第 40 卷 第 5 期 北 京 工 业 大 学 学 报 Vol. 40 No. 5
2014 年 5 月 JOURNAL OF BEIJING UNIVERSITY OF TECHNOLOGY May 2014

一类广义幂级数环的有限维数

姚海楼, 郭 莹, 平艳茹
(北京工业大学 应用数理学院, 北京 100124)

摘 要: 令 R 是一个有单位元的完备的凝聚交换环,研究并比较了 R 的有限维数与 R 上的广义幂级数环 $[[R^{\leqslant,S}]]$ 的有限维数的关系,得到了一些有限维数不等式. 结果表明:如果 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,则 R 的有限投射维数不超过 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 的有限投射维数;令 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,则 R 的有限内射维数不超过 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 的有限内射维数;如果 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,则 R 的有限弱维数不超过 $[[R^{S,\leqslant}]]$ 的有限弱维数.

关键词: 代数; 模; 广幂级数环; 有限维数
中图分类号: O 153.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 0254 - 0037(2014)05 - 0796 - 05

On Finite Dimension of a Kind of Generalized Power Series Rings

YAO Hai-lou, GUO Ying, PING Yan-ru
(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: Let R be a perfect and coherent commutative ring with unit element, in this paper the relationship between the finitistic dimensions of R and the generalized power series ring $[[R^{\leqslant,S}]]$ over R was investigated, and some inequalities for finitistic dimensions were obtained. Results show that the finitistic projective (injective) dimension of R is less than and equal to the finitistic projective (injective) dimension of $[[R^{\leqslant,S}]]$ and the finitistic weak dimension of R is less than and equal to the finitistic weak dimension of $[[R^{\leqslant,S}]]$.

Key words: ring; module; generalized power series ring; finitistic dimension

20 世纪 90 年代 Ribenboim[1] 对于广义幂级数环的性质做了较为系统的研究;Higman[2] 基于系数环 R 和偏序幺半群 $(S,\leqslant)$,并利用广义幂级数构造了一个新环 A;Neumann[3] 在半群 $(S,\leqslant)$ 为全序群情况下对这种环进行了研究;Ribenboim 在文献[4]中给出了广义幂级数环何时为诺特环的条件,同时给出了一些广义幂级数环的有趣例子;2001 年, Varadarajan[5] 在 Ribenboim[4] 的基础上研究了广义幂级数环为诺特环的条件;同年,Varadarajan[6] 研究了广义幂级数模,证明了一定条件下广义幂级数模为诺特模. 近些年来在国内,刘仲奎[7-8] 和肖民卿[9] 对广义幂级数环的根性进行了研究,得到了许多有用的结果.

本文令 R 是有单位元的交换环,研究并比较了 R 的有限维数与 R 上的广义幂级数代数 $[[R^{\leqslant,S}]]$ 的有限维数的关系.

1 预备知识

令 R 是一个带有单位元的结合环,用 R-Mod(或 Mod-R)表示所有左(或右)R-模构成的模范畴,用 R-mod(或 mod-R)表示具有有限生成投射分解的所有左(右)R-模构成的模范畴. R 的左小(或大)有

收稿日期: 2013-10-29
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271119); 北京市自然科学基金资助项目(1122002)
作者简介: 姚海楼(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事代数表示论、同调代数、序代数方面的研究, E-mail: yaohl@bjut.edu.cn

限(投射)维数定义为 R-mod(或 R-Mod)中所有具有有限投射维数的模的投射维数的上确界，记为 fin. dim($_RR$)(或 Fin. dim($_RR$)). 显然，fin. dim($_RR$) $\leqslant$ Fin. dim($_RR$). 用 fin. dim (R_R)与 Fin. dim(R_R)分别表示对应 R 的右小(或大)有限维数. 与环 R 的有限投射维数定义类似，通过 R-模 M 的内射维数可以定义环 R 的左小(或大)有限内射维数为 R-mod(或 R-Mod)中所有具有有限内射维数的模的内射维数的上确界，记为 fin′. dim($_RR$) (或 Fin′. dim($_RR$)). 显然，fin′. dim($_RR$) $\leqslant$ Fin′. dim($_RR$). 用 fin′. dim (R_R) 与 Fin′. dim(R_R) 分别表示对应 R 的右小(或大)有限内射维数. 通过 R-模 M 的平坦维数可以定义环 R 的左小(或大)有限弱维数为 R-mod (或 R-Mod)中所有具有有限平坦维数的模的平坦维数的上确界，记为 fin. $w$dim($_RR$) (或 Fin. $w$dim($_RR$)). 显然，fin. $w$dim($_RR$) $\leqslant$ Fin. $w$dim($_RR$). 用 fin. $w$dim (R_R) 与 Fin. $w$dim(R_R) 分别表示对应 R 的右小(或大)有限弱维数.

众所周知，若 R 是交换诺特环，则 Fin. dim(R_R) 等于 R 的 Krull 维数；若 R 是交换诺特局部环，则 fin. dim(R_R)等于 R 的深度 depth(R). 在后一种情况，fin. dim(R_R)与 Fin. dim($_RR$)均是有限的当且仅当 R 是 Cohen-Macaulay 环. 也有满足 Fin. dim($_RR$) = fin. dim(R_R) = ∞ 的交换 Noether 环的例子. 当 R 是 Artin 代数时，众所周知的有限维数猜想 fin. dim (R_R) = Fin. dim($_RR$)一般是不成立的，甚至二者的差可以任意大. 然而，第二有限维数猜想即 fin. dim (R_R) < ∞ 目前还是公开问题. 这个猜想涉及许多同调猜想，并且吸引着许多代数学者(见文献[10-13]).

下面令 R 是带有单位元 1 的交换环，S 是交换幺半群，其运算记为加法，并赋予一个严格偏序关系 $\leqslant$.

定义 1　令$(S,\leqslant)$是带有偏序关系的集合，称

1) $(S,\leqslant)$是 Artin 的，若$(S,\leqslant)$中的严格降序列：$s_1>s_2>s_3>\cdots,s_i\in S$，是有限的；

2) $(S,\leqslant)$是诺特的，若$(S,\leqslant)$中的严格升序列：$s_1<s_2<s_3<\cdots,s_i\in S$，是有限的；

3) $(S,\leqslant)$是窄的，若$(S,\leqslant)$的每个平凡序子集是有限的(若一个子集中每对相异元素都是不可比的，则该子集称为平凡序的).

定义 2　令 S 是带有零元 0 的加法幺半群，$\leqslant$ 为一个偏序关系. $(S,\leqslant)$叫作偏序幺半群，若 $s\leqslant t$ 且 $u\in S$，则 $s+u\leqslant t+u$. 偏序幺半群$(S,\leqslant)$叫作严格偏序幺半群，若 $s<t$ 且 $u\in S$，则 $s+u<t+u$.

定义 3　令 R 是有单位元的交换环，$(S,\leqslant)$是严格偏序幺半群，定义 $R^S=\{f\mid f:S\to R\}$. 若 $f\in R^S$，令 f 的支撑集为 $\mathrm{supp}(f)=\{s\in S\mid f(s)\neq 0\}$.

对有单位元的交换环 R，定义广义幂级数环 $[[R^{S,\leqslant}]]=\{f\in R^S\mid \mathrm{supp}(f)$是 Artin 且窄的$\}$. 容易证明，对每个 $s\in S,f,g\in[[R^{S,\leqslant}]]$，集合 $X_s(f,g)=\{(t,u)\in S\times S\mid s=t+u,f(t)\neq 0,g(u)\neq 0\}$是有限的，因此可定义卷积运算：$(f*g)(s)=\sum\limits_{(t,u)\in X_s(f,g)}f(t)g(u)$，而加法运算为$(f+g)(s)=f(s)+g(s)$，在这些运算下$[[R^{S,\leqslant}]]$成为有单位元的交换结合环，其单位元 e 为：$e(0)=1$，对于其他 $s\in S,s\neq 0$，$e(s)=0$. 映射$r\mapsto re$自然地将环 R 嵌入$[[R^{S,\leqslant}]]$使之为其子环(见文献[4]).

对任意 R-模 M，定义$[[R^{S,\leqslant}]]$-模$[[M^{S,\leqslant}]]=\{\varphi:S\to M\mid \mathrm{supp}(\varphi)$是 Artin 的且窄的$\}$. 容易验证在函数加法下，$[[M^{S,\leqslant}]]$构成一个加法交换群. 对任意$f\in[[R^{S,\leqslant}]],\varphi\in[[M^{S,\leqslant}]]$和 $s\in S$，类似上面环的情形，容易证明集合 $X_s(f,\varphi)=\{(t,u)\in S\times S\mid s=t+u,f(t)\neq 0,\varphi(u)\neq 0\}$是有限的. 易知 $\mathrm{supp}(f\varphi)\subseteq\mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(\varphi)$. 对任意 $s\in S,f\in[[R^{S,\leqslant}]],\varphi\in[[M^{S,\leqslant}]]$，如果定义$(f*\varphi)(s)=\sum\limits_{(t,u)\in X_s(f,g)}f(t)\varphi(u)$，则$[[M^{S,\leqslant}]]$构成$[[R^{S,\leqslant}]]$-模，称为广义幂级数模. 对任元素 $m\in M$，从 S 到 M 的映射 φ_m 为：$\varphi_m(0)=m$，对于其他$s\in S,s\neq 0,\varphi_m(s)=0$. 映射 $m\mapsto\varphi$自然地将环 M 嵌入$[[M^{S,\leqslant}]]$使之为其子模(见文献[5-6]).

下面给出一些引理，作为本文主要结果证明的准备.

引理 1　如果 R 是带有单位元的完备凝聚交换环，则$[[R^{S,\leqslant}]]$作为一个右 R-模是平坦的.

证明：作为一个右 R-模，$[[R^{S,\leqslant}]]\cong\prod\limits_{s\in S}R$ 是投射的，从而是平坦的.

引理 2　令 R 是有单位元的交换环，$(S,\leqslant)$是严格有序幺半群，$[[R^{S,\leqslant}]]$是广义幂级数环，则有下列结论：

1) 若 M 是内射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模，则 M 是内射 R-模；

2) 若 M 是平坦的 R-模，则$[[R^{\leqslant,S}]]\otimes_RM$ 是平坦的$[[R^{S,\leqslant}]]$-模；

3) 若 M 是平坦的$[[R^{S,\leqslant}]]$-模，则 M 是平坦的 R-模；

4) 若 M 是内射 R-模，则 $\mathrm{Hom}_R([R^{\leqslant,S}],M)$是

内射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模.

证明：1）已知 M 是内射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模，而$[[R^{S,\leqslant}]]\cong\prod\limits_{s\in S}R$，故 M 是内射 $\prod R$-模. 对 R 的任何左理想 I，则 $\prod\limits_{s\in S}I$ 是$[[R^{S,\leqslant}]]\cong\prod\limits_{s\in S}R$ 的左理想. 由 Baer 判别法（见文献[14]《同调代数》第 76 页），任何 $g'\in\mathrm{Hom}(\prod I,M)$ 都可以开拓成同态 $f'\in\mathrm{Hom}(\prod R,M)$，使当$(a_1,a_2,\cdots,a_s,\cdots)\in\prod I$ 时，$g'(a_1,a_2,\cdots,a_s,\cdots)=f'(a_1,a_2,\cdots,a_s,\cdots)$. 因此，任何 $g\in\mathrm{Hom}(I,M)$ 都可以开拓成 $f\in\mathrm{Hom}(R,M)$，使当 $a\in I$ 时，$g(a)=f(a)$. 所以，M 是内射 R-模.

2）若 M 是平坦的 R-模. 由于$[[M^{S,\leqslant}]]\cong[[R^{\leqslant,S}]]\otimes_R M$，故由文献[15]第 147 页的定理 4 知$[[R^{\leqslant,S}]]\otimes_R M$ 是平坦的$[[R^{S,\leqslant}]]$-模.

3）显然，若 M 是$[[R^{S,\leqslant}]]$-模，则 M 也是 R-模. 如果 M 是平坦的$[[R^{S,\leqslant}]]$-模，由文献[14]第 147 页上的定理 31 知 $\mathrm{Hom}_Z(M,Q/Z)$ 为内射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模，这里 Z 是整数环，Q 是由全体有理数所组成的加法交换群，从而为 Z-模. 由引理 2 的结论 1）可知，$\mathrm{Hom}_Z(M,Q/Z)$ 为内射 R-模，从而再由文献[14]第 147 页上的定理 31 知 M 是平坦 R-模.

4）由于 R 是交换环，R 上广义幂级数环$[[R^{S,\leqslant}]]$可视作 R 上的代数，故由文献[14]中第 79 页上的引理 3 知 $\mathrm{Hom}_R([R^{\leqslant,S}],M)$ 是内射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模.

引理 3　设 R 是有单位元的结合环，A 是左 R-模，则有

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}R\right)\otimes_R A\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}(R\otimes_R A)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}A\qquad(1)$$

式中 Λ 是有限的或无限的集合.

证明：当为 Λ 有限集时，结论是显然的，故考虑 Λ 为无限集情形. 由上积定义或张量积定义，容易得到如下同态（群同态，进一步，左 R-模同态）：

$$g:\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}R\right)\otimes_R A)\to\prod_{\lambda\in\Lambda}(R\otimes_R A)$$
$$(\cdots r_\lambda\cdots)\otimes a\mapsto(\cdots r_\lambda\otimes a\cdots)\qquad(2)$$

显然，当 A 是正则模 R 时，易证 g 是同构.

同理，当 A 是自由左 R-模时，g 也是同构.

另一方面，对任意左 R-模 A，存在自由左 R-模 F_1 与 F_2，使 $F_2\xrightarrow{f_2}F_1\xrightarrow{f_1}A\longrightarrow0$ 是正合列. 于是，有如下交换：

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}R\right)\otimes_R F_2 \arrow[r, "I\otimes f_2"] \arrow[d, "g_2"'] & \left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}R\right)\otimes_R F_1 \arrow[r, "I\otimes f_1"] \arrow[d, "g_1"'] & \left(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}R\right)\otimes_R A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] \\
\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(R\otimes_R F_2) \arrow[r, "\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(I\otimes f_2)"] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(R\otimes_R F_1) \arrow[r, "\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(I\otimes f_2)"] & \prod\limits_{\lambda\in\Lambda}(R\otimes_R A) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 g_2、g_1 与 g 同式(2)，且 g_1 与 g_2 是同构，由于 g 是同构，故式(1)成立.

注：1）对偶地，当 M 是右 R-模时，有

$$M\otimes_R\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}R\right)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}(M\otimes_R R)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}M$$

2）对于一般情形，同构式一般不成立，见文献[14]（《同调代数》）第 152 页；

3）如果 M_λ 是自由右 R-模，A 是左 R-模，则同样可证得

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda\right)\otimes_R A\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda\otimes_R A)$$

引理 4　如果 R 是带有单位元的交换环，M 是 R-模，则有$[[M^{S,\leqslant}]]\cong[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R M$.

证明：由引理 3 有$[[M^{S,\leqslant}]]\cong\prod\limits_{s\in S}M\cong\prod\limits_{s\in S}(R\otimes_R M)\cong\left(\prod\limits_{s\in S}R\right)\otimes_R M)\cong[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R M$.

2　主要结果

在本节内将叙述并证明本文的主要结果.

设 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环，则任意多个 R-投射模的直积仍是投射模[14,16-17]. 首先有：

引理 5　设 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环，M 是有限生成左 R-模，则$[[M^{S,\leqslant}]]$为有限生成$[[R^{S,\leqslant}]]$-模.

证明：由于 M 是有限生成 R-模，故存在满同态 $\phi:\oplus_{i=1}^n R\to M$，这里 n 是正整数，且$\oplus_{i=1}^n R$ 为 R 作为左 R-模的直和. 因为 $\prod\limits_{s\in S}R_R$ 是投射模，故为平坦模. 于是，有满同态 $\left(\prod\limits_{s\in S}R_R\right)\otimes\phi:\left(\prod\limits_{s\in S}R_R\right)\otimes_R(\oplus_{i=1}^n R)\to\left(\prod\limits_{s\in S}R_R\right)\otimes_R M$. 由于 $\left(\prod\limits_{s\in S}R_R\right)\otimes_R(\oplus_{i=1}^n R)\cong\oplus_{i=1}^n\left(\prod\limits_{s\in S}R\right)\otimes_R R\cong\oplus_{i=1}^n\left(\prod\limits_{s\in S}R\right)\cong$

$\oplus_{i=1}^{n}[[R^{\leqslant,S}]]$以及$[[M^{\leqslant,S}]]\cong[[R^{\leqslant,S}]]\otimes_R M$,因此,$[[M^{S,\leqslant}]]$是一个有限生成$[[R^{S,\leqslant}]]$-模.

引理 6 设 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,M 是(有限生成)左 R-模,则 $\mathrm{proj.\,dim}_R M=\mathrm{proj.\,dim}_{[[R^{S,\leqslant}]]}[[M^{S,\leqslant}]]$.

证明:任取(有限生成)R-模 M 的如下一个 R-投射分解$\cdots\to P_n\xrightarrow{d_n}\cdots\to P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}M\to 0$,于是由引理 1,有正合列$\cdots\to[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R P_n\xrightarrow{\varepsilon\otimes d_n}\cdots\to[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R P_1\xrightarrow{\varepsilon\otimes d}[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R P_0\xrightarrow{\varepsilon\otimes d_0}[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R M\to 0$, 由引理 4,有$\cdots\to[[P_2^{S,\leqslant}]]\to[[P_1^{S,\leqslant}]]\to[[P_0^{S,\leqslant}]]\to[[M^{S,\leqslant}]]\to 0$ 为$[[M^{S,\leqslant}]]$的投射分解. 如果 $\mathrm{Im}\,d_n$ 是投射模,则$\mathrm{Im}\varepsilon\otimes d_n\cong[[R^{\leqslant,S}]]\otimes\mathrm{Im}\,d_n$ 是投射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模. 故由文献[14]第 182 页定理 7 知 $\mathrm{proj.\,dim}_{[[R^{S,\leqslant}]]}[[M^{S,\leqslant}]]\leqslant\mathrm{proj.\,dim}_R M$.

反过来,设$[[R^{S,\leqslant}]]$-模$[[M^{S,\leqslant}]]$有投射分解$0\to Q_n\to\cdots\to Q_2\to Q_1\to Q_0\to[[M^{S,\leqslant}]]\to 0$,这里的 Q_i 均是投射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模. 由于 Q_i 是 R-模,且 $Q_i\cong R\otimes_R Q_i$,故 Q_i 也是投射 R-模. 而作为 R-模,$[[M^{S,\leqslant}]]\cong\prod_{s\in S}M$,故 $\mathrm{proj.\,dim}_R\prod_{s\in S}M\leqslant n$. 如果取上面的分解为$[[M^{S,\leqslant}]]$的一个最短的投射分解,则有 $\mathrm{proj.\,dim}_R M\leqslant n=\mathrm{proj.\,dim}_{[[R^{S,\leqslant}]]}[[M^{S,\leqslant}]]$.

由引理 6 易知:

命题 1 设 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,则环 R 的总体维数不超过环$[[R^{S,\leqslant}]]$的总体维数,即 $\mathrm{Gl.\,dim}R\leqslant\mathrm{Gl.\,dim}[[R^{S,\leqslant}]]$.

由引理 6 的证明过程易知:

定理 1 如果 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,则 R 有限投射维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的有限投射维数,即有 $\mathrm{Fin.\,dim}(R)\leqslant\mathrm{Fin.\,dim}([[R^{S,\leqslant}]])$.

注:建立引理 5 的目的是希望建立交换环 R 与其广义幂级数环$[[R^{S,\leqslant}]]$的小有限维数之间的联系,但目前看来还有一定困难.

定理 2 令 R 是有单位元的交换环,则 R 的有限内射维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的有限内射维数,即有 $\mathrm{Fin}'.\,\mathrm{dim}R\leqslant\mathrm{Fin}'.\,\mathrm{dim}[[R^{S,\leqslant}]])$.

证明:对 R-模 M,任取其如下一个 R-内射分解$0\to M\to Q_0\to Q_1\to\cdots\to Q_n\to\cdots$,于是,有正合列 $0\to\mathrm{Hom}_R([[R^{\leqslant,S}]],M)\to\mathrm{Hom}_R([[R^{\leqslant,S}]],Q_0)\to\mathrm{Hom}_R([[R^{\leqslant,S}]],Q_1)\to\cdots\to\mathrm{Hom}_R([[R^{\leqslant,S}]],Q_n)\to\cdots$,由引理 2 的结论 4)可知, $\mathrm{Hom}_R([[R^{\leqslant,M}]],Q_n)$是内射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模($n=0,1,2,\cdots$),所以,易知有 $\mathrm{inj.\,dim}_{[[R^{S,\leqslant}]]}[[M^{S,\leqslant}]]\leqslant\mathrm{inj.\,dim}_R M$.

另一方面,设$[[R^{S,\leqslant}]]$-模$[[M^{S,\leqslant}]]$有内射分解 $0\to[[M^{S,\leqslant}]]\to Q_0\to Q_1\to\cdots\to Q_n\to 0$,这里的 Q_i 均是内射$[[R^{S,\leqslant}]]$-模. 作为 R-模,由引理2 的结论1)可知,Q_i 也是内射 R-模. 又因为$[[M^{S,\leqslant}]]\cong\prod_{s\in S}M$,故 $\mathrm{inj.\,dim}_R\prod_{s\in S}M\leqslant n$. 如果取上面的分解为$[[M^{S,\leqslant}]]$的一个最短的内射分解,则有 $\mathrm{inj.\,dim}_R M\leqslant n=\mathrm{inj.\,dim}_{[[R^{S,\leqslant}]]}[[M^{S,\leqslant}]]$,于是有 $\mathrm{inj.\,dim}_R M=\mathrm{inj.\,dim}_{[[R^{S,\leqslant}]]}[[M^{S,\leqslant}]]$.

所以,R 的有限内射维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的有限内射维数, 即有 $\mathrm{Fin.\,dim}(R)\leqslant\mathrm{Fin.\,dim}([[R^{S,\leqslant}]])$.

定理 3 如果 R 是一个完备的凝聚的有单位元的交换环, 则:

1) R 的有限弱维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的有限弱维数, 即有 $\mathrm{Fin.}\,w\mathrm{dim}R\leqslant\mathrm{Fin.}\,w\mathrm{dim}[[R^{S,\leqslant}]]$;

2) R 的弱维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的弱维数, 即有 $W\mathrm{dim}R\leqslant W\mathrm{dim}[[R^{S,\leqslant}]]$.

证明: 1) 对(有限生成)R-模 M,任取其如下一个 R-平坦分解$\cdots\to F_n\xrightarrow{d_n}\cdots\to F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{d_0}M\to 0$,于是,由于$[[R^{S,\leqslant}]]\cong\prod_{s\in S}R$ 是投射 R-模,从而为平坦 R-模,有正合列$\cdots\to[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R F_n\xrightarrow{\varepsilon\otimes d_n}\cdots\to[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R F_1\xrightarrow{\varepsilon\otimes d_1}[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R F_0\xrightarrow{\varepsilon\otimes d_0}[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R M\to 0$,由于 M 与 $F_n(0,1,2,\cdots)$均是(有限生成)R-模,故$[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R M$ 与$[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R F_n(n=0,1,2,\cdots)$也均是(有限生成)$[[R^{S,\leqslant}]]$-模. 如果 $\mathrm{Im}\,d_n$ 是平坦 R-模,则由引理 2 的结论 2)可知,$\mathrm{Im}\,\varepsilon\otimes d_n\cong[[R^{\leqslant,S}]]\otimes\mathrm{Im}\,d_n$ 是平坦$[[R^{S,\leqslant}]]$-模. 故由文献[14]第 225 页定理 24 知$[[M^{\leqslant,S}]]\cong[[R^{S,\leqslant}]]\otimes_R M$ 的平坦维数小于等于 M 的平坦维数.

反过来,设$[[R^{S,\leqslant}]]$-模$[[M^{S,\leqslant}]]$有平坦分解$0\to F_n\to\cdots\to F_2\to F_1\to F_0\to[[M^{S,\leqslant}]]\to 0$,这里的 F_i 均是平坦$[[R^{S,\leqslant}]]$-模. 类似前面,由于 F_i 是 R-模,且 $F_i\cong R\otimes_R F_i$,故 F_i 也是平坦 R-模(引理 2 的结论 3)). 而作为 R-模,$[[M^{S,\leqslant}]]\cong\prod_{s\in S}M$,故 M 的平坦维数 $F.\,\mathrm{dim}_R\prod_{s\in S}M\leqslant n$. 如果取上面的分解

为$[[M^{S,\leqslant}]]$的一个最短的平坦分解,则有$F.\dim_R M\leqslant n=F.\dim_{[[R^{S,\leqslant}]]}[[M^{S,\leqslant}]]$.

所以,易知R的有限弱维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的有限弱维数,即有 $\mathrm{Fin}.w\dim R\leqslant \mathrm{Fin}.w\dim [[R^{S,\leqslant}]]$.

2)与证明1)的类似可证得R的弱维数小于等于$[[R^{S,\leqslant}]]$的弱维数.

3 结论

1)如果R是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,则R的有限投射维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的有限投射维数.

2)令R是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,则R的有限内射维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的有限内射维数.

3)如果R是一个完备的凝聚的有单位元的交换环,则R的有限弱维数不超过$[[R^{S,\leqslant}]]$的有限弱维数.

参考文献:

[1] RIBENBOIM P. Generalized power series rings[C]// Lattices, Semigroups and Universal Algebra. New York: Plenum, 1990: 271-277.

[2] HIGMAN G. Ordering by divisibility in abstract algebras [J]. Proc London Math Soc, 1952, 3(2): 326-336.

[3] NEUMANN B H. On ordered division rings[J]. Trans Math Soc, 1949, 66(1): 202-252.

[4] RIBENBOIM P. Noetherian rings of generalized power series[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 1992,79 (3): 293-312.

[5] VARADARAJAN K. Noetherian generalized power series rings and modules[J]. Communications in Algebra, 2001, 29(1): 245-251.

[6] VARADARAJAN K. Generalized power series modules [J]. Communications in Algebra, 2001,29(3): 1281-1294.

[7] LIU Zhong-kui. Special properties of rings of generalized power series[J]. Comm Algebra, 2004, 32(8): 3215-3226.

[8] LIU Zhong-kui. Baer rings of generalized power series[J]. Glasgow Math J, 2002, 44(3): 463-469.

[9] 肖民卿. 广义幂级数环的素理想和素根[J]. 福建师范大学学报:自然科学版, 2003, 19(3): 1-4.
XIAO Min-qing. Prime ideals and the prime radical of rings of generalized power series[J]. Journal of Fujian Normal University: Natural Science, 2003, 19(3): 1-4. (in Chinese)

[10] ANGELERI-HUGEL L, TRLIFAJ J. Tilting theory and the finitistic dimension conjecture[J]. Trans Amer Math Soc, 2002, 354 (11): 4345-4358.

[11] XI Chang-chang. On the finitistic dimension conjecture II: related to finite global dimension[J]. Adv Math, 2006, 201: 116-142.

[12] ZIMMERMANN-HUISGEN B. The finitistic dimension conjectures——a tale of 3.5 decades[C]// Abelian Groups and Modules. Dordrecht: Kluwer, 1995: 501-517.

[13] WEI Jia-qun. Finitistic dimensions and restricted flat dimensions[J]. J Algebra,2008, 320(1): 116-127.

[14] 周伯埙. 同调代数[M]. 北京: 科学出版社, 1999: 76-225.

[15] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 147-148.

[16] CHASE S U. Direct product of modules[J]. Trans A M S, 1960, 97(3): 457-473.

[17] LAMT Y. Lectures on modules and rings[M]. New York: Spinger-Verlag, 1999: 21-26.

(责任编辑 刘 潇)