min-S 复合运算下模糊矩阵的幂收敛性†

胡京兴 李贵斌 王 强
（北京工业大学应用数学系，北京，100022）

摘 要 研究了在 min-S 复合运算下模糊矩阵的幂收敛性，其中 S 为并型算子. 本研究的结果是对 min-max 复合运算下模糊矩阵的性质的推广.

关键词 模糊矩阵，并型算子，幂序列
分类号 O159

定义 1 设 $S(x, y)$ 为定义在 $[0, 1]\times[0, 1]$ 上的二元函数，满足条件：

$$\forall x, y, z, x_1, y_1 \in [0, 1],\ 0\leqslant S(x, y)\leqslant 1.$$

且

1) $S(0, 0)=0,\ S(1, 1)=1$
2) $S(x, y)=S(y, x)$
3) $S(S(x, y), z)=S(x, S(y, z))$
4) 若 $x\leqslant x_1,\ y\leqslant y_1$，则 $S(x, y)\leqslant S(x_1, y_1)$

则称 $S(x, y)$ 为一个三角模.

定义 2 设 $S(x, y)$ 是一个三角模，若 $\forall y\in[0, 1]$，有 $S(0, y)=y$，则称 $S(x, y)$ 为一并型算子，简称 S 模，若 $\forall x\in[0, 1]$，有 $S(x, 1)=x$，则称 $S(x, y)$ 为一交型算子，简称 T 模.

定理 1[1] 设 $S(x, y)$ 为 S 模，则

$$S(x, y)\geqslant \max\{x, y\}$$

且 $S(x, y)=\max\{x, y\}$ 的充要条件是：

$$\forall y\in[0, 1],\ 有\ S(y, y)=y.$$

定义 3 设 S 是一个 S 模，$\forall x\in(0, 1)$，记

$$S^{O}(x)=x,\ S^{K}(x)=S(S^{K-1}(x), x),\ \forall k\geqslant 1.$$

如果 $\lim\limits_{K\to\infty} S^{K}(x)=1$，则称 S 为 $1-S$ 模.

下面我们也用 xSy 表示 $S(x, y)$，用 $x\wedge y$ 表示 $\min\{x, y\}$.

引理 1 下列 S 模都是 $1-S$ 模

1）有界和⊕：$x\oplus y=\min\{1, x+y\}$；

收稿日期：1997—06—11
† 北京市教育委员会科技发展计划项目

2) 概率和 $\hat{+}$: $x \hat{+} y = x + y - xy$;

3) 爱因斯坦和 $\overset{+}{\varepsilon}$: $x \overset{+}{\varepsilon} y = \dfrac{x+y}{1+xy}$;

4) 亚格尔和 $\overset{+}{\nu}$: $x \overset{+}{\nu} y = \min\{1, [x^{\nu} + y^{\nu}]^{\frac{1}{\nu}}\}$, 其中 $1 \leqslant \nu < +\infty$;

5) 哈马邱尔和 $\overset{+}{\gamma}$:

$$x \overset{+}{\gamma} y = \frac{x \hat{+} y - (1-\gamma)xy}{\gamma + (1-\gamma)(1-xy)} \quad \text{其中 } 0 \leqslant \gamma < +\infty.$$

定义 4 设 S 是一个 S 模，$x \wedge y = \min\{x, y\}$. A 是一个 $n \times n$ 矩阵

且

$$0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1 \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

记

$$A^K = (a_{ij}^K), \ k \geqslant 1$$

其中 $a_{ij}^1 = a_{ij}$, $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$

$$a_{ij}^K = S(a_{i1}^{k-1}, a_{1j}) \wedge S(a_{i2}^{k-1}, a_{2j}) \wedge \cdots \wedge S(a_{in}^{k-1}, a_{nj})$$

称 A^K 为矩阵 A 在 min－S 复合运算下的幂序列，如果 $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\lim\limits_{k \to \infty} a_{ij}^k$ 存在，则称模糊矩阵 A 在 min－S 复合运算下是收敛的[2].

一个 $n \times n$ 模糊矩阵 A 对应着一个有向图 $D(A) = \langle V, E, W \rangle$ 其中 $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 称为 A 的顶点，

$$E = V \times V = \{<v_i, v_j> \mid v_i, v_j \in V\} \quad W(<v_i, v_j>) = a_{ij}, \ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

在一个给定的三角模 S 下，从 v_i 到 v_j 的一条通路 $L(v_i, v_{l_2}, \cdots, v_{l_{k-1}}, v_j)$ 的容量记作 $W(L(v_i, v_{l_2}, \cdots, v_{l_{k-1}}, v_j))$ 或简记为 $W(L)$，定义为

$$W(L(v_i, v_{l_2}, \cdots, v_{l_{k-1}}, v_j)) = a_{il_1} S a_{l_1 l_2} S \cdots S a_{l_{k-1} j}$$

用 $\|L\|$ 表示通路 L 的长度.

设 $v_{l_s} = v_{\alpha_t}$ 是通路 L_1 的任一顶点，同时也是回路 L_2 的任一顶点，我们构造一个通路 $L_1 + p L_2$,

$$L_1 + p L_2 = L(v_{l_0}, \cdots, \underbrace{v_{l_s}, v_{\alpha_{t+1}}, \cdots, v_{\alpha_0}, v_{\alpha_2}, \cdots, v_{\alpha_t}}_{\text{重复 } p \text{ 次}}, v_{l_{s+1}}, \cdots, v_{l_n})$$

其中 p 为正整数[3].

引理 2 设 A 是一个 $n \times n$ 模糊矩阵，A^k 是在 min－S 复合运算下矩阵 A 的幂序列，则对 $\forall k \geqslant 1$, $a_{ij}^k = \min\{W(L) \mid L$ 是从 v_i 到 v_j 长度 k 的通路$\}$.

引理 3 设 S 为 $1-S$ 模，A 是一个 $n \times n$ 模糊矩阵，$\{L_k\}$, $k \geqslant 1$，表示从 v_i 到 v_j 长度为 k 的通路序列，$1 \leqslant i, j \leqslant n$. 设 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_N$ 是包含于 L_k 中的所有简单回路，如果存在 $0 < \alpha \leqslant 1$，使得

$$\forall 1 \leqslant t \leqslant N, \ W(\Gamma_t) \geqslant \alpha, \ \text{则} \lim_{k \to \infty} W(L_k) = 1$$

证 对于任意给定的 k, L_k 可以表示成从 v_i 到 v_j 的简单通路 L_O 与简单回路 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_N$ 的和，并且

$$k = \|L_O\| + \gamma_1 \|\Gamma_1\| + \gamma_2 \|\Gamma_2\| + \cdots + \gamma_N \|\Gamma_N\|$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N$ 为非负整数，利用 S 模的单调性，有

$$W(L_k) \geqslant S^{(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N)}(\alpha)$$

且$\gamma_1+\gamma_2+\cdots\gamma_N \geqslant \dfrac{k-n+1}{n}$，又因为$S$为$1-S$模．所以$\lim\limits_{k\to\infty} W(L_k)=1$，故$\lim\limits_{k\to\infty} W(L_k)=1$ 证毕．

命题 设S是$1-S$模，A是一个$n\times n$模糊矩阵，A^k是min－S复合运算下矩阵A的幂序列．

$$\overline{A}=(\overline{a}_{ij}),\ 其中\overline{a}_{ij}=\begin{cases}0, & a_{ij}=0\\ 1, & 其他\end{cases}$$

如果存在一个正整数N，使得$\overline{A}^N=U$（U为全矩阵，即元素全为1的矩阵），则

$$\lim_{k\to\infty} A^k=U$$

证 设

$$a=\min\{a_{ij}\mid a_{ij}>0,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n\}$$

则$a>0$．因为存在正整数N．使得$\overline{A}^N=U$，所以，对于$D(A)$中任一简单回路Γ，有$W(\Gamma)\geqslant\alpha$．若不然，则存在包含某一顶点v_i的简单回路Γ_O，使$W(\Gamma_O)=0$．
于是，对于任一正整数p，$a_{ii}^{p\|L_0\|}=\min\{W(L)\mid L是从v_i到v_i长度为p\|L_0\|的回路\}=0$
则$\lim\limits_{k\to\infty}\overline{a}_{ii}^k=0$，这与已知矛盾．结合引理2和引理3，有

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^k=\lim_{k\to\infty} W(L_0)=1.$$

即$\lim\limits_{k\to\infty} A^k=U$ 证毕．

定理2 设S是$1-S$模，A是一个$n\times n$模糊矩阵，$\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$，其中

$$\overline{a}_{ij}=\begin{cases}0, & a_{ij}=0\\ 1, & 其他\end{cases}$$

则在min－S复合运算下，矩阵A收敛的充要条件是$\overline{A}$收敛．

证 “$\Rightarrow$”假设$\overline{A}$不收敛，根据主对角元原理，则存在$1\leqslant i_0\leqslant n$，
使得

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \overline{a}_{i_0i_0}^k=1,\qquad \underline{\lim_{k\to\infty}}\ \overline{a}_{i_0i_0}^k=0$$

于是存在$\{\overline{a}_{i_0i_0}^k\}$的一个子列$\{\overline{a}_{i_0i_0}^{k_t}\}$，使得

$$\overline{a}_{i_0i_0}^{k_t}=1\qquad \overline{a}_{i_0i_0}^{k_t}=\min\{\overline{a}_{i_0l_1}\vee\overline{a}_{l_1l_2}\vee\cdots\vee\overline{a}_{l_{k_t-1}i_0}\}=1$$

故

$$(\overline{a}_{i_0l_1}\vee\overline{a}_{l_1l_2}\vee\cdots\vee\overline{a}_{l_{k_t-1}i_0})=1$$

上式左端的k_t个数中必有一个$\overline{a}_{gh}=1$，于是$a_{gh}\geqslant\alpha$，其中$\alpha=\min\{a_{ij}\mid a_{ij}>0\}$由$S$模的

单调性知

$$a_{i_0 l_1} S a_{l_1 l_2} S \cdots S a_{l_{k_t-1} i_0} \geq \alpha$$

于是

$$a_{i_0 i_0}^{k_t} = \min\{ a_{i_0 l_1} S a_{l_1 l_2} S \cdots S a_{l_{k_t-1} i_0} \} \geq \alpha$$

因此

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \; a_{i_0 i_0}^{k} \geqslant \alpha > 0$$

再由

$$\bar{a}_{i_0 i_0}^{k} \geqslant a_{i_0 i_0}^{k} \text{及} \underline{\lim_{k \to \infty}} \; \bar{a}_{i_0 i_0}^{k} = 0$$

可得 $\underline{\lim_{k \to \infty}} \; a_{i_0 i_0}^{k} = 0$, 因此 $\lim_{k \to \infty} a_{i_0 i_0}^{k}$ 不存在，即 A 不收敛，矛盾.

“$\Leftarrow$” $\forall 1 \leqslant i, j \leqslant n$, $k \geqslant 1$, 由引理 2， 存在从 v_i 到 v_j 长度为 k 的通路 L_k，使得

$$a_{ij}^{k} = W(L_k)$$

设Γ_1，Γ_2，$\cdots$，Γ_N为包含于 L_k中的所有简单回路，下面只有两种情况：

情形 1：如果存在 $0 < \alpha \leqslant 1$，使得$\forall 1 \leqslant t \leqslant N$，都有 $W(\Gamma_t) \geqslant \alpha$，则由引理 3,

$$\lim_{k \to \infty} a_{ij}^{k} = 1$$

情形 2：若存在一些Γ_t，使得 $W(\Gamma_t) = 0$.

设Δ为从 v_i 到 v_j长度不大于 $2n-2$ 的通路的集合，且存在一些 O-顶点包含于 L_k，一个顶点 v_t 称为 O-顶点，如果至少存在一个容量为 0 的回路包含 v_t.

假设

$$\min_{L \in \Delta} \{ W(L) \} = W(L_o)$$

显然，$\forall k \geqslant 1$，$a_{ij}^{k} \geqslant W(L_o)$. 设 v_t 为通路 L_o中的 O-顶点，则存在一个容量为 0 的回路Γ包含 v_t，且 $W(\Gamma) = 0$. 则对于任一正整数 m, $m\Gamma$ 为包含 v_t 的长度为 $m \| \Gamma \|$ 的回路，且 $W(m\Gamma) = 0$.

于是

$$\forall m \geqslant 1, \; a_{tt}^{m \| \Gamma \|} = 0$$

再由$\overline{A}$收敛知，$\lim_{k \to \infty} a_{tt}^{k}$存在，故

$$\lim_{k \to \infty} a_{tt}^{k} = \lim_{k \to \infty} a_{tt}^{m \| \Gamma \|} = 0$$

所以，存在正整数 K，当 $k \geqslant K$时，$0 \leqslant a_{tt}^{k} < \dfrac{\alpha}{2}$

其中 $\alpha = \min \{ a_{ij} \mid a_{ij} > 0 \}$

设 $a_{ij}^{k} = W(C_k)$，其中 C_k 为包含 v_t长度为 k 的回路.

若 $W(C_k) \neq 0$，则 $W(C_k) \geqslant \alpha$，矛盾. 因此 $W(C_k) = 0$. 于是 $\forall k \geqslant K + \| L_o \|$ 有

$$W(L_o) \leqslant a_{ij}^k \leqslant W(L_o + C_{k-\|L_o\|}) = W(L_o)$$

因此 $\lim\limits_{k \to \infty} a_{ij}^k = W(L_o)$，故 A 收敛. 证毕[4].

参 考 文 献

1 何新贵. 模糊知识处理的理论与技术. 北京：国防工业出版社，1994. 23～28

2 Ragab M Z, Eman E G. On the Min-Max Composition of Fuzzy Matrices Fuzzy Sets and Systems. 1995, 75(1): 83～92

3 李乔. 矩阵八讲. 上海：上海科学技术出版社，1988. 150～160

4 Thomason M G. Convergence of Powers of a Fuzzy Matrix. J Math Anal. Appl, 1997, 57(3): 476～480

Convergency of the Power Sequence of A Fuzzy Matrix on Min-*S* Composition

Hu Jingxing Li Guibin Wang Qiang

(Department of Applied Mathematics, Beijing Polytechnic University, Beijing, 100022)

Abstract The properties of the power sequence of a fuzzy matrix A, in the sense of min-S operations, are discussed setting S as the coproduct operator. A necessary and sufficient condition for the power sequence of a fuzzy matrix A is established.

Keywords fuzzy matrix, coproduct operator, power-sequence