

# 搪玻璃设备传热数值分析\*

黄振侃

(北京工业大学应用数学系, 100022)

沈亦鸣

(北京工业大学校直机关, 100022)

徐贺文

(北京工业大学土木工程系, 100022)

陆介平

(北京化工设备厂, 100021)

**摘要** 对复合材料的热传导方程进行数值分析, 采用了三维的 Douglas 格式及 C-N 格式混合求解, 得到复合材料的温度场. 解精度高(二阶), 绝对稳定, 收敛快. 可为复合材料制品工艺控制提供理论依据, 对减小热残余应力, 克服爆瓷起积极作用.

**关键词** 搪玻璃设备, 传热, 数值分析

**分类号** O551

## 0 引言

无机非金属复合材料中的搪玻璃, 由热膨胀系数较低的釉层(玻璃)和热膨胀系数较高的基材(低碳钢)经高温烧制而成, 制成后保留有一定的热残余应力, 超过釉层的应力强度极限时, 是引起爆瓷的主要原因, 而搪玻璃设备在使用过程中的稳定性, 是制造者和使用者都十分关心的课题<sup>[1~4]</sup>. 无机非金属与金属复合材料传热数值计算, 其重要性是为研究复合材料的稳定性服务, 从而受到人们重视. 从美国 DIALOG 系统查新中, 存贮的 20 年左右国外文献及专利中, 查阅一篇“玻璃衬里制品热的传递和热处理”论文, 主要叙述了玻璃衬里热处理过程中的方法, 提到玻璃表面的冷却率较强、在冷却中有最小的残余应力, 提出冷却速率与原始玻璃之间的残余应力有关, 未从理论上推导和验证复合材料传热性质, 尤其是搪玻璃设备的釉层与基材的传热研究尚未见到.

搪玻璃设备冷却过程中, 釉层收缩变化率  $\Delta L/L$  在软化点  $T_g$  以下, 与温度呈非线性变化, 而基层与温度可视为线性变化, 如图 1 所示,  $T_g$  为转变温度.

温度对表面应力的影响<sup>[5,6]</sup>, 根据公式(1)

$$\sigma = \frac{E\alpha}{(1-\gamma)} \frac{\gamma_m^2}{n(k/\rho c_p)} \frac{dT}{dt} \quad (1)$$

其中,  $\gamma_m$  为平板半厚度.  $\alpha = k/\rho c_p$  为导温系数,  $k$  为热传导率,  $\rho$  为材料密度,  $c_p$  为比热,  $n$  为与试样几何因素有关的常数(平板时  $n=2$ ),  $E$  为弹性模量,  $\gamma$  为波松比,  $\alpha$  为热膨胀系数.

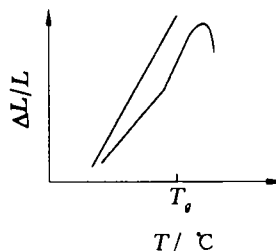


图1 搪玻璃的收缩率

收稿日期: 1994-11-10.

\* 北京市自然科学基金资助项目.

从(1)式看出, 温度  $T(t)$  对  $\sigma$  的影响, 为使  $\min \sigma$  需研究搪玻璃在冷却过程中的温度分布.

## 1 数学物理方程

研究的样板为  $L \times \omega \times h$  的搪玻璃, 如图 2 所示, 其中  $h = h_1 + h_2$ ,  $h_1$  为釉层厚,  $h_2$  为基材厚.

三维坐标如图 2 所示, 数学物理传热方程<sup>[7]</sup>

$$\text{釉层} \quad \rho_g c_g \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\lambda_g \text{grad} T) \quad (2)$$

$$\text{基材层} \quad \rho_s c_s \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\lambda_s \text{grad} T) \quad (3)$$

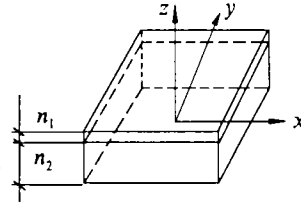


图 2 搪玻璃样板

将(2)式、(3)式统一为

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} (\lambda(T) \text{grad} T) \quad (4)$$

直角坐标方程

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z}) \quad (5)$$

其中

$$C(T) = \begin{cases} \rho_g c_g(T) & 0 \leq z \leq h_1, \\ \rho_s c_s(T) & 0 \leq z \leq h_2, \end{cases} \quad \lambda(T) = \begin{cases} \lambda_g(T) & 0 \leq z \leq h_1, \\ \lambda_s(T) & 0 \leq z \leq h_2. \end{cases} \quad (6)$$

初始条件  $T(0) = T_0$ , 边界条件, 只研究样板的 1/4 区域 (如图 2)

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_1 T \right) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \alpha_1 T_w \quad (7)$$

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_2 T \right) \Big|_{y=\frac{\omega}{2}} = \alpha_2 T_w \quad (8)$$

$$\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha_3 T \right) \Big|_{z=h} = \alpha_3 T_w \quad (9)$$

$$\left( \alpha_4 T - \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \alpha_4 T_w \quad (10)$$

其中:  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  均为常数, 分别为各个相应面上的热交换系数.  $T_w$  为最终的温度 (如室温).

使用交替方向隐格式 (即 Douglas 和 Gunn 格式) 解方程 (5) ~ (10)<sup>[8]</sup>.

首先, 对  $X$  方向使用 C-N 格式,  $Y$  方向用显格式, 把所得中间值记作  $\tilde{T}_{i,j,k}^{n+1}$ , 然后同  $(\tilde{T}_{i,j,k}^{n+1} + T_{i,j,k}^n) / 2$  来对  $X$  方向做差商, 再对  $Y$  方向用 C-N 格式, 求得中间值  $\hat{T}_{i,j,k}^{n+1}$ .

设  $t, x, y, z$  方向步长分别记作  $\Delta t, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ . 离散可得:

$$\begin{aligned} \frac{c(T_{i,j,k}^n)}{\Delta t} (\tilde{T}_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n) &= \frac{1}{\Delta x^2} \Delta_1 [\lambda(T_{i,j,k}^n) \Delta_{-1} (\frac{\tilde{T}_{i,j,k}^{n+1} + T_{i,j,k}^n}{2})] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta y^2} \Delta_2 [\lambda(T_{i,j,k}^n) \Delta_{-2} (T_{i,j,k}^n)] \\ &\quad i=0, 1, \dots, JI \quad j=0, 1, \dots, IJ \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{c(T_{i,j,k}^n)}{\Delta t} (\hat{T}_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n) &= \frac{1}{\Delta x^2} \Delta_1 [\lambda(T_{i,j,k}^n) \Delta_{-1} (\frac{\tilde{T}_{i,j,k}^{n+1} + T_{i,j,k}^n}{2})] \\ &\quad + \frac{1}{\Delta y^2} \Delta_2 [\lambda(T_{i,j,k}^n) \Delta_{-2} (\frac{\hat{T}_{i,j,k}^{n+1} + T_{i,j,k}^n}{2})] \\ &\quad i=0, 1, \dots, JI \quad j=0, 1, \dots, IJ \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\Delta_1 T_{i,j,k} = T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}$ ,  $\Delta_{-1} T_{i,j,k} = T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k}$   
 $\Delta_2 T_{i,j,k} = T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}$ ,  $\Delta_{-2} T_{i,j,k} = T_{i,j,k} - T_{i,j-1,k}$

记  $\lambda_x^+ = \lambda(\frac{T_{i+1,j,k}^n + T_{i,j,k}^n}{2})$ ,  $\lambda_x^- = \lambda(\frac{T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{2})$   
 $\lambda_y^+ = \lambda(\frac{T_{i,j+1,k}^n + T_{i,j,k}^n}{2})$ ,  $\lambda_y^- = \lambda(\frac{T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{2})$

由 (12) 式得到  $-A_{i-1}^- \tilde{T}_{i-1,j,k}^{n+1} + \tilde{A}_i \tilde{T}_{i,j,k}^{n+1} - \tilde{A}_{i+1} \tilde{T}_{i+1,j,k}^{n+1} = \tilde{B}_i^n$  (12)'

其中  $\tilde{A}_{i-1} = \frac{\Delta t \lambda_x^-}{2 \Delta x^2 c(T_{i,j,k}^n)}$   $A_i = 1 + \frac{\Delta t (\lambda_x^+ + \lambda_x^-)}{2 \Delta x^2 c(T_{i,j,k}^n)}$   
 $\tilde{A}_{i+1} = \frac{\Delta t \lambda_x^+}{2 \Delta x^2 c(T_{i,j,k}^n)}$   
 $\tilde{B}_i^n = \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2 c(T_{i,j,k}^n)} \{ \lambda_x^+ T_{i+1,j,k}^n - (\lambda_x^+ + \lambda_x^-) T_{i,j,k}^n + \lambda_x^- T_{i-1,j,k}^n \}$   
 $+ \frac{\Delta t}{\Delta y^2 c(T_{i,j,k}^n)} \{ \lambda_y^+ T_{i,j+1,k}^n - (\lambda_y^+ + \lambda_y^-) T_{i,j,k}^n + \lambda_y^- T_{i,j-1,k}^n \} + T_{i,j,k}^n$

由 (13) 式得到  $-A_{j-1}^* \hat{T}_{i,j-1,k}^{n+1} + A_j^* \hat{T}_{i,j,k}^{n+1} - A_{j+1}^* \hat{T}_{i,j+1,k}^{n+1} = B_j^{*n}$  (13)'

其中  $A_{j-1}^* = \frac{\Delta t \lambda_y^-}{2 \Delta y^2 c(T_{i,j,k}^n)}$   $A_j^* = 1 + \frac{\Delta t (\lambda_y^+ + \lambda_y^-)}{2 \Delta y^2 c(T_{i,j,k}^n)}$   
 $A_{j+1}^* = \frac{\Delta t \lambda_y^+}{2 \Delta y^2 c(T_{i,j,k}^n)}$   
 $B_j^{*n} = \frac{\Delta t}{2 \Delta x^2 c(T_{i,j,k}^n)} \{ \lambda_x^+ \tilde{T}_{i+1,j,k}^{n+1} - (\lambda_x^+ + \lambda_x^-) \tilde{T}_{i,j,k}^{n+1} + \lambda_x^- \tilde{T}_{i-1,j,k}^{n+1} \}$   
 $+ \lambda_x^+ T_{i+1,j,k}^n - (\lambda_x^+ + \lambda_x^-) T_{i,j,k}^n + \lambda_x^- T_{i-1,j,k}^n \}$   
 $+ \frac{\Delta t}{2 \Delta y^2 c(T_{i,j,k}^n)} \{ \lambda_y^+ T_{i,j+1,k}^n - (\lambda_y^+ + \lambda_y^-) T_{i,j,k}^n + \lambda_y^- T_{i,j-1,k}^n \} + T_{i,j,k}^n$

其次,对Z方向用C-N格式.

$$\frac{c(T_{i,j,k}^n)}{\Delta t} (T_{i,j,k}^{n+1} - \hat{T}_{i,j,k}^{n+1}) = \frac{1}{\Delta z^2} \Delta_3 \{ \lambda(T) \Delta_{-3} (\frac{\tilde{T}_{i,j,k}^{n+1} + \hat{T}_{i,j,k}^{n+1}}{2}) \}$$

$$i=0, 1, \dots, JI \quad j=0, 1, \dots, JJ \quad k=0, 1, \dots, JK \quad (14)$$

其中,  $\Delta_{-3} T_{i,j,k} = T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}$   $\Delta_{-3} T_{i,j,n} = T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1}$

由(14)式得到

$$-A_{k-1} T_{i,j,k-1}^{n+1} + A_k T_{i,j,k}^{n+1} - A_{k+1} T_{i,j,k+1}^{n+1} = B_k^{n+1} \quad (14)'$$

其中

$$A_{k-1} = \frac{\Delta t \lambda_z^-}{2 \Delta z^2 c(T_{i,j,k}^n)} \quad A_k = 1 + \frac{\Delta t (\lambda_z^+ + \lambda_z^-)}{2 \Delta z^2 c(T_{i,j,k}^n)} \quad A_{k+1} = \frac{\Delta t \lambda_z^+}{2 \Delta z^2 c(T_{i,j,k}^n)}$$

$$B_k^{n+1} = \frac{\Delta t}{2 \Delta z^2 c(T_{i,j,k}^n)} \{ \lambda_x^+ \hat{T}_{i,j,k+1}^{n+1} - (\lambda_z^+ + \lambda_z^-) \hat{T}_{i,j,k}^{n+1} - \lambda_x^- \hat{T}_{i,j,k-1}^{n+1} \} + \hat{T}_{i,j,k}^{n+1}$$

由(12)'、(13)'、(14)'可以看出,当知道n时刻的温度场时,可以利用三对角矩阵,先求出温度场中间值(即 $\hat{T}_{i,j,k}^{n+1}$ 和 $\hat{T}_{i,j,k+1}^{n+1}$ ),然后再利用一次三对角矩阵,求出最后的 $T_{i,j,k}^{n+1}$ 温度场.

边界条件的处理,为使离散后的精度达到二阶,采用中心差商处理.

由(8)得

$$i=JI \quad T_{JI+1,j,k}^n = \frac{2\alpha_1 \Delta x}{\lambda(T_{JI,j,k}^n)} (T_\omega - T_{JI,j,k}^n) + T_{JI-1,j,k}^n \quad (8)'$$

由(9)

$$j=JJ \quad T_{i,JJ+1,k}^n = \frac{2\alpha_3 \Delta y}{\lambda(T_{i,JJ,k}^n)} (T_\omega - T_{i,JJ,k}^n) + T_{i,JJ-1,k}^n \quad (9)'$$

由(10)

$$K=JK \quad T_{i,j,JK+1}^n = \frac{2\alpha_4 \Delta z}{\lambda(T_{i,j,JK}^n)} (T_\omega - T_{i,j,JK}^n) + T_{i,j,JK-1}^n \quad (10)'$$

由(11)

$$K=0 \quad T_{i,j,-1}^n = \frac{2\alpha_4 \Delta z}{\lambda(T_{i,j,0}^n)} (T_\omega - T_{i,j,0}^n) + T_{i,j,1}^n \quad (11)'$$

由对称性知

$$T_{-1,j,k}^n = T_{1,j,k}^n \quad T_{i,-1,k}^n = T_{i,1,k}^n$$

此算法的截断误差为  $o[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta t)^2]$ ,且为无条件稳定.

利用Fourion方法,对于Douglas格式,它的过度因子

$$G = \frac{1-a-b+ab}{(1+a)(1+b)}$$

其中,  $a=r(1-\cos(k_1 h))$ ,  $b=r(1-\cos(k_2 h))$

当 $\Delta x=\Delta y=h$ 时,  $k_1, k_2$ 为任意整数,  $r$ 为网比.  $\forall k_1, k_2, r$ 时  $|G| \leq 1$ .

所以格式是稳定的.对于C-N方法,求得过度因子

$$G = \frac{(1 - \mu + \mu \cos kh) - i \frac{\lambda'}{2} \sinh kh}{(1 + \mu - \mu \cos kh) + i \frac{\lambda'}{2} \sinh kh}$$

$$|G|^2 - 1 = \frac{-4\mu(1 - \cos kh)}{(1 + \mu - \mu \cos kh)^2 + (\frac{\lambda'}{2} \sinh kh)^2}$$

其中,  $\lambda' = c(T) \frac{t}{\Delta z}$ ,  $\mu = \lambda(T) \frac{t}{\Delta z^2}$ ,  $h = \Delta z$ ,  $K$  为任意整数. 由于  $1 - \cos(k\Delta z) \geq 0$ ,

而分母为正, 可得  $|G|^2 - 1 \leq 0$ ,  $|G| \leq 1$ , 所以 C-N 格式是无条件稳定的.

## 2 计算结果及结论

以计算搪玻璃样板中心轴线上 3 点 (搪玻璃外表面, 复合面, 基材表面) 冷却时的温度场 (图 3 中虚线) 为例, 与实测值 (图 3 中实线) 比较. 测试方法, 将样板 3 个不同位置

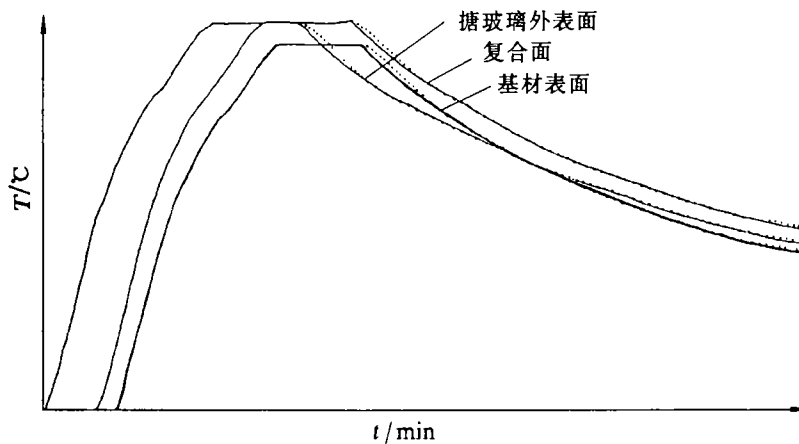


图3 数值计算结果图形(虚线)

处烧上热耦丝引出, 与计算自动测量仪相连, 样板冷却时外界 (边界) 条件与计算时相同, 记录温度场的数值及图像. 从图 3 看出, 主要温度段误差很小, 达到实用要求. 可通过数值计算预测一些结果, 为工艺制订提供参考值. 通过实例计算, 这种数值计算方法具有非金属复合材料传热数值分析的普遍性.

### 参 考 文 献

- 1 黄振侃, 徐贺文, 沈亦鸣, 等. 论搪玻璃釉层的残余应力. 玻璃与搪瓷, 1989, 17 (6): 43 ~ 52
- 2 黄振侃, 徐贺文, 沈亦鸣, 等. 搪玻璃釉层的残余应力研究. 玻璃与搪瓷, 1989, 18 (4): 31 ~ 37

- 3 Xu Hewen, Huang Zhenkan, Shen Yiming, et al. Study on some technology problems about products of glass-lined equipment. Transformation of science and technology into production research (ICPR), 1991, 1687 ~ 1689
- 4 沈亦鸣, 黄振侃, 徐贺文, 等. 解决搪玻璃爆瓷的工艺措施. 北京工业大学学报, 1993, 19(2): 60 ~ 64
- 5 张清纯著. 陶瓷材料的力学性能. 北京: 科学出版社, 1987
- 6 西北轻工业学院主编. 玻璃工艺学. 北京: 轻工业出版社, 1982
- 7 俞易铭著. 热传导及其数值分析. 北京: 清华大学出版社, 1981. 12
- 8 胡祖积. 偏微分方程初值问题差分方法. 北京: 北京大学出版社, 1988

## A Numerical Analysis of Heat Transfer of Glass-Lined Equipment

Huang Zhenkan

( Department of Applied Mathematics, Beijing Polytechnic University, 100022 )

Shen Yiming

( Vice President, Beijing Polytechnic University, 100022 )

Xu Hewen

( Department of Civil Engineering, Beijing Polytechnic University, 100022 )

Lu Jieping

( Beijing Chemical Equipment Plant, 100022 )

**Abstract** Glass-Lined material, which is sintered at high temperature, has different coefficients of thermal expansion, which is due to the residual stress created in the process of cooling the material to the viscoelastic material. However, self-cracks could be triggered in the stress affected area of buffer, when the stress exceeds the strength limit. Numerical analysis is adopted to solve the heat-transfer equations of glass lined material. Three-dimension Douglas and C-N method are used to gain the temperature field suited to cooling process of the the glass lined material. Tests show that the theory and method advanced in this paper are applicable to the process control of glass lined products, The numerical analysis is available for decreasing the residual stress and getting rid of the glass-cracking.

**Keywords** glass lined equipment, heat transfer, numerical analysis