

非线性超弹性型微分方程的行波解

范周田

(北京工业大学应用数学系, 100022)

摘 要 考察了非线性超弹性型微分方程 $u_{ttxx} + u_{xx} - u_{tt} + [a(u)]_{xx} = 0, \forall (x, t) \in R^2$ 的行波解, 给出了行波解存在的条件.

关键词 微分方程, 行波解

分类号 O175.14

设 $u(x, t) = V(x - \lambda t), \forall (x, t) \in R^2$ 是方程

$$u_{ttxx} - u_{tt} + u_{xx} + [a(u)]_{xx} = 0, \forall (x, t) \in R^2 \quad (1)$$

的行波解. 则有:

$$u_t = -\lambda V', u_{tt} = \lambda^2 V'', u_x = V', u_{xx} = V'', u_{ttxx} = \lambda^2 V^{(4)}$$

其中“'”表示对 V 的自变量 $\xi = x - \lambda t$ 求导数. 特别有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [a(u(x, t))] &= \frac{\partial}{\partial x} [a(V(\xi))] = \frac{d}{d\xi} [a(V(\xi))] = [a(V)]' \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a(u(x, t))] &= [a(V)]'' \end{aligned}$$

得到(1)的等价式

$$\lambda^2 V^{(4)} - \lambda^2 V'' + V'' + [a(V)]'' = 0$$

即

$$\lambda^2 V^{(4)} - (\lambda^2 - 1) V'' + [a(V)]'' = 0 \quad (2)$$

特别地, 当 $\lambda = 0$ 时, $u(x, t) = V(x)$ 为方程(1)的驻波解, 此时方程(2)退化为

$$V'' = [a(V)]''$$

方程通解为: $a(V) = V + \alpha x + \beta$, 其中 α, β 为任意常数. 在后面的讨论中, 我们总假定 $\lambda \neq 0$.

对给定的 ξ , 在 $(-\infty, \xi]$ 对(2)式进行积分, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\xi} [a(V)]'' d\xi &= \int_{-\infty}^{\xi} \frac{d}{d\xi} [a(V)]' d\xi = [a(V(\xi))] - \lim_{M \rightarrow -\infty} [a(V(M))] \\ &= [a(V(\xi))] - \lim_{M \rightarrow -\infty} a'(V(M)) V'(M) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\xi} V'' d\xi = V' - \lim_{M \rightarrow -\infty} V'(M)$$

$$\int_{-\infty}^{\xi} V^{(4)} d\xi = V^{(3)} - \lim_{M \rightarrow -\infty} V^{(3)}(M)$$

假定

$$\lim_{M \rightarrow -\infty} a'(V(M)) V'(M) = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{M \rightarrow -\infty} V'(M) = V'(-\infty) = 0 \quad (4)$$

$$\lim_{M \rightarrow -\infty} V^{(3)}(M) = V^{(3)}(-\infty) = 0 \quad (5)$$

并注意到, 如果(4)式成立, 只要 $\lim_{M \rightarrow -\infty} V(M) = V(-\infty)$ 存在, 则(3)式自然成立. 在上述的约定下, 我们得到方程(2)的简化式:

$$\lambda^2 V^{(3)} - (\lambda^2 - 1) V' + [a(V)]' = 0 \quad (6)$$

同样, 在 $(-\infty, \xi]$ 对(6)式进行积分, 有

$$\int_{-\infty}^{\xi} [a(V)]' d\xi = a(V(\xi)) - \lim_{M \rightarrow -\infty} [a(V(M))] = a(V(\xi)) - a(V(-\infty))$$

$$\int_{-\infty}^{\xi} V^{(3)} d\xi = V''(\xi) - \lim_{M \rightarrow -\infty} V''(M) = V''(\xi) - V''(-\infty)$$

$$\int_{-\infty}^{\xi} V' d\xi = V(\xi) - \lim_{M \rightarrow -\infty} V(M) = V(\xi) - V(-\infty)$$

并假定

$$V''(-\infty) = V(-\infty) = a[V(-\infty)] = 0$$

即

$$V''(-\infty) = V(-\infty) = a(0) = 0 \quad (7)$$

综合上述讨论, 求方程(1)的行波解化为下述方程满足边界条件的解.

$$\lambda^2 V'' - (\lambda^2 - 1) V + a(V) = 0 \quad (8)$$

$$\begin{cases} V(-\infty) = V'(-\infty) = V''(-\infty) = V^{(3)}(-\infty) = 0 \\ a(0) = 0, a'(0) \text{ 存在} \end{cases} \quad (9)$$

注意到方程(8)为二阶非线性常微方程, 若 a 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续可微, 由微分方程解的存在及延拓定理, 对任意给定的初始条件 $V(0)$, $V'(0)$, 方程(8)在 $(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一解. 我们讨论满足条件(9)的解的存在性. 注意到 $V \equiv c$ (c 为任意常数)都是方程(1)的行波解, 我们只考虑 $V'(\xi)$ 仅有孤立零点的情形.

$$\lambda^2 V'' V' + (\lambda^2 - 1) V V' + a(V) V' = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\xi} 2\lambda^2 V'' V' d\xi = \lambda^2 \int_{-\infty}^{\xi} [(V')^2]' d\xi = \lambda^2 [V'(\xi)]^2 - \lambda^2 [V'(-\infty)]^2 = \lambda^2 [V'(\xi)]^2$$

$$\int_{-\infty}^{\xi} 2(\lambda^2 - 1) V V' d\xi = (\lambda^2 - 1) V^2(\xi) - (\lambda^2 - 1) V^2(-\infty) = (\lambda^2 - 1) V^2(\xi)$$

令

$$A(V) = \int_{-\infty}^{\xi} 2a(V) V' d\xi = 2 \int_0^V a(V) dV$$

显然有 $A(0) = 0$, 我们有

$$\lambda^2 V'^2 - (\lambda^2 - 1) V^2 + A(V) = 0 \quad (10)$$

现在寻求方程(10)有满足

$$\begin{cases} V(-\infty) = V'(-\infty) = V''(-\infty) = V^{(3)}(-\infty) = 0 \\ A(0) = A'(0) = 0, A''(0) \text{ 存在} \end{cases} \quad (11)$$

的解时, $A(V)$ 应满足的条件.

首先考察(11)式, 并设

$$\begin{cases} A(0) = A'(0) = 0, A''(0) \text{ 存在} \\ V(-\infty) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

引理: 设 V 是方程(10)的解, 则条件(11) $\Leftrightarrow$ 条件(12).

证明: 显然可由(11)式推出(12)式, 我们证明由(12)式也可推出(11)式.

设(12)式满足, 由(10)式有 $V'(-\infty) = 0$.

由

$$A(V) = 2 \int_0^V a(V) dV, A'(0) = 0$$

有 $a(0) = 0$,

代入(8)式有 $V''(-\infty) = 0$.

此时(7)式满足. 注意到 $[a(V)]' = a'(V) V'$ 且 $a'(0)$ 存在, 有

$$[a(V)]'|_{\xi=-\infty} = 0$$

代入(6)式, 有

$$V^{(3)}(-\infty) = 0$$

因此, (11)式成立.

定理 1 若 $A(V) < (\lambda^2 - 1) V^2$, 且

$$A(V) = O(V^2), (V \rightarrow 0)$$

则方程(1)有满足条件(12)的行波解.

证明 由 $A(V) = O(V^2)$, 有 $A(0) = A'(0) = 0$, $A''(0)$ 存在, 我们只需证明 $V(-\infty) = 0$. 由(10)有

$$V' = \frac{dV}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{(\lambda^2 - 1) V^2 - A(V)}{\lambda^2}}$$

$$d\xi = \pm \frac{|\lambda|}{\sqrt{(1 - \lambda^2) V^2 - A(V)}} dV \quad (13)$$

$$\xi = \pm \int_{V(0)}^V \frac{|\lambda|}{\sqrt{(1 - \lambda^2) V^2 - A(V)}} dV \quad (14)$$

由

$$A(V) < (1 - \lambda^2) V^2, \quad A(V) = O(V^2)$$

有

$$\lim_{V \rightarrow 0} \int_{V(0)}^V \frac{|\lambda|}{\sqrt{(1 - \lambda^2) V^2 - A(V)}} dV = \infty$$

由(14)有

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} V(\xi) = V(-\infty) = 0$$

定理 2 若 $A(V) < (\lambda^2 - 1) V^2$, 且

$$A(V) = O(V^2), \quad (V \rightarrow 0)$$

设

$$u(x, t) = V(x - \lambda t) = V(\xi)$$

是方程(1)的满足 $V(-\infty) = 0$ 的行波解, 则 V 总可写成 $V = c \exp h(\xi)$ 的形式, 其中 C 为常数.

证明 若 $V = 0$ 或 V 在 $(-\infty, +\infty)$ 不变号, 定理 2 显然成立. 我们证明在定理 2 条件下, V 只能为上述两种情况.

若 $V' \equiv 0$, 则 V 为常数, 由 $V(-\infty) = 0$, 有 $V \equiv 0$.

设 $V' \neq 0$, 则有(14)式成立, 特别有

$$\int_0^V \frac{|\lambda|}{\sqrt{(1 - \lambda^2) V^2 - A(V)}} dV = -\infty \quad (V \neq 0)$$

假设存在 $\xi_0, \xi_1 \in R$, $V(\xi_0) = 0$, $V(\xi_1) \neq 0$, 则由(14)式成立, 有

$$\xi_1 - \xi_0 = \int_0^V \frac{|\lambda|}{\sqrt{(1 - \lambda^2) V^2 - A(V)}} dV = -\infty$$

矛盾, 故 $V \equiv 0$ 或 $V(\xi) \neq 0, \forall \xi \in R$

由 $V \in C(-\infty, +\infty)$

有 V 在 $(-\infty, +\infty)$ 不变号, 定理成立.

参 考 文 献

- 1 Saton R A. Existence of Solution for a Finite Nonlinear Hyperlastic ROD, J Math. Appl, 1985, 105, 59~75
- 2 胡建兰. 非线性 Pochhammer-Chree 方程的行波解. 北京工业大学学报, 1995, 21(1): 83~86

Travelling Wave Solution for a Nonlinear Hyperelastic Equation

Fan Zhoutian

(Department of Applied Mathematics, Beijing Polytechnic University, 100022)

Abstract A nonlinear hyperlastic equation was discussed, and some conditions of the existence of travelling wave solutions for the equation were established.

Keywords nonlinear hyperelastic equation, travelling wave solution