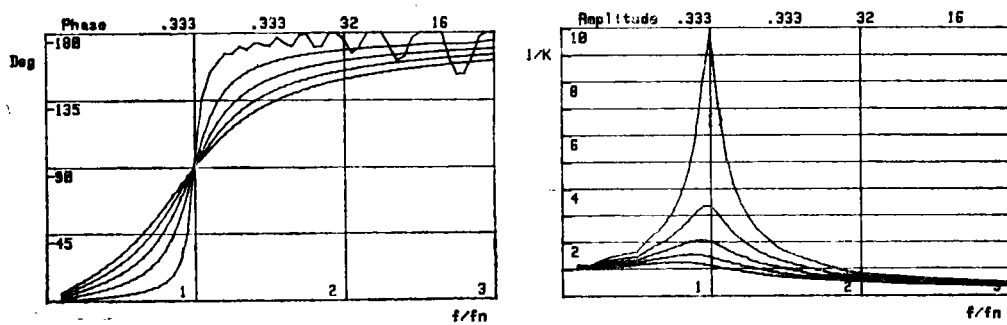


图 6

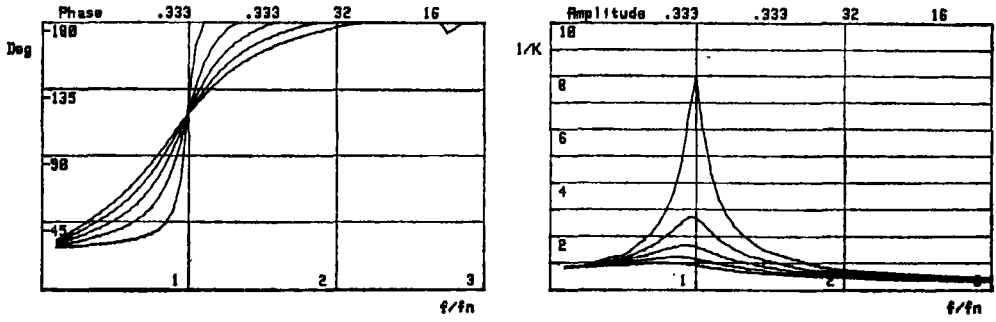


图 7

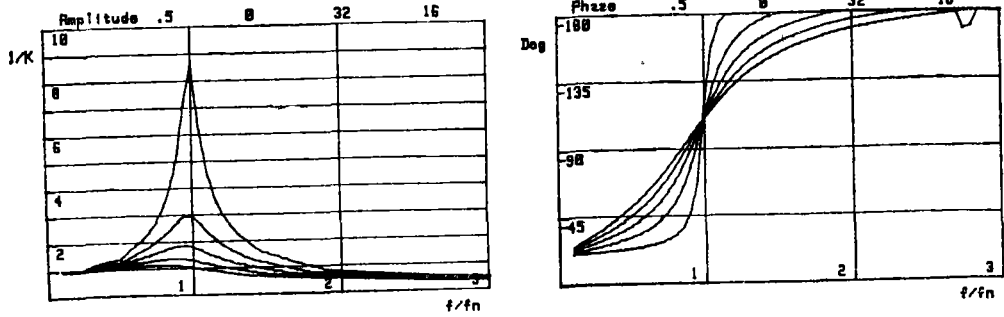


图 8

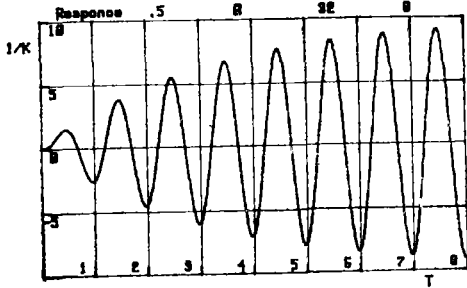


图 9

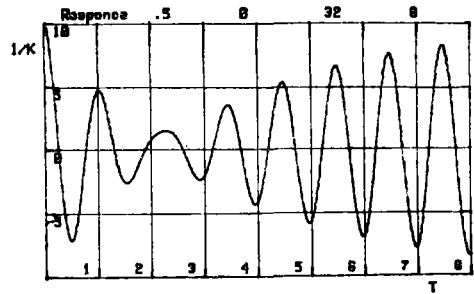


图 12

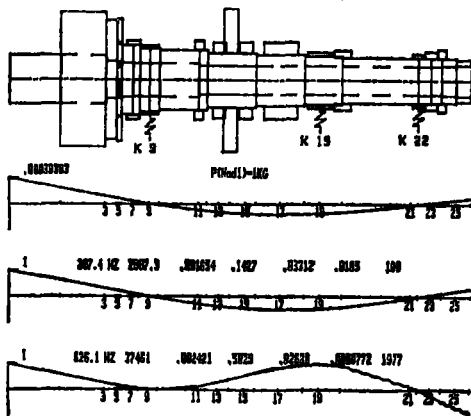


图 11

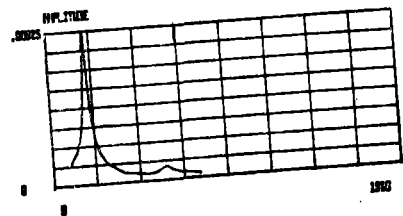


图 12

参 考 文 献

- [1] 蔣式昕. 机床主轴系统动态特性的计算. 铣床通讯, 1983; (2): 1~8
[2] 第一汽车厂电算处, 吉林工业大学力学教研室. QJF—1程序理论说明书. 1983

Research of Difference Method for Solving Finite Element Dynamics Equation

Yang Jiahua

(Department of Mechanical Engineering)

【Abstract】 In this paper, the stable difference schemes for solving finite element dynamics equations are constructed and successfully applied to the calculation of structural vibration problems. This difference method is effective in the solvation of finite element dynamics equations.

Key Words: finite element, dynamics equation, difference method