

基于最大熵的离散变量框架结构两相优化设计

滕海文, 霍 达

(北京工业大学 建筑工程学院, 北京 100022)

摘 要: 根据两相优化设计的思路和离散变量的特点,应用最大熵准则,通过引入附加约束条件,交替进行乘子相和结构相优化,将离散变量框架优化设计问题等价地化为连续变量框架优化设计问题求解.在考虑应力约束、位移约束和尺寸约束等多个约束及多个工况的条件下,成功地对离散变量框架进行了优化设计.算例结果表明:这种方法的迭代公式简单,收敛速度快;此法可以有效地应用于工程实际,尤其是多约束、多工况的大型工程结构优化问题.

关键词: 最大熵; 离散变量; 结构优化设计

中图分类号: TU 318

文献标识码: A

文章编号: 0254-0037(2002)03-0297-04

随着优化技术向实际应用的转移,离散变量结构优化设计的研究越来越引起人们的重视.1987年,A B Templeman 和李兴斯引入信息熵和最大熵准则求解约束非线性规划问题^[1];1989年,李兴斯将其用于连续变量桁架结构的优化设计^[2];1993年,霍达将其用于离散变量桁架及连续变量框架结构的优化设计^[3],均取得了满意的结果.本文将此方法延伸,讨论了基于最大熵的离散变量框架结构的优化设计问题.

1 数学模型的建立

对于布局 and 材料给定的框架结构,设计变量从已知离散域 X 中选取,在同时满足 P 个工况下相应约束时,使结构总质量 m 最轻的优化设计数学模型为

$$\text{求: 设计方案 } A, I, S \quad \text{使 } m = \sum_{i=1}^n \rho_i L_i A_i \rightarrow \min$$

$$\text{满足约束: } \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j I_j u_j^a} \int_{L_j} M_{ij}^F M_{ij}' dL_i + \sum_{j=1}^n \frac{N_{ij}^F N_{ij}'}{E_j A_j u_j^a} + \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{G_j A_j u_j^a} \int_{L_j} V_{ij}^F V_{ij}' dL_i \leq 1 \quad (1)$$

$$\sigma_i^L \leq \sigma_{ij} = \frac{M_{ij}}{S_j} + \frac{N_{ij}}{A_j} \leq \sigma_i^U, \quad \tau_i^L \leq \tau_{ij} = \frac{V_{ij}}{A_j} \leq \tau_i^U \quad (2)$$

$$A_i, I_i, S_i \geq A_i^L, I_i^L, S_i^L \text{ 且 } A_i, I_i, S_i \in X \quad (i = 1, 2, \dots, n), X \text{ 为离散域} \quad (3)$$

式中: $M_{ij}^F, N_{ij}^F, V_{ij}^F$ 及 $M_{ij}', N_{ij}', V_{ij}'$ 分别为第 s 个荷载工况和第 j 个单位虚荷载下第 i 个控制截面所在杆件的弯矩、轴力、剪力; M_{ij}, N_{ij}, V_{ij} 分别为第 s 个荷载工况下第 i 个控制截面的弯矩、轴力、剪力; σ_i^L, σ_i^U 分别为在第 s 个荷载工况下第 i 个控制截面的正应力、剪应力; τ_i^L, τ_i^U 分别为杆件容许剪应力; σ_i^L, σ_i^U 分别为第 i 个控制截面所在杆件的容许压应力、容许拉应力; u_j^a 为第 j 个位移控制点的最大允许变形; P 为荷载工况总数; k_j 为剪应力分布不均匀的修正系数; E_j, G_j, L_j, ρ_j 分别为第 i 个杆件的弹性模量、剪切弹性模量、长度、密度; A_i, I_i, S_i 为第 i 个控制截面所在杆件的截面面积、截面惯性矩、截面抵抗矩; A_i^L, I_i^L, S_i^L 为截面尺寸控制值,即第 i 个控制截面所在杆件的最小截面面积、最小截面惯性矩、最小截面抵抗矩.式中内力符号规定为:弯矩、剪力

收稿日期: 2002-03-12.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59878006);北京市自然科学基金资助项目(8992003).

作者简介: 滕海文(1974-),女,讲师,博士.

以使杆件隔离体产生顺时针方向转者为正,轴力以拉力为正。

2 数学模型的简化和替代

2.1 约束条件的简化

$$\text{令 } A'_{M_i} = \max (S_i^L, |M_{i2} / \sigma_i^a|), A'_{V_i} = \max (A_i^L, |V_{i2} / \tau_i^a|), A'_{N_i} = \max (A_i^L, |N_{i2} / \sigma_i^a|) \quad (4)$$

式中: σ_i^a 为第 i 个控制截面的容许应力,根据截面弯矩相对应的控制容许应力值分别取 σ_i^L 或 σ_i^U ,根据截面轴力正负号分别取相对应的 σ_i^L 或 σ_i^U ; τ_i^a 为第 i 个控制截面的容许剪应力,根据截面剪力正负号分别取对应的 τ_i^L 或 τ_i^U 。

$$C_{ij1} = \frac{1}{E_i u_i^a} \int_{L_i} M_{i2}^E M_{ij}^E dL, C_{ij2} = \frac{N_{i2}^E N_{ij}^E L_i}{E_i u_i^a} + \frac{k_i}{G_i u_i^a} \int_{L_i} V_{i2}^E V_{ij}^E dL_i \quad (5)$$

一般情况下,杆件的截面面积 A 和截面抵抗矩 S 与截面惯性矩 I 之间有 $A = aI^b, S = \alpha I^b$ 的函数关系,将多个设计变量化为一个设计变量,则下式成立:

$$A'_{M_i} = (A'_{M_i} / \alpha I_i^b) I_i, A'_{N_i} = (A'_{N_i} / a I_i^b) I_i, A'_{V_i} = (A'_{V_i} / a I_i^b) I_i, C'_{ij2} = (C_{ij2} / \alpha I_i^b) I_i \quad (6)$$

同时,为简化公式,令 $C_{ijS} = C_{ij1} + C'_{ij2}, A_{MNS} = A'_{M_i} + A'_{N_i}$ 。

2.2 设计变量 I_i 的布尔(0-1)变量表示

由于设计变量 I_i 是从离散集合 X 中的元素 X_1, X_2, \dots, X_Q 中选取的,则 I_i, I_i^{-1}, I_i^b 用布尔(0-1)变量 δ_{iq} 分别表示为

$$I_i = \sum_{q=1}^Q X_q \delta_{iq}, I_i^{-1} = \sum_{q=1}^Q X_q^{-1} \delta_{iq}, I_i^b = \sum_{q=1}^Q X_q^b \delta_{iq} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

可以证明,下述两个条件等价^[3]。

$$\text{条件 1: } \delta_{iq} \in \{0, 1\} \text{ 同时 } \sum_{q=1}^Q \delta_{iq} = 1; \text{ 条件 2: } \sum_{q=1}^Q \delta_{iq} = 1, \sum_{q=1}^Q \delta_{iq}^2 = 1 \text{ 且 } \delta_{iq} \geq 0$$

这样,约束(1)~(3)最终简化为

$$g_j(\delta_{iq}) = \sum_{i=1}^n C_{ijS} \sum_{q=1}^Q X_q^{-1} \delta_{iq} - 1 \leq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m \times P) \quad (8)$$

$$g_{\sigma_i}(\delta_{iq}) = A_{MNS} \sum_{q=1}^Q X_q^{-1} \delta_{iq} - 1 \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

$$g_{\tau_i}(\delta_{iq}) = A'_{V_i} \sum_{q=1}^Q X_q^{-1} \delta_{iq} - 1 \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

2.3 代理约束的应用

引入替代乘子 $\bar{\lambda}$ 及代理约束,将多个不等式约束简化成一个等式约束 $\delta_i(\delta_{iq})$,即

$$g_i(\delta_{iq}) = \sum_{j=1}^{m \times P} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n C_{ijS} \sum_{q=1}^Q \delta_{iq} X_q^{-1} - 1 \right) + \sum_{i=1}^n \lambda_{m \times P + i} \left(A_{MNS} \sum_{q=1}^Q \delta_{iq} X_q^{-1} - 1 \right) + \sum_{i=1}^n \lambda_{m \times P + n + i} \left(A'_{V_i} \sum_{q=1}^Q \delta_{iq} X_q^{-1} - 1 \right) \quad (11)$$

由等价条件将离散变量框架优化设计等价地化为连续变量框架优化设计,可以得到离散变量框架优化的连续化模型。寻求连续变量 δ_{iq} ,使

$$m = \sum_{i=1}^n a p_i L_i \sum_{q=1}^Q X_q^b \delta_{iq} \rightarrow \min \quad (i = 1, 2, \dots, n; q = 1, 2, \dots, Q) \quad (12)$$

满足约束

$$g_i(\delta_{iq}) = 0 \tag{13}$$

$$\sum_{q=1}^Q \delta_{iq} - 1 = 0, \sum_{q=1}^Q \delta_{iq}^2 - 1 = 0, \delta_{iq} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; q = 1, 2, \dots, Q) \tag{14}$$

式(11)中的替代乘子 $\bar{\lambda} \geq 0$ 且满足归一条件 $\sum_{j=1}^{m \times P + 2n} \lambda_j = 1$ 。此时，上式中的 δ_{iq} 已经是连续变量，不再是布尔(0-1)变量。于是，每对应一组替代乘子 $\bar{\lambda}$ ，就能求解上述模型获得相应的最优设计，求解 $\bar{\lambda}$ 的问题就转化为求解最优替代乘子 $\bar{\lambda}^*$ 的分布问题。

3 数学模型的求解

首先采用 Lagrange 乘子法对模型式(12)~(14)进行结构相优化，得

$$\alpha_0 = (m - \sum_{i=1}^n m_i) / (\sum_{i=1}^n G_i - 1) \tag{15}$$

式中： α_0 是引入的 Lagrange 乘子； $G_i = (\sum_{j=1}^{m \times P} \lambda_j C_{ijs} + \lambda_{m \times P + i} A_{MNS} + \lambda_{m \times P + n + i} A_{Vi}^r) \sum_{q=1}^Q X_q^{-1}$ ， $m_i = \sum_{q=1}^Q m_{iq} = \alpha p_i L_i \sum_{q=1}^Q X_q^a$ ； $m = \sum_{i=1}^n \alpha p_i L_i I_i^b$ 。

再采用最大熵准则进行乘子相优化，可以得出替代乘子 $\bar{\lambda}$ 的最优分布为^[3]

$$\lambda_k = \exp[P' g_k(\delta_{iq})] / \sum_{k=1}^{m \times P + 2n} \exp[P' g_k(\delta_{iq})] \tag{16}$$

其中

$$g_k(\delta_{iq}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n C_{ijs} \sum_{q=1}^Q X_q^{-1} \delta_{iq} - 1 \\ A_{MNS} \sum_{q=1}^Q X_q^{-1} \delta_{iq} - 1 \\ A_{Vi}^r \sum_{q=1}^Q X_q^{-1} \delta_{iq} - 1 \end{cases} \tag{17}$$

式中： P' 是一个随迭代循环逐渐增加的正数。

这样，离散变量框架结构最大熵两相优化设计过程为：首先对离散域 X 中的初始离散设计方案分析求出连续最优解 \bar{I}_i ，确定在离散域 X 中的上、下限并用 0-1 变量 δ_{iq} 表示 \bar{I}_i ；对这个连续最优解 \bar{I}_i 进行力学分析，求出在设计点处的约束函数 $g_k(\delta_{iq})$ ，进行乘子相优化，根据式(16)求得相应的替代乘子 λ_k 的值；然后由式(15)计算出 α_0 的值，进行结构相优化，通过比较 $(m_{i1} + \alpha_0 G_{i1})$ 与 $(m_{i2} + \alpha_0 G_{i2})$ 的大小，判断变量 δ_{i1} 与 δ_{i2} 是 0 或 1。若 $(m_{i1} + \alpha_0 G_{i1}) > (m_{i2} + \alpha_0 G_{i2})$ ，则 $\delta_{i1} = 1, \delta_{i2} = 0$ ；若 $(m_{i2} + \alpha_0 G_{i2}) > (m_{i1} + \alpha_0 G_{i1})$ ，则 $\delta_{i1} = 0, \delta_{i2} = 1$ 。继而由式 $I_i = \sum_{q=1}^Q X_q \delta_{iq}$ 及 $m = \sum_{i=1}^n \alpha p_i L_i I_i^b$ 分别求出离散解 I_i 和目标函数 m 。若本次迭代的离散解 I_i 与上次的结果相同，则认为收敛，直接输出优化结果；否则，令新的 I_i 为初始方案继续进行迭代循环，直至收敛。

4 算例^[4,5]

例 门式钢框架如图 1 所示，(I)、(II)、(III)分别代表 3 种荷载工况，①、②、③分别代表杆件号。材料弹性模量 $E = 206.84 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 7857.08 \text{ kg/m}^3$ ，容许应力 $[\sigma] = 163.82 \text{ MPa}$ 。杆件截面几何关系为 $A = 0.58 I^{0.5}$ ， $S = 0.58 I^{0.75}$ 。节点水平位移上限为 0.0127 m ，框架中每个杆件的尺寸下限为 $I_i^1 = 4.16 \times 10^{-7} \text{ m}^2$ (本文已将原例单位换算为国际单位)。离散域为 $I(29 \ 136.200, 33 \ 298.510, 37 \ 460.830)$ 。

54 110.080, 58 272.400, 62 434.710), cm^4 . 优化结果比较如表 1 所示.

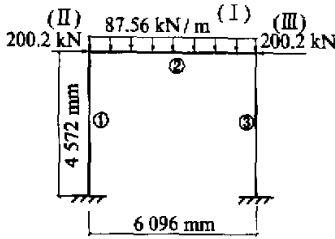


图1 门式框架

表1 优化结果比较

杆件号	初始值 I/cm^4	本文方法离散解			文献[4]离散解
		I/cm^4	σ_{\max}/MPa	最大位移/ mm	I/cm^4
1	66 597.0	58 272.400	134.512		58 272.400
2	66 597.0	33 298.510	156.223	12.291	33 298.510
3	66 597.0	58 272.400	134.512		58 272.400

注: 本文方法迭代结果总质量为1 511.50 kg, 迭代次数为2次.

5 结束语

对可以简化为杆件体系的框架结构, 基于最大熵的离散变量两相优化设计方法具有公式简单、迭代次数少、收敛速度快和易于程序化的特点. 这种方法在不能简化为杆件体系的复杂结构中的应用问题, 尚需进一步研究.

参考文献:

- [1] TEMPLEMAN A B, LI X S. A maximum entropy approach to constrained non-linear programming[J]. Eng Opt, 1987, 12(3): 36-46.
- [2] 李兴斯. 结构优化设计的最大熵方法[J]. 计算结构力学及其应用, 1989(2): 191-205.
- [3] 霍达, 王志忠, 王东炜. 工程结构设计的两相优化技术[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993. 181-224.
- [4] 柴山. 一类(0, 1)规划问题的定界组和算法及其在离散变量结构优化设计中的应用[J]. 工程力学, 1995(1): 81-91.
- [5] 王光远, 董明耀. 结构优化设计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987. 76-79.

Two-Stage Frame Structure Optimum Design with Discrete Variables Based on Maximum Entropy

TENG Hai-wen, HUO Da

(College of Architecture and Civil Engineering, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China)

Abstract: Because the present algorithm is difficult even unable to solve the problem of structural optimization design of discrete variables, based on the thinking of two-stage optimization, discrete variable and maximum entropy, through introducing additional constraint condition, this problem is equivalently converted to the frame optimization design problem of continuous variables, which can be resolved by carrying out multiple-stage and structure-stage optimization process alternatively. Multiple loading cases and multiple constraints including stress constraints, displacement constraints and dimension constraints are all considered in this paper. Under this condition, the discrete variables frame structures are successfully designed and optimized. Examples show that this algorithm is concise and the iteration is converged rapidly, which can be applied to practical engineering efficiently, especially to the structure optimization of multiple loading cases and multiple constraints.

Key words: maximum entropy; discrete variables; structure optimum design