利用微分中值定理“中间点”的渐近性改进 Taylor 公式

谢国斌
（北京建筑工程学院数学教研室，100044）
张苓
（北京农学院数学教研室，102206）

摘　要　针对利用中值定理“中间点”的渐近性能改善 Taylor 公式，改善后的公式中间点是否还有渐近性进行了讨论．由讨论这个问题出发，证明了用这种近似式产生的误差，优于用同阶 Taylor 多项式产生的误差，并给出这个误差的一个类似于 Taylor 公式余项的表达式．然后研究了这种误差中的“中间点”的渐近性，给出了“中间点渐近性”的递归性的证明．本文并将讨论的结果推广到了多元 Taylor 公式．

关键词　渐近性，中间点，⊗积

分类号　O 172

许多文献讨论了微分中值定理“中间点”的渐近性[1, 2]，获得许多耐人回味的漂亮结果．如果利用这种渐近性能改善 Taylor 公式，那么这种改善后的 Taylor 公式的中间点还有渐近性吗？本文将讨论这些问题．

定理（Taylor）　设 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+h]$ 上有 n 阶导数，则在 (x_0, x_0+h) 内至少存在一点 ξ，使下式成立．

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n \tag{1}$$

关于 Taylor 公式“中间点”ξ 的渐近性定理见文献[1, 2]．

定理　设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上有 $n+2$ 阶导数，且 $f^{(n+2)}(x_0)\neq 0$，若 ξ 是由(1)式确定的中间点，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{\xi-x_0}{h}=\frac{1}{n+1}$$

当 $n=1$ 时，(1)式便为 Lagrang 中值定理，

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(\xi)h,\ x_0<\xi<x_0+h \tag{2}$$

这时有

收稿日期：1996—10—03

$$\lim_{h\to 0}\frac{\xi - x_0}{h}=\frac{1}{2}$$

由上式知，当 h 很小时，$\dfrac{\xi - x_0}{h}\approx\dfrac{1}{2}$. 因此，可以猜想，将$\xi = x_0+\dfrac{1}{2}h$代入到(2)式右端，$f(x_0)+f'(x_0+\dfrac{h}{2})h$应该是$f(x_0+h)$的一个很好的近似.

定理 1 设$f(x)$在$[x_0, x_0+h]$有 $2m+1$ 阶连续导数，则在(x_0, x_0+h)内至少存在一点ξ，使下式成立

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\frac{f^{(2i-1)}(x_0+\frac{h}{2})}{(2i-1)!\,4^{i-1}}h^{2i-1}+\frac{i}{4^m(2m+1)!}f^{(2m+1)}(\xi)h^{2m+1} \quad (3)$$

证明 由 $2m+1$ 阶 Taylor 公式

$$f(x_0+\frac{h}{2}+\frac{h}{2})=f(x_0+\frac{h}{2})+f'(x_0+\frac{h}{2})\frac{h}{2}+\cdots+$$
$$\frac{f^{(2m)}(x_0+\frac{h}{2})}{(2m)!}(\frac{h}{2})^{2m}+\frac{f^{(2m+1)}(\xi_1)}{(2m+1)!}(-\frac{h}{2})^{2m+1} \quad (4)$$

$$f(x_0+\frac{h}{2}-\frac{h}{2})=f(x_0+\frac{h}{2})+f'(x_0+\frac{h}{2})(\frac{h}{2})+\cdots+$$
$$\frac{f^{(2m)}(x_0+\frac{h}{2})}{(2m)!}(-\frac{h}{2})^{2m}+\frac{f^{(2m+1)}(\xi_2)}{(2m+1)!}(-\frac{h}{2})^{2m+1} \quad (5)$$

其中ξ_1，ξ_2均在(x_0, x_0+h)中. 计算(4)～(5)式，有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\frac{f^{(2i-1)}(x_0+\frac{h}{2})}{(2i-1)!\,4^{i-1}}h^{2i-1}+$$
$$\frac{2}{(2m+1)!}[f^{(2m+1}(\xi_1)+f^{(2m+1)}(\xi_2)](\frac{h}{2})^{2m+1}$$

由介值定理，$f^{(2m+1)}(\xi_1)+f^{(2m-1)}(\xi_2)=2f^{(2m+1)}(\xi)$，这里$\xi$在$\xi_1$，$\xi_2$之间，从而$\xi\in(x_0, x_0+h)$. 因此

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\frac{f^{(2i-1)}(x_0+\frac{h}{2})}{(2i-1)!\,4^{i-1}}h^{2i-1}+$$
$$\frac{1}{(2m+1)!}\frac{1}{4^m}f^{(2m+1)}(\xi)h^{2m+1}$$

证毕

在(3)式中，令 $m=1$, $x_0=0$，可得

$$f(h)=f(0)+f'(\frac{h}{2})h+\frac{1}{3!4}f'''(\xi)h^3,\ 0<\xi<h \quad (6)$$

(6)式说明，用中间点ξ的趋近值$\frac{h}{2}$代替(2)式右边的ξ时，确实得到了一个关于函数$f(h)$更好的近似式. 因为，由(6)式知，产生的误差

$$E=f(h)-[f(0)+f'(\frac{h}{2})h]=\frac{1}{4\cdot 3!}f'''(\xi)h^3$$

粗略地说，它仅是相同阶数 Taylor 多项式$f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2!}f''(0)h^2$所产生误差的$\frac{1}{4}$.

不仅如此，如果将(6)式仍称为Taylor公式，ξ称其为中间点，那么下面的定理将证明中间点ξ仍有渐近性，即

$$\lim_{h\to 0}\frac{\xi}{h}=\frac{1}{2}$$

而且如果将ξ的趋近值$\frac{h}{2}$代替(6)中的ξ，又得到了一个$f(h)$的更好的近似式

$$f(h)\approx f(0)+f'(\frac{h}{2})h+\frac{1}{3!4}f'''(\frac{h}{2})h^3$$

它产生的误差是$\frac{1}{5!4^2}f^{(5)}(\xi)h^5$，这实际上就是(3)式中当$m=2$，$x_0=0$的特殊情况. 由此，不难想象，这种渐近性及近似性呈现了一种递推规律.

定理2 设$f(x)$在$[x_0,\ x_0+h]$有$2m+4$阶连续导数，且$f^{(2m+2)}(x_0)\neq 0$，ξ为由(3)式确定的"中间点"，则

1) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\xi-x_0}{h}=\frac{1}{2}$，

2) 记$Q=f(x_0)+\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{f^{(2i-1)}(x_0+\frac{h}{2})}{(2i-1)!\,4^{i-1}}h^{2i-1}+\frac{1}{(2m+1)!\,4^m}f^{(2m+1)}(x_0+\frac{h}{2})h^{2m+1}$，

至少在$(x_0,\ x_0+h)$内存在一点η，使下式成立

$$f(x_0+h)=Q+\frac{1}{(2m+3)!\,4^{m+1}}f^{(2m+3)}(\eta)h^{2m+3}$$

证明 2)实际上是(3)式，只须将m换成$m+1$.

1) 为了清楚，用归纳法.

设$m=1$，(3)式成为

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\frac{h}{2})h+\frac{1}{3!4}f'''(\xi)h^3,\ x_0<\xi<x_0+h \qquad (3)'$$

将

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)h^i+\frac{1}{4!}f^{(4)}(\sigma)h^4,\ x_0<\sigma<x_0+h$$

及

$$hf'(x_0+\frac{h}{2})=h[f'(x_0)+f''(x_0)\frac{h}{2}+\frac{1}{2!}f'''(x_0)(\frac{h}{2})^2+\frac{f^{(4)}(x_0)}{3!}(\frac{h}{2})^3+o(h^3)]$$

$$\frac{h^3}{3!4}f'''(3)=\frac{h^3}{3!4}[f'''(x_0)+(\xi-x_0)f^{(4)}(\tau)],\ x_0<\tau<x_0+h$$

代入(3)′式中，化简得

$$\frac{1}{4!}f^{(4)}(\sigma)h^4=\frac{h^4}{3!2^3}f^{(4)}(x_0)+o(h^4)+(\xi-x_0)\frac{1}{3!4}f^{(4)}(\tau)h^3$$

由$f^{(4)}(x)$的连续性，及$f^{(4)}(x_0)\neq 0$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\xi-x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4!}f^{(4)}(\sigma)-\frac{1}{3!2^3}f^{(4)}(x_0)-o(1)}{\frac{1}{3!4}f^{(4)}(\tau)}=\frac{1}{2}$$

现在证 m 是任意正整数时，定理成立.

将以下展开式代入(3)式：

$$f(x_0+h)=\sum_{i=0}^{2m+1}f^{(i)}(x_0)\frac{1}{i!}h^i+\frac{1}{(2m+2)!}f^{(2m+2)}(\sigma_1)h^{2m+2},\ x_0<\sigma_1<x_0+h$$

$$f^{(2i-1)}(x_0+\frac{h}{2})=f^{(2i-1)}(x_0)+\sum_{j=1}^{2(m-i)+3}\frac{1}{j!}f^{(2i-1+j)}(x_0)(\frac{h}{2})^j+o(h^{2(m-i)+3})$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m+1)$$

$$f^{(2m+1)}(\xi)=f^{(2m+1)}(x_0)+f^{(2m+2)}(\sigma_2)\cdot(\xi-x_0),\qquad x_0<\sigma_2<\xi$$

得

$$\sum_{i=0}^{2m+1}f^{(i)}(x_0)\frac{h^i}{i!}+\frac{f^{(2m+2)}(\sigma_1)}{(2m+2)!}h^{2m+2}$$

$$=f(x_0)+\sum_{i=1}^{m+1}\frac{h^{2i-1}}{(2i-1)!4^{i-1}}[\sum_{j=0}^{2(m-i)+3}\frac{f^{(2i-1+j)}(x_0)}{j!}(\frac{h}{2})^j+o(h^{2(m-i)+3})]+\frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!4^m}(f^{(2m+1)}(x_0)+(\xi-x_0)f^{(2m+2)}(\sigma_2))\tag{7}$$

将(7)式右边按$h^j(0\leqslant j\leqslant 2m+1)$合并同类项，形成$f(x_0+h)$的 $2m+1$ 阶 Taylor 多项式，由 Taylor 多项式系数的唯一性知，必可从(7)两端消去上述各项. 并把有限个$o(h^{2m+2})$之和仍记为$o(h^{2m+2})$，(7)化为

$$\frac{f^{(2m+2)}(\sigma_1)}{(2m+2)!}h^{2m+2}=o(h^{2m+2})+\frac{f^{(2m+2)}(x_0)}{(2m+1)!4^m\cdot 2}h^{2m+2}+\frac{f^{(2m+2)}(x_0)}{(2m-1)!3!4^m\cdot 2}h^{2m+2}+\frac{f^{(2m+2)}(x_0)}{(2m-3)!5!4^m\cdot 2}h^{2m+2}+\cdots+\frac{f^{(2m+2)}(x_0)}{3!(2m-1)!4^m\cdot 2}h^{2m+2}+(\xi-x_0)\frac{f^{(2m+2)}(\sigma_2)}{(2m+1)!4^m\cdot 2}h^{2m+2}\tag{8}$$

再利用 Taylor 多项式(更高一阶)的系数的唯一性，即有

$$\frac{1}{(2m+2)!}=\frac{1}{(2m+1)!4^m\cdot 2}+\frac{1}{(2m-1)!3!4^m\cdot 2}+$$

$$\frac{1}{(2m-3)!5!4^m\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{1!(2m+1)!4^m\cdot 2} \tag{9}$$

由(8)式有

$$\frac{\xi-x_0}{h}=[\frac{f^{(2m+2)}(\sigma_1)}{(2m+2)!}-o(1)-\frac{f^{(2m+2)}(x_0)}{(2m+1)!4^m\cdot 2}-\frac{f^{(2m+2)}(x_0)}{(2m-1)!3!4^m\cdot 2}-\cdots-$$

$$\frac{f^{(2m+2)}(x_0)}{3!(2m-1)!4^m\cdot 2}]/\frac{f^{(2m+2)}(\sigma_2)}{(2m+1)!4^m\cdot 2}$$

利用(9)，求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\xi-x_0}{h}=\frac{1}{2}$$ 证毕

上面所研究的实际上由对 Lagrange 中值定理"中间点"的渐近性的讨论，得到了推广的 Taylor 公式(3)，进而给出了推广的 Taylor 公式的"中间点"的渐近性．下面把这种讨论扩展到更一般的 Taylor 公式中去．

定理 3 设$f(x)$在$[x_0, x_0+h]$上有$n+4$阶导数且$f^{(n+3)}(x_0)\neq 0$，则

1) 在(x_0, x_0+h)内至少存在一点ξ，使

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0+\frac{h}{n+1})}{n!}h^n+$$

$$\frac{n}{2(n+1)(n+2)!}f^{(n+2)}(\xi)h^{n+2}$$

$$=Q+\frac{n}{2(n+1)(n+2)!}f^{(n+2)}(\xi)h^{n+2} \tag{10}$$

2) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\xi-x_0}{h}=\frac{5n+7}{3(n+1)(n+3)}$

证明 1) 利用余项为积分表达式的 Taylor 公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\cdot$$

$$\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2!}f''(x_0)h^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)h^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x_0+h}f^{(n+2)}(t)(x_0+h-t)^{n+1}dt$$

及

$$f^{(n)}(x_0+\frac{h}{2})=f^{(n)}(x_0)+f^{(n+1)}(x_0)\frac{h}{n+1}+\int_{x_0}^{x_0+\frac{h}{n+1}}f^{(n+2)}(t)(x_0+\frac{h}{n+1}-t)\,dt$$

将上面两个积分进行变量替换，令$t=x_0+sh$，则

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)h^{n+1}+\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 f^{(n+2)}(x_0+sh)(1-s)^{n+1}\mathrm{d}s$$

$$f^{(n)}\left(x_0+\frac{h}{n+1}\right)=f^{(n)}(x_0)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)+h^2\int_0^{\frac{1}{n+1}}f^{(n+2)}(x_0+sh)\left(\frac{1}{n+1}-s\right)\mathrm{d}s$$

这时

$$f(x_0+h)-Q=h^{n+2}\left[\int_0^1 f^{(n+2)}(x_0+sh)\frac{1}{(n+1)!}(1-s)^{n+1}\mathrm{d}s-\int_0^{\frac{1}{n+1}}\frac{1}{n!}f^{(n+2)}(x_0+sh)\left(\frac{1}{n+1}-s\right)\mathrm{d}s\right]$$

$$=h^{n+2}\int_0^1 f^{(n+2)}(x_0+sh)p(s)\mathrm{d}s$$

其中

$$p(s)=\begin{cases}\dfrac{(1-s)^{n+1}}{(n+1)!}, & \dfrac{1}{n+1}\leqslant s\leqslant 1\\[2ex] \dfrac{(1-s)^{n+1}}{(n+1)!}-\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{n+1}-s\right), & 0\leqslant s\leqslant\dfrac{1}{n+1}\end{cases}$$

易知$p(s)$在$[0,1]$上连续，

$$p'(s)=\begin{cases}\dfrac{-(1-s)^{n}}{n!}, & \dfrac{1}{n+1}<s<1\\[2ex] -\dfrac{(1-s)^{n}}{n!}+\dfrac{1}{n!}, & 0<s<\dfrac{1}{n+1}\end{cases}$$

且$p'(s)$在$\left(0,\dfrac{1}{n+1}\right)$内大于0，在$\left(\dfrac{1}{n+1},1\right)$内小于0，并注意到$p(0)=p(1)=0$，故$p(s)$在$[0,1]$上不变号(大于等于0)．根据第一积分中值定理，有

$$f(x_0+h)-Q=h^{n+2}f^{(n+2)}(x_0+\theta h)\int_0^1 p(s)\mathrm{d}s$$

$$=h^{n+2}\cdot f^{(n+2)}(x_0+\theta h)\left[\int_0^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{(1-s)^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1}-s\right)\right)\mathrm{d}s+\int_{\frac{1}{n+1}}^1\frac{(1-s)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}s\right]$$

$$=h^{n+2}\cdot f^{(n+2)}(x_0+\theta h)\left[\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}-\right.$$

$$\frac{1}{2n!}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)!}(\frac{n}{n+1})^{n+2}]$$

$$=h^{n+2}\cdot f^{(n+2)}(x_0+\theta h)\cdot\frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2(n+1)})$$

$$=h^{n+2}\cdot f^{(n+2)}(x_0+\theta h)\frac{n}{(n+2)!\,2(n+1)}$$

因为 $0<\theta<1$，故(10)式成立.

2) 将下面3个式子代入(10)式中:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{1}{(n+2)!}f^{(n+2)}(x_0)h^{n+2}+\frac{1}{(n+3)!}f^{(n+3)}(\sigma_1)h^{n+3}$$

$$f^{(n)}(x_0+\frac{h}{n+1})=f^{(n)}(x_0)+f^{(n+1)}(x_0)\frac{h}{n+1}+\frac{1}{2!}f^{(n+2)}(x_0)(\frac{h}{n+1})^2+\frac{1}{3!}f^{(n+3)}(x_0)(\frac{h}{n+1})^3+o(h^3)$$

$$f^{(n+2)}(\xi)=f^{(n+2)}(x_0)+f^{(n+3)}(\sigma_3)(\xi-x_0)$$

注意到

$$\frac{1}{(n+2)!}=\frac{1}{n!}\frac{1}{2!(n+1)^2}+\frac{n}{2(n+1)(n+2)!}$$

(10)式化为

$$h^{n+3}\cdot\frac{f^{(n+3)}(\sigma_1)}{(n+3)!}=\frac{1}{3!}\frac{h^{n+3}}{(n+1)^3}f^{(n+3)}(x_0)\cdot\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}o(h^{n+3})+\frac{n}{(n+2)!\,2(n+1)}(\xi-x_0)f^{(n+3)}(\sigma_2)h^2$$

$$\frac{\xi-x_0}{h}=\frac{\frac{1}{(n+3)!}f^{(n+3)}(\sigma_1)-\frac{1}{3!(n+1)^3\cdot n!}f^{(n+3)}(x_0)-\frac{1}{n!}o(1)}{\frac{1}{(n+2)!}\frac{n}{2(n+1)}f^{(n+3)}(\sigma_2)}.$$

由 $f^{(n+3)}(x_0+h)$的连续性，故

$$\lim_{h\to 0}\frac{\xi-x_0}{h}=\frac{\frac{1}{(n+3)!}-\frac{1}{3!(n+1)^3}\cdot\frac{1}{n!}}{\frac{n}{2(n+1)(n+2)!}}=\frac{5n+7}{3(n+1)(n+3)}$$

证毕

现在讨论多元函数的Taylor公式的相关问题.

设 n 元函数 f: $S\subset R^n\to R^1$，其中 S 为 R^n中凸域. 记

$$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^{\tau},\ x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^{\tau},\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\tau}$$

$$h^{\circ}=\frac{1}{\|h\|}h,\ \nabla=(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n})$$

矩阵的叉积

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

约定同一个矩阵 A 的 $n(n\geqslant 2)$次叉积记为 $(\otimes A)^n$，即 $(\otimes A)^n=A\otimes A\otimes\cdots\otimes A$. 这样$(\otimes\nabla)^n f(x_0)(\otimes h)^n$表示$f(x_0+h)$在 x_0点的 n 阶微分.

定理(n元函数的 Taylor 定理) 设f: $S\subset R^n\to R^1$，在凸域 S内$f(x)$有 $n+1$ 阶连续偏导数，且$(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0)(\otimes h^\circ)^{n+1}\neq 0$, 又设 x_0及 $x_0+h\in S$，则在点 x_0与 x_0+h 的连线段内，至少存在一点 $x_0+\theta h(0<\theta<1)$，使下式成立

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\nabla f(x_0)h+\frac{1}{2!}(\otimes\nabla)^2 f(x_0)(\otimes h)^2+\cdots+$$
$$\frac{1}{(n-1)!}(\otimes\nabla)^{n-1}f(x_0)(\otimes h)^{n-1}+\frac{1}{n!}(\otimes\nabla)^n f(x_0+\theta h)(\otimes h)^n \tag{11}$$

定理(中间点渐近性定理) 由(11)式确定的“中间点”$x_0+\theta h$，必有

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|x_0+\theta h-x_0\|}{\|h\|}=\frac{1}{n+1}$$

说明，以下讨论的多元函数的极限均指“依一定方向趋近”，即$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{\|h\|}$存在.

证明 1)考虑关于变量θ的一元函数：$(\otimes\nabla)^n f(x_0+\theta h)(\otimes h)^n$，并在$[0,\theta]$上利用一元函数的微分中值定理，有

$$\begin{aligned}(\otimes\nabla)^n f(x_0+\theta h)(\otimes h)^n&=(\otimes\nabla)^n f(x_0)(\otimes h)^n+\\&\quad(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0+\tau h)((\otimes h)^n\otimes(\theta h))\\&=(\otimes\nabla)^n f(x_0)(\otimes h)^n+\theta(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0+\tau h)(\otimes h)^{n+1}\\&\qquad 0<\tau<\theta\end{aligned}$$

将上式代入(11)式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\nabla f(x_0)h+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i!}(\otimes\nabla)^i f(x_0)(\otimes h)^i+$$
$$\frac{\theta}{n!}(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0+\tau h)(\otimes h)^{n+1}$$

再写出$f(x_0+h)$的 n 阶 Taylor 公式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\nabla f(x_0)h+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}(\otimes\nabla)^i f(x_0)(\otimes h)^i+$$
$$\frac{1}{(n+1)!}(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0+\lambda h)(\otimes h)^{n+1}\qquad 0<\lambda<1$$

由上面两式，有

$$\frac{1}{(n+1)!}(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0+\lambda h)(\otimes h)^{n+1}=\frac{\theta}{n!}(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0+\tau h)(\otimes h)^{n+1}$$

$$\theta = \frac{1}{n+1} \frac{(\otimes \nabla)^{n+1} f(x_0 + \lambda h)(\otimes \frac{h}{\|h\|})^{n+1}}{(\otimes \nabla)^{n+1} f(x_0 + \tau h)(\otimes \frac{h}{\|h\|})^{n+1}}$$

由已知条件

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| x_0 + \theta h - x_0 \|}{\| h \|} = \lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$$ 证毕

定理 4 设 f: $S \subset R^n \to R^1$，S 为凸域，若 $f(x)$ 有 $n+4$ 阶连续偏导数，且

$$(\otimes \nabla)^{n+3} f(x_0)(\otimes h^\circ)^{n+3} \neq 0$$

记

$$Q = f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \sum_{i=2}^{n-1} (\otimes \nabla)^{n-1} f(x_0)(\otimes h)^{n-1} +$$

$$\frac{1}{n!} (\otimes \nabla)^n f(x_0 + \frac{1}{n+1} h)(\otimes h)^n$$

则 1) 在 S 内至少存在一点 $x_0 + \eta h$，使下式成立

$$f(x_0 + h) = Q + \frac{n}{2(n+1)(n+2)!} (\otimes \nabla)^{n+1} f(x_0 + \eta h)(\otimes h)^{n+1}$$

$$0 < \eta < 1 \qquad .(12)$$

2) 由(12)式确定的中间点 $x_0 + \eta h$ 满足

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| x_0 + \eta h - x_0 \|}{\| h \|} = \lim_{h \to 0} \eta = \frac{5n+7}{3(n+1)(n+3)}$$

(说明，显然约定 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{\| h \|}$ 存在).

证明 定义两个一元函数 $\varphi(t) = f(x_0 + th)$ 及

$$\varphi_1(t) = (\otimes \nabla)^n f(x_0 + \frac{h}{n+1} t)(\nabla h)^n \qquad (t \in R^1)$$

在 $t = 0$ 点将这两个一元函数用 Taylor 公式(积分余项)展开

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i!} \varphi^{(i)}(0) t^i + \frac{1}{(n+1)!} \int_0^t \varphi^{(n+2)}(s)(t-s)^{n+1} ds$$

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \varphi_1'(0) + \int_0^t \varphi_1''(s)(t-s) ds$$

这时

$$f(x_0 + h) = \varphi(1) = f(x_0) + \nabla f(x_0) h + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i!} (\otimes \nabla)^i f(x_0)(\otimes h)^i +$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (\otimes \nabla)^{n+2} f(x_0 + sh)(\otimes h)^{n+2} (1-s)^{n-1} ds$$

$$(\otimes \nabla)^n f(x_0 + \frac{h}{n+1} t)(\otimes h)^n = \varphi_1(1) = (\otimes \nabla)^n f(x_0)(\otimes h)^n +$$

$$(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0)(\otimes h)^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}+$$

$$\int_0^1(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+\frac{h}{n+1}s)(\otimes h)^{n+2}(\frac{1}{n+1})^2(1-s)\,\mathrm{d}s$$

$$=(\otimes\nabla)^n f(x_0)(\otimes h)^n+\frac{1}{n+1}(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0)(\otimes h)^{n+1}+$$

$$\int_0^{\frac{1}{n+1}}(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+sh)(\otimes h)^{n+2}(\frac{1}{n+1}-s)\,\mathrm{d}s$$

因此

$$f(x_0+h)-Q=\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+sh)(\otimes h)^{n+2}(1-s)^{n+1}\mathrm{d}s-$$

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\frac{1}{n+1}}(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+sh)(\otimes h)^{n+2}(\frac{1}{n+1}-s)\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{n!}\int_0^{\frac{1}{n+1}}(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+sh)(\otimes h)^{n+2}(\frac{(1-s)^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}+s)\,\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\int_{\frac{1}{n+1}}^1(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+sh)(\otimes h)^{n+2}(1-s)^{n+1}\mathrm{d}s$$

令

$$\psi(t)=(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+th)(\otimes h)^{n+2},\ g(s)=\frac{(1-s)^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}+s$$

易证 $g(s)$在 $(0,\frac{1}{n+1})$上恒有 $g(s)>0$，由第一积分中值定理，上面式子有

$$f(x_0+h)-Q=\frac{\psi(\eta_1)}{n!}\int_0^{\frac{1}{n+1}}(\frac{(1-s)^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}+s)ds+\frac{\psi(\eta_2)}{(n+1)!}\int_{\frac{1}{n+1}}^1(1-s)^{n+1}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{\psi(\eta_1)}{n!}\left(\frac{-(1-s)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{s}{n+1}+\frac{s^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{n+1}}+\frac{\psi(\eta_2)}{(n+1)!}\ \frac{-(1-s)^{n+2}}{(n+2)}\Bigg|_{\frac{1}{n+1}}^1$$

$$=\frac{\psi(\eta_1)}{n!}\left(\frac{n}{2(n+1)^2(n+2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}(\frac{n}{n+1})^{n+2}\right)+$$

$$\frac{\psi(\eta_2)}{(n+1)!(n+2)}\cdot(\frac{n}{n+1})^{n+2}$$

$$=\frac{\psi(\eta_2)-\psi(\eta_1)}{n!(n+1)(n+2)}(\frac{n}{n+1})^{n+2}+\frac{n}{2n!(n+1)^2(n+2)}\psi(\eta_1)$$

$$=\frac{n}{2(n+2)!(n+1)}\left[(\psi(\eta_2)-\psi(\eta_1))\frac{2}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}+\psi(\eta_1)\right]$$

因为 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}\nearrow e$，故当 $n>2$ 时

$$0<\frac{2}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}<1$$

令

$$T=\frac{2(\psi(\eta_2)-\psi(\eta_1))}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}+\psi(\eta_1)$$

下面证明 T在$\psi(\eta_1)$与$\psi(\eta_2)$之间.

若

$$\psi(\eta_1)>\psi(\eta_2),\ 则\ T=\psi(\eta_1)-(\psi(\eta_1)-\psi(\eta_2))\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}<\psi(\eta_1)$$

又有

$$T>\psi(\eta_1)-(\psi(\eta_1)-\psi(\eta_2))=\psi(\eta_2)$$

若$\psi(\eta_2)>\psi(\eta_1)$，则，显然 $T>\psi(\eta_1)$，且

$$T<\psi(\eta_2)-\psi(\eta_1)+\psi(\eta_1)=\psi(\eta_2)$$

由于$\psi(t)$的连续性，由介值定理，存在η在η_1，η_2之间使$\psi(\eta)=T$，因此有

$$f(x_0+h)-Q=(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+\eta h)(\otimes h)^{n+2}\frac{n}{2(n+2)!(n+1)},0<\eta<1\ 成立.$$

2) 将$f(x_0+h)$展成 $n+2$ 阶 Taylor 公式

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\nabla f(x_0)h+\sum_{i=2}^{n+2}\frac{1}{i!}(\otimes\nabla)^i f(x_0)(\otimes h)^i+$$

$$\frac{1}{(n+3)!}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_1 h)(\otimes h)^{n+3}\quad 0<\sigma_1<1 \tag{13}$$

再将

$$\varphi_2(\|h\|)=(\otimes\nabla)^n f(x_0+\frac{\|h\|}{n+1}h^\circ)(\otimes h)^n=(\otimes\nabla)^n f(x_0+\frac{h}{n+1})(\otimes h)^n$$

展成三阶 Taylor 公式 (Peano余项)

$$\varphi_2(\|h\|)=\varphi_2(o)+\varphi_2'(o)\|h\|+\frac{1}{2!}\varphi_2''(o)\|h\|^2+\frac{1}{3!}\varphi_2'''(o)\|h\|^3+o(\|h\|^3)$$

$$=(\otimes\nabla)^n f(x_0)(\otimes h)^n+(\otimes\nabla)^{n+1}f(x_0)((\otimes h)^n\otimes h^\circ)\frac{\|h\|}{n+1}+$$

$$\frac{1}{2!}(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0)((\otimes h)^n\otimes(\otimes h^\circ)^2)(\frac{\|h\|}{n+1})^2+$$

$$\frac{1}{3!}(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0)((\otimes h)^n\otimes(\otimes h^\circ)^3)(\frac{\|h\|}{n+1})^3+o(\|h\|^3)$$

$$=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{i!(n+1)^i}(\otimes\nabla)^{n+i}f(x_0)(\otimes h)^{n+i}+o(\|h\|^3) \tag{14}$$

将

$$\varphi_3(\eta)=(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0+\eta h)(\otimes h)^{n+2}$$

用 Lagrange 定理展开(在区间 $[0, \eta]$上)

$$\begin{aligned}\varphi_3(\eta)&=(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0)(\otimes h)^{n+2}+(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_2 h)((\otimes h)^{n+2}\otimes(\eta h))\\&=(\otimes\nabla)^{n+2}f(x_0)(\otimes h)^{n+2}+\eta(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_2 h)(\otimes h)^{n+3}\end{aligned}\tag{15}$$

把(13)～(15)式代入到(12)式，化简后为

$$\frac{1}{(n+3)!}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_1 h)(\otimes h)^{n+3}=\frac{1}{3!(n+1)^3\cdot n!}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0)(\otimes h)^{n+3}+$$

$$o(\|h\|^{n+3})+\frac{\eta\quad n}{2(n+2)(n+1)^2}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_2 h)(\otimes h)^{n+3}$$

所以有

$$\eta=\frac{\|x_0+\eta h-x_0\|}{\|h\|}=[\frac{1}{(n+3)!}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_1 h)(\otimes h)^{n+3}-$$

$$\frac{1}{n!3!(n+1)^3}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0)(\otimes h)^{n+3}+o(\|h\|^{n+3})]/$$

$$\frac{n}{2(n+2)!(n+1)^2}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_2 h)(\otimes h)^{n+3}$$

$$=[\frac{1}{(n+3)!}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_1 h)(\otimes(\frac{h}{\|h\|}))^{n+3}-$$

$$\frac{1}{n!3!(n+1)^3}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0)(\otimes(\frac{h}{\|h\|}))^{n+3}+o(1)]/$$

$$\frac{n}{2(n+2)!(n+1)^2}(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0+\sigma_2 h)(\otimes(\frac{h}{\|h\|}))^{n+3}$$

注意到偏导连续性及 $(\otimes\nabla)^{n+3}f(x_0)(\otimes h^{\circ})^{n+3}\neq 0$，故

$$\lim_{h\to 0}\eta=\frac{5n+7}{3(n+1)(n+3)}$$ 证毕

参 考 文 献

1 Bernard Jacobson. On the mean Value Theorem for Integrals. Amer. Math. Monthly, 1982, 89, 300～301

2 Esteban I. Poffald. The Remainder in Taylor′s Formula. Amer. Math. Monthly, 1990, 97, 205～210

3 张文梵. 关于微分中值定理的一个注记. 数学的实践与认识, 1988(1): 86～87

Amelionation of Taylor′s Formula by Using the Asymptotic Behavior of the Intermediate Point of the Mean-Value Theorem

Xie Guobin
(Beijing Institute of Civil Engineering and Archiecture, 100044)
Zhang Ling
(Beijing Agriculture COllege, 102206)

Abstract May one obtain a more better approximate formula about $f(x)$ if on substitutes the approximate valu $\frac{x}{n+1}$ for intermediate point ξ? The problem is discussed and the error caused by using the approximate formula proves to be superior to that caused by using the homogeneous Taylor′s polynomial and an expression is proved to be similatr to the remainder in Taylor′s formula. Also asymptotic behavior of intermediate point of the error is studied and proved and, and the result is extended to Taylor′s formula of a function of several variabls.

Keywords asymptotic behavior, intermediate point, ⊗ product