

不同边界条件下动脉血流数值研究

何 凡, 李晓阳

(北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院, 北京 100124)

摘 要: 为了对不同边界条件下动脉血流进行数值计算和比较, 分析了血流动力学中边界条件的选取, 从而给出了定解条件. 在此基础上选用胸主动脉血管参数, 采用不同入口和出口边界条件分别对定常流和非定常流进行数值计算. 结果表明: 在定常流下压力分布均匀, 抛物面形状的速度逐渐被拉平; 在非定常流下压力波形逐渐由入口波形向出口波形进行转换, 速度分布平坦. 边界条件对流场分布有重要影响.

关键词: 血流动力学; 边界条件; 定常流; 非定常流

中图分类号: Q66

文献标识码: A

文章编号: 0254-0037(2009)01-0135-05

血流动力学计算中边界条件的选取是一个很重要的课题, 直接关系到数值模型的建立. 选取合适的初始和边界条件仍然是个挑战, 没有很好地解决^[1]. 对于不同的数值模型, 给出的边界条件差异较大. Cheer等^[2]和 Johnston等^[3]采用入口速度、出口压力、刚性壁面的边界条件来研究动脉中的定常流问题; Tang等^[4]在研究定常流颈动脉狭窄流固耦合时, 给定了入口和出口均为常压的条件; 在刚性壁面条件下, Long等^[5]和 Johnston等^[6]采用入口速度或流量、出口压力研究了动脉中的非定常流问题; Zhao等^[7]和 Li等^[8]研究了非定常血流和管壁的耦合情况, 他们采用了入口速度或流量、出口压力或入口压力、出口速度或流量的条件; 而 Tang等^[9]对于类似问题的研究, 采用了入口和出口均为脉动压力的条件. 本文首先分析了血流动力学中边界条件的选取问题, 然后在血管为刚性边界的假设下, 根据定解条件采用不同入口和出口边界条件分别对定常流和非定常流进行数值计算和比较, 从而研究边界条件对流场分布的影响.

1 模型和方法

1.1 边界条件的选取和方程定解

对于血流动力学的边界条件和定解问题讨论, 在不可压缩、牛顿流体、二维轴对称的基本假设下展开, 对于更为一般的情况, 从方法上来说与此类似. 在基本假设的基础上, 血流动力学的 N-S 和连续性方程可以写为

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

为了对上述的偏微分方程进行求解, 可以采用有限差分法对方程进行离散, 从而得到

$$\rho \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} + v_{i,j}^n \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z} \right) = - \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z} +$$

收稿日期: 2007-03-26.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372010).

作者简介: 何 凡(1979-), 男, 江西南昌人, 博士生; 李晓阳(1955-), 男, 北京人, 教授, 博士生导师.

$$\mu \left(\frac{2u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 4u_{i,j}^n + 2u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r^2} + \frac{2u_{i+\frac{1}{2},j}^n - 4u_{i,j}^n + 2u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z^2} + \frac{1}{r} \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} \right) \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} + v_{i,j}^n \frac{v_{i+\frac{1}{2},j}^n - v_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z} \right) = - \frac{p_{i,j+\frac{1}{2}}^n - p_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} +$$

$$\mu \left(\frac{2v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 4v_{i,j}^n + 2v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r^2} + \frac{2v_{i+\frac{1}{2},j}^n - 4v_{i,j}^n + 2v_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z^2} + \frac{1}{r} \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} - \frac{v_{i,j}^n}{r^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z} + \frac{v_{i,j}^n}{r} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^n - v_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} = 0 \quad (6)$$

下面以 u 方向的动量方程为例来说明初值条件、壁面条件和边界条件的选取问题, v 方向与之类似。

1.1.1 初值条件

通过变换可以将方程(4)表示为

$$u_{i,j}^{n+1} = - \frac{\Delta t p_{i+\frac{1}{2},j}^n - p_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\rho \Delta z} +$$

$$\frac{\mu \Delta t}{\rho} \left(\frac{2u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - 4u_{i,j}^n + 2u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r^2} + \frac{2u_{i+\frac{1}{2},j}^n - 4u_{i,j}^n + 2u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z^2} + \frac{1}{r} \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} \right) -$$

$$u_{i,j}^n \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}}^n - u_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta r} \Delta t - v_{i,j}^n \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^n - u_{i-\frac{1}{2},j}^n}{\Delta z} \Delta t + u_{i,j}^n \quad (7)$$

对于非定常流情况,如果只考虑时间分布,由方程(7)可以看出,为了求得 $n+1$ 时刻的 u , 必须已知 n 时刻的 u 、 v 和 p , 这就说明了必须已知 $t=0$ 时刻的 u 、 v 和 p (即初值), 才能通过迭代求得以后各时刻的 u 、 v 和 p ; 但是对于定常流情况, 因为 $\partial u / \partial t = 0$, 所以不需要给定初值条件。

1.1.2 壁面条件

如图 1 所示, $\Gamma_{i,j-\frac{1}{2}}$ 、 $\Gamma_{i,j+\frac{1}{2}}$ 、 $\Gamma_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $\Gamma_{i+\frac{1}{2},j}$ 是网格点 $\Omega_{i,j}$ 的 4 个边界, $p_{i,j}$ 和 $u_{i,j}$ 是网格点 $\Omega_{i,j}$ 上的压力和速度; $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $u_{i-\frac{1}{2},j}$ 是边界 $\Gamma_{i-\frac{1}{2},j}$ 上的压力和速度; $p_{i+\frac{1}{2},j}$ 和 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ 是边界 $\Gamma_{i+\frac{1}{2},j}$ 上的压力和速度; $u_{i,j-\frac{1}{2}}$ 是边界 $\Gamma_{i,j-\frac{1}{2}}$ 上的速度; $u_{i,j+\frac{1}{2}}$ 是边界 $\Gamma_{i,j+\frac{1}{2}}$ 上的速度。将边界 $\Gamma_{i,j-\frac{1}{2}}$ 和 $\Gamma_{i,j+\frac{1}{2}}$ 看作壁面, 边界 $\Gamma_{i-\frac{1}{2},j}$ 看作入口, 边界 $\Gamma_{i+\frac{1}{2},j}$ 看作出口。

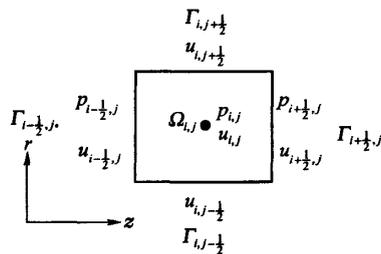


图 1 网格点的边界示意图

Fig.1 The sketch map of boundaries at a grid point

如果只考虑空间分布, 方程(4)中包含 $u_{i,j}$ 、 $v_{i,j}$ 、 $u_{i,j-\frac{1}{2}}$ 、 $u_{i,j+\frac{1}{2}}$ 、 $u_{i-\frac{1}{2},j}$ 、 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ 、 $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$ 8 个未

知量, 连续性方程(6)包含 $u_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $u_{i+\frac{1}{2},j}$, 要使方程(4)有确定的解, 必须已知 6 个量。因为 $u_{i,j}$ 和 $v_{i,j}$ 可以由边界上的 u 和 v 通过某种具体的权重进行插值得到, 所以在空间上只要已知 4 个量就可以使方程定解。

对于壁面条件的选取主要有 3 种情况, 但不论哪种情况, 都要首先保证血液在壁面上连续, 也就是壁面无滑移, 即 $u_{i,j-\frac{1}{2}} = u_{i,j+\frac{1}{2}} = u_{\text{wall}}$ 。1) 刚性边界壁面条件, 有 $u_{i,j-\frac{1}{2}} = u_{i,j+\frac{1}{2}} = 0$; 2) 弹性边界壁面条件, 有 $u_{i,j-\frac{1}{2}} = u_{i,j+\frac{1}{2}} = \partial z / \partial t$; $d_t = d_s$; 3) 弹性固体壁面条件, 有 $u_{i,j-\frac{1}{2}} = u_{i,j+\frac{1}{2}} = \partial z / \partial t$; $d_t = d_s$; $\sigma_t \cdot n_t = \sigma_s \cdot n_s$, 其中, d_t 和 d_s 分别表示流体位移和固体位移; σ 为应力张量; n 为边界法向。

1.1.3 入口和出口条件

对于入口和出口条件, 可以通过以下 8 种情况分别给定: 1) $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$; 2) $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $u_{i+\frac{1}{2},j}$; 3) $u_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$; 4) $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $\partial p / \partial z$; 5) $u_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $\partial p / \partial z$; 6) $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $Q_{i+\frac{1}{2},j}$; 7) $Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$; 8) $Q_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $\partial p / \partial z$ 。

需要说明的是流量 $Q = \rho Au$, A 是截面积, 可以由 Q 计算出 u , 但这时的 u 通常是平均速度, 与直接给定 u 是不相同的, 因为直接给定 u 还包含了速度剖面条件. 另外需指出的是, 在条件 4) 中可以计算出 $p_{i+\frac{1}{2},j}$, 这样与条件 1) 等同. 条件 5) 和条件 8) 中有 $u_{i+\frac{1}{2},j}$ 、 $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$ 3 个未知量, 但是已知的 $\partial p / \partial x$ 等同于 1 个方程, 连同动量方程和连续性方程可以确定出这 3 个未知量.

上述 8 种入口和出口条件中的任一条件分别联合初值条件和壁面条件可以求解出的未知量: 1) $u_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $u_{i+\frac{1}{2},j}$; 2) $u_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$; 3) $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $u_{i+\frac{1}{2},j}$; 4) $u_{i-\frac{1}{2},j}$, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$; 5) $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$; 6) $u_{i-\frac{1}{2},j}$, $u_{i+\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$; 7) $p_{i-\frac{1}{2},j}$, $u_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $u_{i+\frac{1}{2},j}$; 8) $u_{i-\frac{1}{2},j}$, $u_{i+\frac{1}{2},j}$, $p_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $p_{i+\frac{1}{2},j}$.

在边界上的压力和速度确定后, 通过某种具体的权重进行插值, 可以计算出 $p_{i,j}$ 和 $u_{i,j}$, 这样整个区域各时刻的速度场和压力场就可以确定. 由此可以看到, 给定初值条件、壁面条件和 8 种入口和出口条件中任一条件, 方程就存在定解.

1.2 数值计算

实际计算中取人体胸降主动脉的参数进行分析, 将其简化成直径为 20 mm, 长度为 200 mm 的直圆管, 并假设管壁为刚性边界. 在主动脉大血管中血液可简化为不可压缩牛顿流体^[10], 血液的密度为 1 050 kg/m³、动力黏度为 3.5 g/m·s^[11]. 计算中满足壁面无滑移且其速度为 0 的条件. 利用商业软件 CFX5 进行数值计算, 划分单元数为 75 804.

目前在入口条件的剖面选择上还不是很明确, 均匀平钝、抛物形和 Dean 形速度剖面在以往的研究中都曾用到^[12], 在本数值计算中, 对于定常流, 在入口处给定轴向速度 $w = 0.2(1 - r^2/R^2)$ m/s 的抛物面分布, R 表示半径, r 表示离圆点的径向距离, 出口处压力为 0. 对于非定常流, 取心动周期为 0.8 s, 选取入口和出口均为脉动压力作为边界条件, 入口和出口压力波形分别如图 2 和图 3 所示. 经过 3 个周期的迭代计算, 得到了收敛的稳定解.

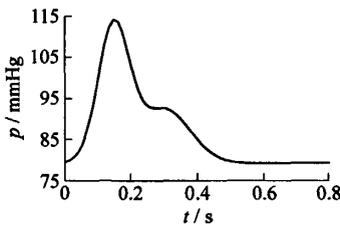


图 2 入口压力图

Fig. 2 The map of pressure at the inlet

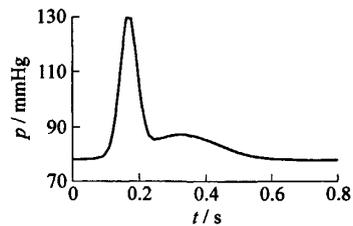


图 3 出口压力图

Fig. 3 The map of pressure at the outlet

2 结果与讨论

流场分布主要包括压力场和速度场等. 通过选取几个有代表性截面和时刻的流场来说明和分析边界条件对数值的影响. 以下各图中 L 表示距入口处的位置.

2.1 定常流

压力和速度分布分别如图 4 和图 5 所示. 除了距入口较远处, 压力分布都很均匀, 压力梯度基本保持不变. 入口的峰值雷诺数是 1 200, 在入口截面速度分布是抛物面形状, 但随着向管轴方向流动, 沿半径方向的速度分布有逐渐被拉平的趋势, 这是由雷诺数较大引起的, 具体来说就是由管径、入口速度、黏度等因素所决定.

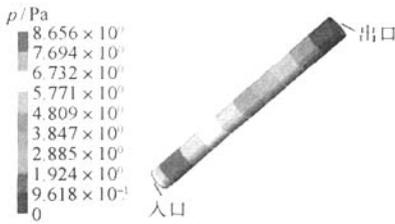


图4 压力分布图

Fig.4 The map of pressure distribution

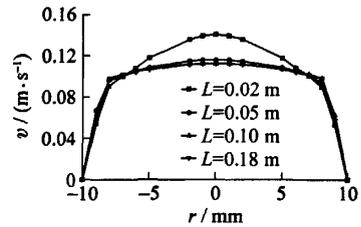


图5 不同截面处的流速分布图

Fig.5 The map of velocity distribution at different cross sections

2.2 非定常流

在数值计算达到周期性稳定的状态后提取到计算结果. 如图6所示, 从距入口不同截面处的压力波形可以看到, 压力波形在前进的过程中, 逐渐由入口波形向出口波形进行转换. 而从各时刻的流速可以看到, 距入口不同处的分布并没有太大的差别, 在0~0.15 s和0.2~0.35 s, 处于加速期; 在0.15~0.2 s和0.35~0.6 s, 处于减速期; 最大流速约为1.16 m/s, 见图7. Womersley数为15.3, 因为Womersley数较大以及管的形状没有变化, 所以边界层很薄, 没有看到倒流的现象, 并且管中心区域的速度分布很平钝, 没有凸起, 见图8.

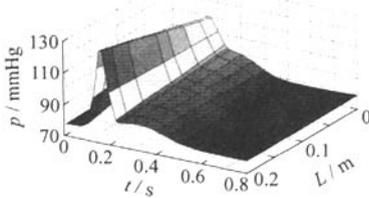


图6 压力分布图

Fig.6 The map of pressure distribution

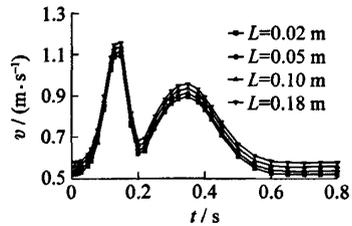


图7 不同时刻的流速分布图

Fig.7 The map of velocity distribution at different time

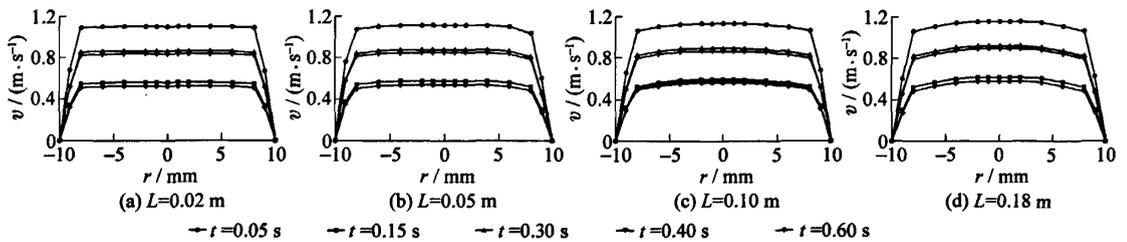


图8 不同截面处的流速分布图

Fig.8 The map of velocity distribution at different cross sections

3 结束语

边界条件对流场分布有重要影响, 直接影响流场的压力和速度分布. 定常流下压力分布均匀, 较大的雷诺数使得抛物面形状的速度分布逐渐被拉平. 非定常流下压力分布由入口压力和出口压力波形决定, 较大的Womersley数使得速度分布平钝. 入口和出口边界条件的选取除了理论上的依据外, 还必须通过实验等来验证. 判断建立的模型是否合理应该遵循与生理事实相符的原则.

参考文献:

- [1] VOLTAIRAS P A, FOTIADIS D I, MASSALAS C V, et al. Anharmonic analysis of arterial blood pressure and flow pulses [J]. *Journal of Biomechanics*, 2005, 38: 1423-1431.
- [2] CHEER A Y, DWYER H A, BARAKAT A I, et al. Computational study of the effect of geometric and flow parameters on the steady flow field at the rabbit aorto-celiac bifurcation[J]. *Biorheology*, 1998, 35(6): 415-435.
- [3] JOHNSTON B M, JOHNSTON P R, CORNEY S, et al. Non-newtonian blood flow in human right coronary arteries: steady state simulations[J]. *Journal of Biomechanics*, 2004, 37: 709-720.
- [4] TANG D, YANG C, KU D N. A 3-D thin-wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with symmetric and asymmetric stenoses[J]. *Computers and Structures*, 1999, 72: 357-377.
- [5] LONG Q, XU X Y, RAMNARINE K V, et al. Numerical investigation of physiologically realistic pulsatile flow through arterial stenosis[J]. *Journal of Biomechanics*, 2001, 34: 1229-1242.
- [6] JOHNSTON B M, JOHNSTON P R, CORNEY S, et al. Non-newtonian blood flow in human right coronary arteries: transient simulations[J]. *Journal of Biomechanics*, 2006, 39: 1116-1128.
- [7] ZHAO S Z, XU X Y, HUGHES A D, et al. Blood flow and vessel mechanics in a physiologically realistic model of a human carotid arterial bifurcation[J]. *Journal of Biomechanics*, 2000, 33: 975-984.
- [8] LI Z, KLEINSTREUER C. Blood flow and structure interactions in a stented abdominal aortic aneurysm model[J]. *Medical Engineering & Physics*, 2005, 27: 369-382.
- [9] TANG D, YANG C, WALKER H, et al. Simulating cyclic artery compression using a 3D unsteady model with fluid-structure interactions[J]. *Computers and Structures*, 2002, 80: 1651-1665.
- [10] PERKTOLD K, RESCH M, FLORIAN H. Pulsatile non-newtonian flow characteristics in a three-dimensional human carotid bifurcation model[J]. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1991, 113: 464-475.
- [11] 邱霖, 范毅方, 董兵超, 等. 锥形血管内血液脉动流的数值模拟[J]. *生物医学工程学杂志*, 2004, 21(4): 558-561.
QIU Lin, FAN Yi-fang, DONG Bing-chao, et al. The numerical simulation of pulsatile flow in a tapered blood vessel[J]. *Journal of Biomedical Engineering*, 2004, 21(4): 558-561. (in Chinese)
- [12] SHIPKOWITZ T, RODGERS V G J, FRAZIN L J, et al. Numerical study on the effect of secondary flow in the human aorta on local shear stresses in abdominal aortic branches[J]. *Journal of Biomechanics*, 2000, 33: 717-728.

Numerical Investigation of Blood Flow in Arteries Under Different Boundary Conditions

HE Fan, LI Xiao-yang

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology,
Beijing 100124, China)

Abstract: To numerically investigate and compare blood flow in arteries under different boundary conditions, the selection of boundary conditions in hemodynamics was analyzed, and then the certain solution conditions were presented. On the basis, the parameters of thoracic aorta were employed, and numerical calculations of steady and unsteady flows were performed under different inlet and outlet conditions respectively. The results show that the pressure distributions are uniform and the parabolic velocity profile is gradually changed to be flat for steady flow, the pressure profile is gradually converted from the inlet pressure profile to the outlet pressure profile and the velocity distributions are blunt for unsteady flow. Boundary conditions have a significant effect on flow field distributions.

Key words: hemodynamics; boundary conditions; steady flow; unsteady flow

(责任编辑 刘 满)