

用最优极点配置确定PID参数

蒋庆瑜

(自动化系)

提 要

本文从逆最优控制问题解决二阶控制系统的PID参数最优整定,导出了最优极点配置所应满足的条件,根据PID参数与带积分顺馈的全状态反馈阵之间的关系,提出通过在全最优配置区配置极点的方法,一次直接整定满足二次型性能指标达到最小的PID最优参数。

Determine PID-Parameter By Assigning Optimal Poles

Jiang Qing-yu

This paper presents a solution to determine optimal PID-parameter of a second order control system, by inverse optimal control. The conditions, which must be followed for assigning optimal poles, are obtained. According to the relation between the PID-parameter and the full state variables feedback matrix with integrator in a forward path, the PID-parameter of optimal control are directly determined by arranging poles in the optimal area for setting.

一、概 述

尽管许多“最优”的控制方案和算法早已问世,但古老的PID控制在实际应用和设计中仍然被工程师们采用。

文献[1]曾推荐采用有积分顺馈的全状态反馈系统。在二阶情况下,它正等效于PID控制。文献[2]提出建立这种系统离散相似的状态方程以及它和PID控制的关系,并提出以使二次型性能指标达到最小来整定PID参数的方法。文献[3]讨论了从双输入、双输出系统实验数据出发,按给定权阵确定最优PID参数的方法和实例。

然而,在工程实践中使用这些方法,仍然存在关于目标函数 Q 阵应如何选择的困难。因此利用闭环极点和系统时域指标之间的关系,用极点配置的方法来设计系统就显得更为实际。自从 1964 年, *Kalman* 提出逆最优控制理论以来,这方面的研究十分活跃。文献[5]综述了这一问题的,提出一种工程设计方法;文献[6]在前人基础上提出了一种多变量系统极点配置的方法。可以说,这一领域的研究目前仍在深入发展。

在实际工程中,许多被控对象都简化为二阶系统进行设计,而对它们的 PID 参数整定却仍然没有一种简单易行的设计方法。本文即从逆最优问题出发,提出一种最优极点配置的方法,设计满足最优控制的 PID 参数。

二、有积分顺馈的全状态反馈二阶系统与 PID 参数

具有极点 a_1 、 a_2 、放大系数为 k 的二阶系统传函为

$$G(s) = \frac{k}{(s-a_1)(s-a_2)} \quad (1)$$

构成文[1]推荐的系统如图 1 所示。

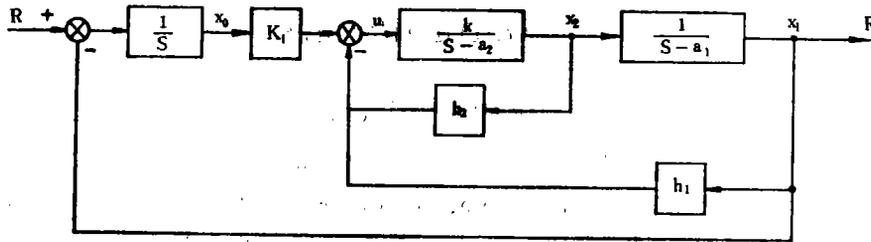


图 1 有积分顺馈的全状态反馈二阶系统

由图中所示状态量之间关系可推得

$$\frac{-u(s)}{y(s)} = (h_1 - a_1 h_2) + h_2 s + \frac{K_i}{s} \quad (2)$$

不难看出,这正是一个 PID 控制,其中比例系数 $K_p = h_1 - a_1 h_2$,微分系数 $K_d = h_2$,积分系数为 K_i 。或写成如下形式

$$\frac{-u(s)}{y(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (3)$$

式中:

$$K_p = h_1 - a_1 h_2 \quad (4)$$

$$T_d = \frac{h_2}{h_1 - a_1 h_2} \quad (5)$$

$$T_i = \frac{h_1 - a_1 h_2}{K_i} \quad (6)$$

显然，假使图 1 系统是一能使二次型性能指标最小的最优控制系统，那么与之相应的 PID 控制系统（图 2）也将实现最优控制。

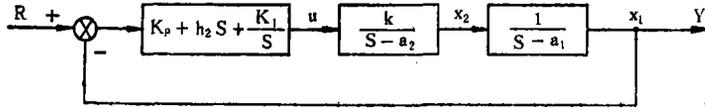


图 2 对应图 1 所示最优调节器的 PID 控制系统

应该说明，图 1 与图 2 系统在沒有外扰的情况下 ($R=0$)，其控制效果是等效的。但在存在外扰时 ($R \neq 0$)，则由于加到系统的实际控制量不同，使动态过程不同。

文[2]、[3]利用离散的 PID 控制与增广二阶系统（带积分反馈）最优调节器参数（反馈系数）之间的关系，选定 Q 、 R 阵，然后求解 Riccati 方程，从而整定 PID 系数。这一方法不仅要求解 Riccati 方程达到稳定，还存在 Q 阵选择的问题。下面从逆最优控制问题来解决 PID 参数整定。

三、从 LQ 逆问题整定 PID 参数

从 LQ 逆问题整定 PID 参数的核心是确定满足最优控制条件的极点配置范围。对高阶系统而言，它有賴于开环极点和零点的分布特征，是比较复杂的问题。但对所讨论的二阶系统，我们可以得到十分简洁的结果。

1. 最优 PD 参数

(1) 反馈系数与极点配置

由上面分析可知，未经增广的二阶系统全状态反馈对应着 PD 控制，反馈系数的确定无异于极点的确定，下面推导它们的关系。

系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ -h_1 k & a_2 - h_2 k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} u \quad (7)$$

对应的特征方程为

$$|SI - A| = S^2 + (H_2 - a_1 - a_2)S + H_1 + a_1(a_2 - H_2) = 0 \quad (8)$$

式中： $H_1 = h_1 k$

$H_2 = h_2 k$

设闭环极点为

$$\lambda_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (9)$$

对应的特征方程为

$$(S - \lambda_1)(S - \lambda_2) = S^2 + 2\xi \omega_n S + \omega_n^2 = 0 \quad (10)$$

比较 (8)、(10) 两式可得反馈系数：

$$H_2 = 2\xi\omega_n + a_1 + a_2 \quad (11)$$

$$H_1 = \omega_n^2 + 2\xi\omega_n a_1 + a_1^2 \quad (12)$$

至此我们已得到从极点位置确定 PID 参数的公式, 即指定极点 ξ 、 ω_n 、由 (10)、(11) 式求出 H_1 、 H_2 , 再由 (4)、(5)、(6) 式确定 PD 参数。

(2) 正常的 PD 控制及状态负反馈控制对极点位置的约束

要实现负反馈控制, PD 控制的比例系数 K_p 必须为正, 把 (11)、(12) 代入 (4) 式, 得到

$$K_p = \frac{1}{k} (\omega_n^2 - a_1 a_2) \quad (13)$$

当 $K_p > 0$, 必然有

$$\omega_n > \sqrt{a_1 a_2} \quad (14)$$

即: 要使系统成为正常的 ($K_p > 0$) PD 控制, 最小相位二阶系统的极点配置必须使闭环极点的模大于开环极点的几何平均值。即: 极点分布于图 3 S 域左半平面中曲线 I 的左侧。

另一方面, 要使状态反馈是负反馈, 必须有 H_1 、 H_2 为正值, 从 (11)、(12) 两式可推得这必须满足条件:

$$2\xi\omega_n > |a_1 + a_2| \quad (15)$$

$$\xi < 1 + \frac{(\omega_n - |a_1|)^2}{2\omega_n |a_1|} \quad (16)$$

由于当 $\xi > 1$ 时系统将成为过阻尼系统, 这常常是我们不希望的, 因而只要取 $\xi \leq 1$, (16) 式就自然满足。故仅需要考虑约束条件 (15) 式。又因存在绝对值不等式:

$$\frac{|a_1| + |a_2|}{2} \geq \sqrt{|a_1| |a_2|}$$

当 (15) 式满足时必有

$$\xi\omega_n > \sqrt{a_1 a_2}$$

当 $\xi \leq 1$ 时, 满足 (15) 式就必然满足 (14) 式。可见, 最小相位二阶系统状态反馈均为负反馈的充要条件是: 闭环极点的实部, 应大于开环极点的平均值[式(15)]。即: 分布于图 3 直线 I 的左侧, ($\xi \leq 1$)。

(3) 最优极点配置

以上讨论表明, 只要我们在直线 I 左侧配置极点就能通过状态负反馈获得预期的时域性能指标。然而能否构成使某一二次型性能指标达到最小的最优控制, 即使系统具有人们熟知的最优控制系统的一系列优点呢? 下面讨论获得最优控制的极点配置条件。

要使系统成为最优控制系统, 配置闭环极点相应的状态反馈阵 h 应满足 Riccati 方程

$$PA + A^T P - Pbh + Q = 0 \quad (17)$$

设半正定对称矩阵:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

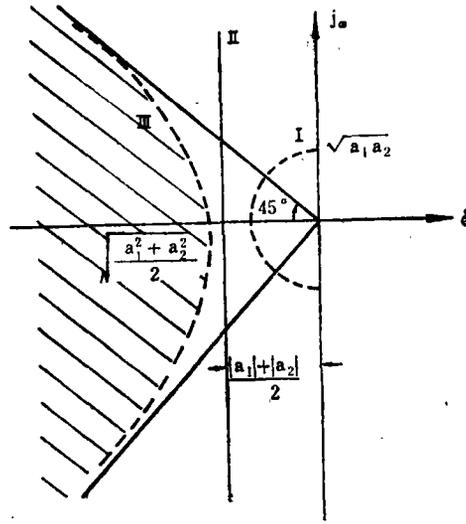


图3 最优极点配置区

Riccati 方程的解:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

由于 $R^{-1}b^T P = h$, 考虑到 P 的对称性, 当取 $R = 1$ 时, 将 A, P, Q , 代入可求得

$$q_{11} = h_1^2 - 2a_1 p_{11} = h_1^2 - 2a_1 \left(h_1 h_2 - \frac{h_1(a_1 + a_2)}{k} \right) \quad (20)$$

$$q_{22} = h_2^2 - 2 \left(\frac{h_1}{k} + a_2 \frac{h_2}{k} \right) \quad (21)$$

对最小相位系统而言, a_1, a_2 均为负值, h_1, h_2 均为正值, 因而 q_{11} 恒为正值, 只要 $q_{22} \geq 0$, 系统就构成最优控制。(21) 式可写成

$$q_{22} = \frac{1}{k^2} (H_2^2 - 2H_1 - 2a_2 H_2)$$

将 (11)、(12) 式代入可得

$$q_{22} = \frac{1}{k^2} [2w_s^2 (2\xi^2 - 1) - (a_1^2 + a_2^2)] \quad (22)$$

要使 $q_{22} \geq 0$ 必须

$$w_s^2 (2\xi^2 - 1) \geq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \quad (23)$$

(23) 式称为极点最优配置条件。这一条件可化为

$$(w_s \xi^2) - w_s^2 \geq \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \quad (24)$$

式中 $w_s = w_n \sqrt{1 - \xi^2}$, 是闭环极点的虚部, 此式表明满足不等式的论域边界恰为一条以 45°

线为渐近线的双曲线(对应 $\xi = \sqrt{0.5}$)。曲线顶点位于距原点为 $\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$ 的负实轴上,如图3曲线Ⅲ所示。

顺便指出,当 $\xi > 1$ 时,闭环极点为互异实根,那么当其平方和($4w_n^2 \xi^2 - 2w_n^2$)位于区域Ⅲ时,也将得到最优控制。由于 $\xi > 1$ 的系统一般是不希望的,下面讨论中将不再提及。

结论:当 $\xi \leq 1$ 时,为获得最优控制,二阶最小相位系统的极点必须配置在以双曲线(24)为边界的最优极点配置区内。

2. 最优PID参数

由于积分控制的“记忆”作用,对系统的动态性能是不利的。但当希望消除静差而系统本身又不包含积分环节时,可构成图1所示的增广二阶系统。这时全状态反馈对应着PID控制,增广了状态 x_0 后系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & a_1 & 1 \\ -H'_0 & -H'_1 & a_2 - H'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix} u \quad (25)$$

H'_1 、 H'_2 表示增广后的反馈系数:

$$H'_1 = h'_1 k$$

$$H'_2 = h'_2 k$$

$$H'_0 = -k, k$$

对应特征方程为

$$[SI - A'] = S^3 + [H'_2 - (a_1 + a_2)]S^2 + (H'_1 - H'_2 a_1 + a_1 a_2)S - H'_0 \quad (26)$$

这时除配置主导极点外,还增加一个非主导极点 λ_3 ,而理想特征方程为

$$\begin{aligned} G'(S) &= (S^2 + 2\xi w_n S + w_n^2)(S - \lambda_3) \\ &= S^3 + (2\xi w_n - \lambda_3)S^2 + (w_n^2 - 2\xi w_n \lambda_3)S - \lambda_3 w_n^2 \end{aligned} \quad (27)$$

比较(26)、(27)两式同次项系数有

$$H'_0 = \lambda_3 w_n^2 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} H'_1 &= w_n^2 + 2\xi w_n a_1 + a_1^2 - \lambda_3 (2\xi w_n + a_1) \\ &= H_1 - \lambda_3 (2\xi w_n + a_1) \end{aligned} \quad (29)$$

$$H'_2 = 2\xi w_n + a_1 + a_2 - \lambda_3 = H_2 - \lambda_3 \quad (30)$$

利用二阶类似的方法可以推得当极点配置在左半平面,且满足条件:

$$4\xi^2 w_n^2 - 2w_n^2 + \lambda_3^2 \geq a_1^2 + a_2^2 \quad (31)$$

则Q阵为非负定阵,系统将满足最优控制条件。从(31)式可见,只要二阶系统极点配置满足最优条件,那么增广后,由于 $\lambda_3^2 \geq 0$,故(31)式必然得到满足,即系统也必将满足最优条件。

把(28)、(29)、(30)式代入(4)、(5)、(6)式可得最优PID参数计算公式:

$$K_p = \frac{1}{k} (w_n^2 - a_1 a_2 - 2\xi w_n \lambda_3) \quad (32)$$

$$T_d = \frac{H'_2}{K_r k} = \frac{2\xi\omega_n + a_1 + a_2 - \lambda_3}{\omega_n^2 - a_1 a_2 - 2\xi\omega_n \lambda_3} \quad (33)$$

$$T_i = \frac{K_r k}{-\lambda_3 \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2 - a_1 a_2 - 2\xi\omega_n \lambda_3}{-\lambda_3 \omega_n^2} \quad (34)$$

可见，当指定主导极点的 $\xi\omega_n$ 及 λ_3 后， T_i 、 T_d 就完全确定，而 K_r 则可改变 k 值加以调整。

四、设计步骤与实例分析

综上，二阶系统的PID控制参数可以直接通过一次简单的计算予以最优整定。步骤如下：

1. 由时域指标及最优配置条件确定主导极点位置

二阶系统时域性能指标与闭环极点参数间存在如下关系：

$$\text{超调量 } \sigma = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \quad (35)$$

$$\text{调整时间 } t_s = 4/\xi\omega_n \quad (0 < \xi < 0.9) \quad (36)$$

当要求一定的超调量限制和调整时间时，应有

$$\xi \geq \frac{|\ln\sigma|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln\sigma)^2}} \quad (37)$$

$$\omega_n \geq \frac{4}{\xi t_s} \quad (38)$$

同时使之满足最优配置条件

$$\omega_n \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2(2\xi^2 - 1)}} \quad (39)$$

2. 取非主导极点远离主导极点

$$\text{一般可取 } |\lambda_3| \geq 5\xi\omega_n \quad (40)$$

3. 确定反馈系数

(假如不必求出，可由(32)、(33)、(34)式直接确定PID参数)

$$K_i = \frac{-\lambda_3 \omega_n^2}{k} \quad (41)$$

$$h'_1 = \frac{1}{k} [\omega_n^2 + 2\xi\omega_n(a_1 - \lambda_3) + a_1(a_1 - \lambda_3)] \quad (42)$$

$$h'_2 = \frac{1}{k} [2\xi\omega_n + a_1 + a_2 - \lambda_3] \quad (43)$$

当二阶系统本身含有积分环节(a_1 或 a_2 为零)，可以不加积分控制，取 $\lambda_3 = 0$ ，则上式仍然适用。

4. 确定最优PID参数

$$K_p = h_1 - a_1 h_2 \quad (44)$$

$$T_i = K_p / K_i \quad (45)$$

$$T_d = h_2 / K_p \quad (46)$$

假使需要, 可按式求出最优控制权阵 Q , 即

$$q'_{11} = \left(\frac{\lambda_3 \omega_n^2}{k} \right)^2$$

$$q'_{22} = \frac{1}{k^2} [H_1'^2 + 2\lambda_3 \omega_n^2 (H_2' - a_2) - 2a_1 (H_1' H_2' - (a_1 + a_2) H_1' + H_1')]]$$

$$q'_{33} = \frac{1}{k^3} [H_2'^2 - 2(H_1' + a_1 H_2')]]$$

实例: 对象传函 $G(s) = \frac{100}{(S+30)(S+10)}$, 要求设计一最优 $PI D$ 控制器, 使其超调量 $\sigma \leq 5\%$,

调整时间 $t_s \leq 0.2$ 秒, 并在阶跃信号下无稳态误差。

(1) 在最优配置区确定满足性能要求的闭环极点。由 (37) 式, 性能要求

$$\xi \geq \frac{|\ln \sigma|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln \sigma)^2}} = 0.69$$

为使极点位于最优区, ξ 必须大于 $\sqrt{0.5}$, 这里取 $\xi = 0.72$, 再根据调整时间的要求确定 ω_n :

$$\omega_n \geq \frac{4}{0.2 \times 0.72} = 27.78$$

然而按最优配置条件, 按 (39) 式应有:

$$\omega_n \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2(2\xi^2 - 1)}} = \sqrt{\frac{1000}{0.1811}} = 116.5631$$

(2) 确定非主导极点 λ_3 , 由于对象本身不含积分环节, 要消除稳态误差必须采用 $PI D$ 控制器由 (40) 式:

$$|\lambda_3| \geq 5\xi \omega_n = 419.62716$$

3. 确定最优 $PI D$ 参数, 假使不要求出状态反馈系数, 可由 (32)、(33)、(34) 式确定:

$$K_p = 837.2173764$$

$$T_d = 6.539261 \times 10^{-3}$$

$$T_i = 0.01468428$$

由于这一 $PI D$ 参数是对应无限时间最优调节器的, 在动态过程中响应并不理想。图 5 曲线 I 表示了其阶跃响应, 超调量高达 26%。合理的方法是采用积分分离的 $PI D$ 控制。图 4 曲线 II 表示了当误差小于给定值 0.1 倍, 同时误差变化率小于 0.1 倍误差时, 加入积分控制的积分分离式 $PI D$ 控制的响应曲线。

按推广系统确定 $PI D$ 参数, 在将积分去除后的 PD 控制是否仍满足最优条件呢? 结论是肯定的。由于 PD 控制二阶系统开环传函为

$$G(S) = \frac{K_p k (1 + T_d S)}{(S - a_1)(S - a_2)} \quad (47)$$

对应闭环传函为

$$\phi(S) = \frac{K_p k (1 + T_d S)}{S^2 + [K_p k T_d - (a_1 + a_2)]S + a_1 a_2 + K_p k} \quad (48)$$

系统极点参数为

$$w_n'^2 = a_1 a_2 + K_p k \quad (49)$$

$$2\xi' w_n' = K_p k T_d - (a_1 + a_2) \quad (50)$$

将 (32)、(33) 式代入可求出

$$w_n'^2 = w_n^2 - 2\xi w_n \lambda_3 \quad (51)$$

$$2\xi' w_n' = 2\xi w_n - \lambda_3 \quad (52)$$

由 (51)、(52) 式可得

$$w_n'^2 (2\xi'^2 - 1) = (2\xi^2 - 1)w_n^2 + \frac{\lambda_3^2}{2}$$

由于原设计满足最优条件

$$(2\xi^2 - 1)w_n^2 > \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$$

故必有

$$w_n'^2 (2\xi'^2 - 1) > \frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$$

即按 PID 设计参数进行 PD 控制时也是一个最优控制器。图 4 曲线 III 表示了系统存在纯延时 0.013 秒时的响应。

图 4 的全部曲线都是使用 PID—DDC 仿真程序在 IBM—Pc 机上的仿真结果。

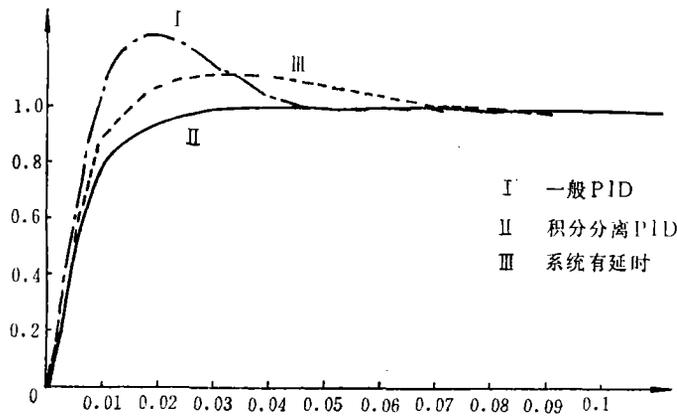


图 4 实例仿真曲线

五、结 束 语

本文提出的二阶系统 PID 参数最优整定方法,概念清楚,计算简单,易于推广使用。讨论中导出了现代控制理论中二次型性能指标最优控制与二阶系统闭环极点位置的关系。使最优控制和古典频域分析理论简单而明确地联系起来,给分析问题带来很大方便。

八一级罗莹同学对本文算例进行了核算并提供了仿真结果,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] T. E. Fortmann, K. L. Hitz. 线性控制系统结论 吕林等译,机械工业出版社 pp. 381—391, pp. 445—454
- [2] 张济朋: PID 参数的最优整定,《化工自动化及仪表》No.4 1979年, pp. 60—69
- [3] 阮荣跃、夏天池: 二次型最优与 PID 参数整定,《信息与控制》No.3. 1982, pp. 15—20
- [4] Kalman, R. E. When is A linear Control System Optimal Trans ASMA (D) 86 (1964) pp. 51—60
- [5] 杨泰澄、李恬鉴、徐衍华: 从逆问题指定闭环极点设计最优调节器,《自动化学报》Vol. 10. No.4 Oct. 1984年, pp. 317—323
- [6] 石应廉、曹长修: 多变量系统的最优极点配置设计方法,《信息与控制》, No.4. 1984年, pp. 12—16