

# 加权最小范数法在单冗余度机器人容错算法中的应用

黄玉芳, 赵京, 缪萍

(北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院, 北京 100022)

**摘要:** 利用梯度投影法对冗余度机器人进行容错轨迹规划时,常常导致关节速度变化较大,为解决这一问题,将加权最小范数法引入到容错轨迹规划中.理论分析及 BUAA-RR 七自由度机器人的仿真研究结果表明,利用加权最小范数法可以获得更平滑的关节速度,这说明它是一种有效的容错轨迹规划算法.

**关键词:** 容错算法; 梯度投影法; 加权最小范数法

**中图分类号:** TP 242

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0254-0037(2001)04-0426-04

## 0 引言

冗余度机器人由于存在冗余关节,在末端速度一定时,对应的关节速度有无穷多组解.其速度反解公式如下<sup>[1]</sup>:

$$\dot{\theta} = J^+ \cdot \dot{X} + (I - J^+ J) \cdot \dot{\phi} \quad (1)$$

其中:  $J \in R^{n \times n}$ ;  $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$ ;  $I \in R^{n \times n}$  为单位矩阵;  $\dot{\phi} \in R^{n \times 1}$  为任意矢量.

在目前广泛应用的梯度投影法 (gradient projecting method) 中,为了使冗余度机器人获得某个最佳的运动学或动力学性能,它取  $\dot{\phi} = K[\nabla H]$ ,将之代入式(1),得

$$\dot{\theta} = J^+ \cdot \dot{X} + K \cdot (I - J^+ J) \cdot \nabla H \quad (2)$$

其中:  $H$  为性能指标,  $\nabla H = [\partial H / \partial \theta_1, \partial H / \partial \theta_2, \dots, \partial H / \partial \theta_n] \in R^{n \times 1}$  为性能指标梯度,  $K$  为梯度系数.

从式(2)中可以看出,梯度投影法利用关节运动的最小范数解来保持末端的运动规律,而利用性能指标的梯度(即在零空间边界的投影)来实现关节自运动的最优化.由于梯度投影法可以将不同的性能指标比较容易地融合到控制中,所以它已成为实际应用中最为广泛的一种冗余度分解方法.但是,梯度投影法只提供了零空间解来优化关节运动,而零空间解的大小依赖于梯度在零空间上的投影及比例系数  $K$  的大小.这就造成了以下一些缺陷:

1.  $K$  值不好选取,很可能过大或过小.如果  $K$  过大,它会引起振荡;如果  $K$  过小,则只有在投影矢量  $(I - J^+ J) \nabla H$  很大时,才会影响到位形,这可能为时已晚,起不到效果.

2. 因为只是梯度在零空间上的投影被用来决定自运动的大小,梯度投影法忽略了梯度沿雅可比矩阵行空间的信息.如果初始位形靠近一个局部最大位置,而待优化的性能指标要最小化;或者情况正好相反,则投影  $(I - J^+ J) \nabla H$  非常小,结果关节轨迹就接近于最小范数解,达不到优化(容错)效果.

3. 如果  $K$  值很大,它会对冗余度机器人形成很强的约束,使位形接近于最优位置,而这并非是十分必要的.所以  $K$  取为一固定值时,容易导致过分的和不必要的运动,限制了机器人的冗余度能力在其他任务如避障中的运用;

收稿日期: 2000-12-27.

基金项目: 北京市教育委员会资助项目(00KJ-023).

作者简介: 黄玉芳(1974-),男,硕士;赵京(1961-),男,教授,博士.

4. 在研究容错问题中, 性能指标取为  $\sum_{i=1}^n a_i \omega_i$ , 如果采用梯度投影法

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{X} + K(I - J^+ J) \nabla H \quad (3)$$

其中  $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_6, \dot{\theta}_7]^T$ . 将式(3)展开成各个关节的表达式, 得到

$$\dot{\theta}_i = (JDX)_i + K(NDH)_i \quad (4)$$

其中  $(JDX)_i$  和  $(NDH)_i$  分别为式(3)中右边第一项和第二项各自乘积对关节  $i$  的分量. 从实际仿真中可以看出各个关节的  $(JDX)_i / (NDH)_i$  值相差很大, 如果  $K$  取固定的值, 则很容易出现顾此失彼的局面, 无法兼顾各个关节的要求.

综合上述, 有必要采用一种有别于梯度投影法的优化方法. 这里, 本文将加权最小范数法 (Weighted least-norm solution) 引入到冗余度机器人的容错算法中.

## 1 加权最小范数法在容错算法中的应用

加权最小范数法最初是由 Whitney 提出用来进行冗余度分解的方法, 在这里将它应用到冗余度机器人的容错算法中.

加权最小范数法的基本思想是在最小范数解的基础上引入加权矩阵. 当关节的运动使冗余度机器人的性能指标有下降的趋势时, 通过增大加权系数, 对之加以惩罚, 使关节速度降低直至停止, 从而使机器人能够较好地完成任务<sup>[3]</sup>, 本文简单介绍一下加权最小范数法.

冗余度机器人的运动学方程为

$$\dot{X} = J\dot{\theta} \quad (5)$$

我们定义加权的关节速度

$$\dot{\theta}_w = W^{1/2} \dot{\theta} \quad (6)$$

加权的雅可比矩阵

$$J_w = JW^{-1/2} \quad (7)$$

其中  $W \in R^{n \times n}$  是对称的、正定的加权矩阵. 为方便起见, 一般情况下, 它被取为对角矩阵.

将式(6)、(7)代入式(5), 得到

$$\dot{X} = J_w \dot{\theta}_w \quad (8)$$

式(8)的最小范数解为

$$\dot{\theta}_w = J_w^+ \dot{X} \quad (9)$$

将式(6)代入式(9), 可以得到式(5)的加权最小范数解为

$$\dot{\theta}_{wLN} = W^{-1/2} \cdot \dot{\theta}_w = W^{-1/2} J_w^+ \dot{X} \quad (10)$$

而  $J_w^+ = (J \cdot W^{-1/2})^+ = W^{-1/2} \cdot J^T \cdot (J \cdot W^{-1} \cdot J^T)^{-1}$ , 代入上式, 得到

$$\dot{\theta}_{wLN} = W^{-1} J^T (JW^{-1} J^T)^{-1} \dot{X} \quad (11)$$

其中, 定义加权矩阵  $W$  为  $n$  阶对角矩阵:

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & & & 0 \\ & W_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & W_n \end{bmatrix}$$

加权最小范数法的优点是能够根据冗余度机器人各关节的运动采取适度的惩罚, 惩罚的权系数不仅是变化的, 而且各个关节的权系数也可以各不相同. 这一优点使加权最小范数法能较好地解决梯度投影法中  $K$  值选取所带来的一些缺陷, 特别是能解决各个关节的  $(JDX)_i / (NDH)_i$  值相差很大的问题. 因此加权最小范数法是比较适用于冗余度机器人容错算法的一种轨迹规划方法.

具体到研究的容错问题时, 容错指标取为综合关节可操作度<sup>[2]</sup>, 即

$$H = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \omega_i = f(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7) \tag{12}$$

轨迹规划的目标是使性能指标  $H$  增大。由数学理论可知, 如果  $dH/dt > 0$ , 则  $H$  将增加; 如果  $dH/dt < 0$ , 则  $H$  将减小。而  $dH/dt = \partial H/\partial \theta_1 \cdot d\theta_1/dt + \dots + \partial H/\partial \theta_7 \cdot d\theta_7/dt$

所以, 如果  $(\partial H/\partial \theta_i) \cdot (d\theta_i/dt) < 0$ , 则说明关节  $i$  的运动有使  $H$  减小的趋势, 应加以惩罚; 反之, 则不必加以惩罚。如果在某时刻  $\omega$  较大, 说明此时冗余度机器人还具有一定的灵活性, 这时, 按  $(\partial H/\partial \theta_i) \cdot (d\theta_i/dt) < 0$  的判断标准进行惩罚时, 没必要惩罚得太大。据此, 确定加权矩阵  $W$  的各个元素  $W_i$  如下:

$$W_i = \begin{cases} 1 + b \cdot (1/\omega_i) \cdot |\partial H/\partial \theta_i| & \text{当 } (\partial H/\partial \theta_i) \cdot (d\theta_i/dt) < 0 \text{ 时,} \\ 1 & \text{当 } (\partial H/\partial \theta_i) \cdot (d\theta_i/dt) \geq 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

式中系数  $b$  调节  $\omega_i$  与  $\partial H/\partial \theta_i$  之间单位和数量级的不同。

## 2 实验仿真

下面以图 1 所示的 BUAA-RR 七自由度机器人为例来进行仿真。仿真时取: 末端操作器的运动规律  $\dot{X} = [0, \pi R \sin \pi t, -\pi R \cos \pi t, 0, 0, 0]^T$ ; 仿真时间  $T = 4.0$  s; 采样周期为  $dt = 0.02$  s; 分别假定单个关节  $i$  发生故障, 发生故障的时刻为  $T_i = 2.0$  s; 机器人的初始位形  $\theta_0 = [20, -50, 10, -30, 0, 30, 0]^T$  ( $^\circ$ ); 末端轨迹圆的半径  $R$  为 50 mm。

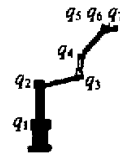


图1 BUAA-RR七自由度机器人

容错指标取为综合关节可操作度  $\sum_{i=1}^n a_i \omega_i$ , 其中各关节的加权系数

$a_i$  均为 1。分别采用加权最小范数法 (WLN) 和梯度投影法 (GPM) 进行仿真, 结果如图 2、图 3 所示。从图中可以看出: 采用 WLN 法进行规划, BUAA-RR 机器人在关节 1、2、3 发生故障并锁定后, 仍然能够完成任务; 而采用 GPM 法进行规划, BUAA-RR 机器人在关节 2 发生故障并锁定后, 不能继续完成任务。再进一步对比采用两种不同方法进行仿真 (关节 2 故障) 时各关节速度的变化规律 (如图 4、图 5 所示, 其中, 线 1、线 2、线 3、线 4 分别为关节 1、关节 2、关节 3、关节 4 的速度曲线。), 可以看出: 在发生故障前, 对同一种性能指标 (综合关节可操作度) 进行优化, 采用 WLN 法得到的关节速度曲线毛刺小, 变化比较平缓; 而采用 GPM 法得到的关节速度曲线毛刺大, 变化也比较剧烈。所以在冗余度机器人的容错算法中, 更适宜采用加权最小范数法 (WLN)。

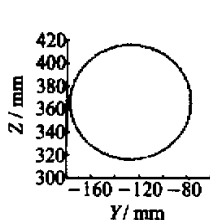


图2 采用WLN法关节2故障的位移曲线

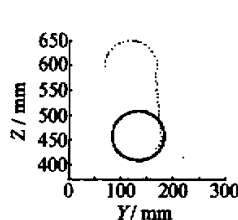


图3 采用GPM法关节2故障的位移曲线

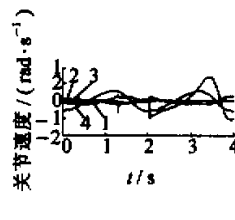


图4 采用WLN法关节2故障的关节速度

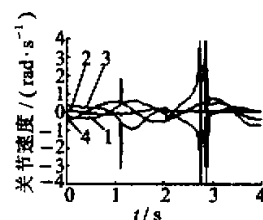


图5 采用GPM法关节2故障的关节速度

### 参考文献:

[1] 熊有伦. 机器人学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.  
 [2] 黄玉芳. 冗余度机器人运动学容错算法研究[D]. 北京: 北京工业大学, 1999.  
 [3] CHAN Tan Fung, DUBEY R V. A weighted least-norm solution based scheme for avoiding joint-limits for redundant joint manipulators[A]. Proc of the IEEE Int Couf on Robotics and Automation Atlanta GA[C]. Los Alamitos CA: IEEE Computer Society, 1993. 395-401.

## Application of Weighted Least-Norm Solution to Fault-Tolerance Algorithm of Single Redundant Manipulators

HUANG Yu-fang, ZHAO Jing, MIAO Ping

( College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology,

Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China )

**Abstract:** Gradient Projection Method always results in great variations in joint velocity when it is used for fault tolerant trajectory planning of redundant robots. To solve the problem, this paper introduces Weighted Least Norm Method into fault tolerant trajectory planning. Theoretical analysis and simulation research on BUAA-RR redundant robot show that using Weighted Least Norm Method can obtain more smooth joint velocity, which concludes that it is a effective fault tolerant trajectory planning algorithm.

**Key words:** fault-tolerant algorithm; gradient projection method; weighted least-norm solution

---

上接第421页

## Application of ELID Precision Mirror Surface Grinding Technology

GUAN Jia-liang, FAN Jin-wei, MA Chun-min

( College of Mechanics Engineering & Applied Electronics Technology,

Beijing Polytechnic University, Beijing 100022, China )

**Abstract:** With the ELID grinding device developed of the authors' own accord, such materials hard to process as carbide alloy, engineering ceramic and high-speed steel are precisely ground. And the surface roughness  $R_a$  amounts to  $0.003 \sim 0.025 \mu\text{m}$  so as to realize the application of ELID grinding technology to the plane, internal and external precision mirror surface grinding.

**Key words:** ELID grinding; plane; internal and external precision mirror surface grinding; materials hard to process; surface roughness