第21卷 第1期 北京工业大学学报 Vol. 21 No. 1
1995年3月 JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY Mar. 1994

非紧空间及一般点集上极大极小定理*

程曹宗

（北京工业大学计算机学院，100044）

摘　要　给出了一类非紧空间及一般点集上极大极小定理．首先证明了，X为拓扑空间，Y为任意集时，具有$t-$拟凸性的泛函f, g: $X\times Y\to R$的极大极小比较定理．其次证明了，X和Y均为任意集时，具有$t-$拟凸性的殆周期泛函f的极大极小定理．

关键词　极大极小，拟凸(凹)，$t-$拟凸(凹)

分类号　O189.2

1953年Fan ky在Von Neumann等人的工作基础上，给出了一类无代数结构的极大极小定理[1]．后经许多作者的推广，定理中关于泛函的凸性及定理的形式得到进一步放宽．在文献[2]中用$t-$拟凸$(0<t<1)$代替拟凸证明了该定理．文献[3]中在$\frac{1}{2}-$拟凸条件下证明了两个泛函的极大极小不等式．但基本空间的紧性条件并未得到改进．这无疑是个局限．本文的定理1除去了空间紧性条件仅要求泛函的水平集$\{x\in X: f(x, y)\leqslant\overline{\alpha}\}$对某一个$\overline{\alpha}\in R$为紧子集（当$X$为紧空间，$f$关于$X$下半连续时，该水平集自然是紧子集），并在$t-$拟凸$(0<t<1)$条件下（而不是仅对$t=\frac{1}{2}$）得到了两个泛函的极大极小不等式．作为附带结果，容易验证文献[1～3]等文献的一些结论可作为定理1的特例．定理2则是对文献[1]中定理3的直接推广．这里指出，本文的结论与文献[4]中的结论是属于不同类型的．文中的定义可参见文献[1]或文献[2]．

定义1　设X, Y为任意集．f: $X\times Y\to R$称为关于X $t-$拟凸是指对某个固定的$t\in(0, 1)$使得对$\forall x_1, x_2\in X$存在$x_0\in X$使$f(x_0, y)\leqslant tf(x_1, y)+(1-t)f(x_2, y)$对$\forall y\in Y$成立．类似地，$f$称为关于$Y$ $s-$拟凹是指对某个固定的$s\in(0, 1)$使得对$\forall y_1, y_2\in Y$存在$y_0\in Y$使$f(x, y_0)\geqslant sf(x, y_1)+(1-s)f(x, y_2)$对$\forall x\in X$成立．

f称为关于X拟凸是指对任意$t\in(0, 1)$上述不等式成立，类似地定义f关于Y拟凹．

显然f关于X拟凸则f为$t-$拟凸$(0<t<1)$．由文献[2]知，f关于X $t-$拟凸$(0<t<1)$，则存在$[0, 1]$中稠密子集D使得对$\forall\alpha\in D$, f关于X为$\alpha-$拟凸．进而由归纳法可知，若f关于X $t-$拟凸$(0<t<1)$，则对任意自然数m，存在$\Delta^{m-1}=\{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m): \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\geqslant 0, \sum_{k=1}^{m}\xi_k=1\}$中稠密子集$M$使得对$\forall x_1, x_2, \cdots, x_m\in X$及$\forall\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$

* 国家及北京市自然科学基金资助项目．

收稿日期：1994-09-29.

$\in M$，存在 $x_0 \in X$ 使 $f(x_0\ y) \leqslant \xi_1 f(x_1\ y) + \xi_2 f(x_2\ y) + \cdots + \xi_m f(x_m\ y)$ 对 $\forall y \in Y$ 成立．对 f 的凹性有类似关系．

引理 设 X 为 Hausdorff 拓扑空间，f_1 和 f_2 为 X 上下半连续泛函，且同为 $t-$ 拟凸 (即存在 $t \in (0,1)$，对 $\forall x_1, x_2 \in X$ 存在 $x_0 \in X$ 使得 $f_k(x_0) \leqslant t f_k(x_1) + (1-t) f_k(x_2)$，$k=1, 2$)．集合 $X_k = \{x \in X: f_k(x) \leqslant 0\}$ 为 X 中紧子集 ($k=1, 2$)．若 $\max\{f_1(x), f_2(x)\} > 0$ 对 $\forall x \in X$，则存在 $\eta_1, \eta_2 \geqslant 0$，$\eta_1 + \eta_2 = 1$ 使

$$\eta_1 f_1(x) + \eta_2 f_2(x) > 0 \qquad \text{对 } \forall x \in X.$$

证明 由假设知 X_1，X_2 为 X 中不相交的紧子集．若 $X_k = \varnothing$，则取 $\eta_k = 1$ ($k=1$ 或 2) 结论成立．以下 X_1，X_2 均非空．于是对 $\forall x \in X_1$，$-f_1(x) \geqslant 0$，$f_2(x) > 0$，$-f_1(x)/f_2(x)$ 上半连续且非负．设 $x_1 \in X_1$，$\mu_1 \geqslant 0$ 使得

$$\max_{x \in X_1} \frac{-f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{-f_1(x_1)}{f_2(x_1)} = \mu_1 \tag{1}$$

同理设 $x_2 \in X_2$，$\mu_2 \geqslant 0$ 使得

$$\max_{x \in X_2} \frac{-f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{-f_2(x_2)}{f_1(x_2)} = \mu_2 \tag{2}$$

以下说明 $\mu_1 \mu_2 < 1$．无妨设 $\mu_1 \mu_2 \neq 0$．此时 $f_1(x_1) < 0$，$f_1(x_2) > 0$，于是存在 $\xi_1, \xi_2 \geqslant 0$，$\xi_1 + \xi_2 = 1$ 使得

$$\xi_1 f_1(x_1) + \xi_2 f_1(x_2) = 0 \tag{3}$$

注意到 $h(\alpha) = \alpha f_1(x_1) + (1-\alpha) f_1(x_2)$ 为单调减连续函数，因此当 $\alpha \geqslant \xi_1$ 时

$$\alpha f_1(x_1) + (1-\alpha) f_1(x_2) \leqslant 0 \tag{4}$$

由已知，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 同为 $t-$ 拟凸，所以存在 $[0, 1]$ 中稠密子集 D 使得对 $\forall \alpha \in D$，$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 同是 $\alpha-$ 拟凸的．特别当 $\alpha \in D \cap [\xi_1, 1]$，存在 $x_\alpha \in X$ 使得

$$f_k(x_\alpha) \leqslant \alpha f_k(x_1) + (1-\alpha) f_k(x_2) \qquad k=1, 2 \tag{5}$$

由 (4) 知 $f_1(x_\alpha) \leqslant 0$ 即 $x_\alpha \in X_1$．因 X_1 紧，可选取 $\alpha_n \in D$ ($n=1, 2, \cdots$) 单调下降收敛于 ξ_1，$\{x_{\alpha_n}\}$ 存在聚点 $x_0 \in X_1$．则 $f_1(x_0) \leqslant 0$，$f_2(x_0) > 0$．由 (5) 式及 $f_2(x)$ 下半连续知 $f_2(x_0) \leqslant \lim_n \sup f_2(x_{\alpha_n}) \leqslant \lim_n [\alpha_n f_2(x_1) + (1-\alpha_n) f_2(x_2)] = \xi_1 f_2(x_1) + \xi_2 f_2(x_2)$，故有 $\xi_1 f_2(x_1) + \xi_2 f_2(x_2) > 0$．

根据 (1)、(2) 及 $\mu_1 > 0$，上式可写成 $\xi_1 f_1(x_1) + \mu_1 \mu_2 \xi_2 f_1(x_2) < 0$．此与 (3) 比较即得 $\mu_1 \mu_2 < 1$．

取 $\nu_1 > \mu_1$，$\nu_2 > \mu_2$，$\nu_1 \nu_2 = 1$．令 $\eta_1 = \dfrac{1}{1+\nu_1}$，$\eta_2 = \dfrac{\nu_1}{1+\nu_1}$，则

$$\eta_1 f_1(x) + \eta_2 f_2(x) > 0, \quad \text{对 } \forall x \in X \tag{6}$$

事实上，若 $x \notin X_1 \cup X_2$ 时，(6) 成立．若 $x \in X_1$，则 $0 \leqslant f_1(x) + \mu_1 f_2(x) < f_1(x) + \nu_1 f_2(x) = (1+\nu_1)[\eta_1 f_1(x) + \eta_2 f_2(x)]$，即 (6) 式成立．$x \in X_2$ 时类似说明．引理证毕．

定理 1 设 X 为 Hausdorff 拓扑空间，Y 为任意集，$f, g: X \times Y \to R$．f 关于 X 下半连续，$t-$ 拟凸对某个 $t \in (0, 1)$．对 $\forall y \in Y$，$\inf_X f(x, y) > -\infty$．g 关于 Y 为 $s-$ 拟凹对某个

$s\in(0,1)$. 存在 $\overline{\alpha}>\sup\limits_{Y}\inf\limits_{X}g(x,y)$, 对 $\forall y\in Y$ 集合 $\{x\in X: f(x,y)\leqslant\overline{\alpha}\}$ 为紧子集. 并且在 $X\times Y$ 上 $f\leqslant g$. 那么

$$\inf_{X}\sup_{Y}f(x,y)\leqslant\sup_{Y}\inf_{X}g(x,y)$$

证明　无妨设 $\overline{\alpha}=0$, 否则用 $f-\overline{\alpha}$, $g-\overline{\alpha}$ 代替 f 和 g. 以下分 3 步证明.

(i)　对于任意有限集 $\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}\subset Y$. 如果 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}f(x,y_k)>0$ 对 $\forall x\in X$ 成立, 则存在 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m\geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m}\eta_k=1$ 使得

$$\eta_1f(xy_1)+\eta_2f(xy_2)+\cdots+\eta_mf(xy_m)>0,\ \text{对}\ \forall x\in X.$$

用归纳法证明, $m=1$ 时显然. $m=2$ 时, $f(xy_2)$ 和 $f(xy_2)$ 作为 X 上泛函满足引理的条件, 故结论成立.

假设对 $m-1$ 时成立. 令 $X_m=\{x\in X: f(xy_m)\leqslant 0\}$. 若 $X_m=\varnothing$, 取 $\eta_m=1$ 结论成立. 设 $X_m\neq\varnothing$, 用 $X_m\times Y$ 代替 $X\times Y$, 满足定理的全部条件. 由于对 $\forall x\in X_m$, $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m-1}f(xy_k)>0$, 依归纳假设存在 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{m-1}$, $\sum\limits_{k=1}^{m-1}\eta_k=1$ 使得 $\eta_1f(xy_1)+\eta_2f(xy_2)+\cdots+\eta_{m-1}f(xy_{m-1})>0$ 对 $\forall x\in X_m$ 成立.

令 $h(x)=\eta_1f(xy_1)+\eta_2f(xy_2)+\cdots+\eta_{m-1}f(xy_{m-1})$, $x\in X$. 由于 f 关于 X 为 $t-$ 拟凸, 所以对 $x_1,x_2\in X$ 存在 $x_0\in X$ 使 $f(x_0y)\leqslant tf(x_1y)+(1-t)f(x_2y)$ 对 $\forall y\in Y$ 成立. 特别有 $f(x_0y_k)\leqslant tf(x_1y_k)+(1-t)f(x_2y_k)$, $k=1,2,\cdots,m$. 于是

$$\begin{aligned}h(x_0)&=\eta_1f(x_0y_1)+\eta_2f(x_0y_2)+\cdots+\eta_{m-1}f(x_0y_{m-1})\\&\leqslant t(\eta_1f(x_1y_1)+\eta_2f(x_1y_2)+\cdots+\eta_{m-1}f(x_1y_{m-1}))\\&\quad+(1-t)(\eta_1f(x_2y_1)+\eta_2f(x_2y_2)+\cdots+\eta_{m-1}f(x_2y_{m-1}))\\&=th(x_1)+(1-t)h(x_2)\end{aligned}$$

即 $h(x)$ 及 $f(xy_m)$ 同为 $t-$ 拟凸的. 且 $\max\{h(x),f(xy_m)\}>0$ 对 $\forall x\in X$. 因此由引理可知, 存在 $r_1,r_2\geqslant 0$, $r_1+r_2=1$ 使得 $r_1h(x)+r_2f(xy_m)>0$ 对 $\forall x\in X$. 即 $r_1h_1f(xy_1)+r_1\eta_2f(xy_2)+\cdots+r_1\eta_{m-1}f(xy_{m-1})+r_2f(xy_m)>0$ 对 $\forall x\in X$. 故 (i) 成立.

(ii)　在 (i) 的条件下, 对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $y_0\in Y$ 使得

$$g(xy_0)>-\varepsilon\quad \text{对}\ \forall x\in X.$$

令 $H:\Delta^{m-1}\to R$, $H(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)=\inf\limits_{X}(\xi_1f(xy_1)+\xi_2f(xy_2)+\cdots+\xi_mf(xy_m))$. 则 H 为凸有限函数因而连续. 由 (i) 知, 存在 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)$ 使得 $H(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)\geqslant 0$. 于是对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $(\overline{\eta_1},\overline{\eta_2},\cdots,\overline{\eta_m})\in\Delta^{m-1}$ 使 $H(\overline{\eta_1},\overline{\eta_2},\cdots,\overline{\eta_m})>-\varepsilon$. 又因 $f\leqslant g$, 所以有

$$\overline{\eta_1}g(xy_1)+\overline{\eta_2}g(xy_2)+\cdots+\overline{\eta_m}g(xy_m)>-\varepsilon\qquad\text{对}\ \forall x\in X.$$

而 g 关于 Y 为 $s-$ 拟凹, 故存在稠密子集 $M\subset\Delta^{m-1}$, 对 $\forall(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)\in M$, 存在 $y_0\in Y$ 使得 $g(xy_0)\geqslant\xi_1g(xy_1)+\xi_2g(xy_2)+\cdots+\xi_mg(xy_m)$ 对 $\forall x\in X$.

从上面讨论可知 $(\overline{\eta_1}, \overline{\eta_2}, \cdots, \overline{\eta_m})$ 可在 M 中取到．因此存在 $y_0 \in Y$ 使

$$g(xy_0) \geqslant \overline{\eta_1} g(xy_1) + \overline{\eta_2} g(xy_2) + \cdots + \overline{\eta_m} g(xy_m) > -\varepsilon \text{ 对 } \forall x \in X.$$

(iii) 令 $L(y, \alpha) = \{x \in X: f(xy) \leqslant \alpha\}$，其中实数 α 满足 $\sup\limits_Y \inf\limits_X g(x, y) < \alpha \leqslant \overline{\alpha}$．则 $\bigcap\limits_{y \in Y} L(y\alpha) \neq \varnothing$．

反证．假设 $\bigcap\limits_{y \in Y} L(y\alpha) = \varnothing$．因为 $L(y\alpha)$ 是紧集 $L(y\overline{\alpha})$ 的闭子集从而也为紧集，所以存在 $y_1, y_2, \cdots, y_m \in Y$ 使 $\bigcap\limits_{k=1}^{m} L(y_k\alpha) = \varnothing$，即 $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} f(xy_k) > \alpha$ 对 $\forall x \in X$．由 (ii) 知，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $y_0 \in Y$ 使 $g(xy_0) > \alpha - \varepsilon$ 对 $\forall x \in X$（考虑 $f-\alpha$, $g-\alpha$ 即可）．于是 $\sup\limits_Y \inf\limits_X g(xy) \geqslant \alpha > \sup\limits_Y \inf\limits_X g(xy)$．矛盾．

设 $x_0 \in \bigcap\limits_{y \in Y} L(y\alpha)$，即 $f(x_0 y) \leqslant \alpha$ 对 $\forall y \in Y$，亦即 $\inf\limits_X \sup\limits_Y f(xy) \leqslant \alpha$．因此

$$\inf_X \sup_Y f(xy) \leqslant \sup_Y \inf_X g(xy)$$

定理 1 证毕．

推论 1 (Simons [3]) 设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间，Y 为任意集．$f, g: X \times Y \to R$．f 关于 X 为 $\frac{1}{2}$－拟凸且下半连续，g 关于 Y 为 $\frac{1}{2}$－拟凹．在 $X \times Y$ 上 $f \leqslant g$．那么

$$\inf_X \sup_Y f(xy) \leqslant \sup_Y \inf_X g(xy)$$

推论 2 设 X 为 Hausdorff 拓扑空间，Y 为任意集．$f: X \times Y \to R$．f 关于 X 下半连续且 t－拟凸对某个 $t \in (0, 1)$．对 $\forall y \in Y$, $\inf\limits_X f(xy) > -\infty$．$f$ 关于 Y 为 s－拟凹对某个 $s \in (0, 1)$．存在 $\overline{\alpha} > \sup\limits_Y \inf\limits_X f(xy)$，对 $\forall y \in Y$ 集合 $\{x \in X: f(xy) \leqslant \overline{\alpha}\}$ 为紧子集．那么

$$\inf_X \sup_Y f(xy) = \sup_Y \inf_X f(xy)$$

在定理 1 中取 $f = g$ 即得．

推论 3 (M A Gerachty and Bor－Luh Lin[2]) 设 X 为紧 Hausdoff 拓扑空间，Y 为任意集．$f: X \times Y \to R$．f 关于 X 下半连续，存在 $s, t \in (0, 1)$ 使得 f 关于 X 为 t－拟凸，关于 Y 为 s－拟凹．那么

$$\inf_X \sup_Y f(xy) = \sup_Y \inf_X f(xy)$$

Fan ky[1] 中定理 2 已蕴含在推论 1 和推论 3 之中，故不另作叙述．其他有关结果亦不一一列出．

定义 2 设 X, Y 为任意集．$f: X \times Y \to R$ 称为右殆周期泛函，若 f 有界且对 $\forall \varepsilon > 0$ 存在有限复盖 $Y = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Y_k$ 使得对 $\forall x \in X$, $y', y'' \in Y_k$，有 $|f(xy') - f(xy'')| < \varepsilon$．同样定义左殆

周期泛函．但由于右殆周期泛　也是左殆周期泛函．所以统称为殆周期泛函．

定理 2　设 X, Y 为任意集．f: $X\times Y\rightarrow R$ 为殆周期泛函，存在 $s,\ t\in(0,\ 1)$ 使得 f 关于 X 为 $t-$ 拟凸，关于 Y 为 $s-$ 拟凹．那么

$$\inf_X \sup_Y f(xy)=\sup_Y \inf_X f(xy)$$

证明　由文献[1]中定理 3 的 (i) 知，上述结论等价于：对 $\forall\varepsilon>0$, $\forall x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in X$, $\forall y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m\in Y$, 存在 $x_0\in X$, $y_0\in Y$ 使

$$f(x_0y_k)-f(x_iy_0)\leqslant\varepsilon\qquad(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m)$$

令 G: $\Delta^{n-1}\times\Delta^{m-1}\rightarrow R$, $G(\xi,\ \eta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\xi_i\eta_k f(x_iy_k)$．由 Von Neumann 极大极小定理知，存在 $\overline{\xi}=(\overline{\xi_1},\ \overline{\xi_2},\ \cdots,\ \overline{\xi_n})\in\Delta^{n-1}$ 及 $\overline{\eta}=(\overline{\eta_1},\ \overline{\eta_2},\ \cdots,\ \overline{\eta_m})\in\Delta^{m-1}$ 使得

$$\max_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{i=1}^{n}\overline{\xi_i}f(x_iy_k)\leqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{m}\overline{\eta_k}f(x_iy_k)$$

又因 f 关于 X 是 $t-$ 拟凸，所以存在 Δ^{n-1} 中稠密子集 M，对 $\forall x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\in X$ 和 $\forall\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\in M$, 存在 $x_0\in X$ 使得 $f(x_0y)\leqslant\xi_1f(x_1y)+\xi_2f(x_2y)+\cdots+\xi_nf(x_ny)$ 对 $\forall y\in Y$．

对 $\forall\varepsilon>0$, 可选取 $\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\in M$ 使得 $\xi_1f(x_1y_k)+\xi_2f(x_2y_k)+\cdots+\xi_nf(x_ny_k)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{i=1}^{n}\overline{\xi_i}f(x_iy_k)$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$．于是有 $x_0\in X$ 使得

$$f(x_0y_k)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant m}\sum_{i=1}^{n}\overline{\xi_i}f(x_iy_k),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

同理由 f 关于 Y 为 $s-$ 拟凹知，存在 $y_0\in Y$ 使

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{m}\overline{\eta_k}f(x_iy_k)\leqslant f(x_iy_0)+\frac{\varepsilon}{2},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

故 $f(x_0y_k)-f(x_iy_0)\leqslant\varepsilon\ (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m)$．定理 2 证毕．

推论 4 (Fan ky[1])　设 X, Y 为任意集，f: $X\times Y\rightarrow R$ 为殆周期泛函．若 f 关于 X 拟凸，关于 Y 拟凹，那么

$$\inf_Y\sup_X f(xy)=\sup_X\inf_Y f(xy).$$

参 考 文 献

1 Ky Fan. Minimax theorems, Proc Nat. Acad Sci. 1953, 39: 42 ~ 47

2 Geraghty M A, Lin Bor-Luh. Minimax theorems without linear structure. Linear and mulitilinear algebra 1985, 17: 171 ~ 180

3 Simons S. Miniamx and variational inequalities. Game theory and mathematical economics. 1981, 379 ~ 388

4 程曹宗，林有浩．不动点型极大极小定理的一点推广．数学学报，1991, 34(4): 502 ~ 507

5 Von Neuman. Zur theorie der gesellschaftsspiele. Math Ann. 1928, 295 ~ 320

6 Brezis H, Nirenberg L, Stampacchia. A Remark on Ky Fan's minimax principle. Boll U M I. 1972, 6(4): 293 ~ 300

Minimax Theorems in Topological Spaces Without Compact and Arbitrary Sets

Cheng Caozong

(Computer Institute, Beijing Polytechnic University, 100044)

Abstract In this paper, we give minimax theorems in topological spaces without compact and arbitrary sets. First, we prove a minimax inequality for t-convexlike function f and g on the product set $X \times Y$ of a topological space X and an arbitrary set Y. Secondly, we prove a minimax theorem for t-convexlike almost periodic function f on the product set $X \times Y$ of two arbitrary sets X and Y.

Keywords minimax, convexlike (concavelike), t-convexlike (t-concavelike)