第22卷 第2期 北京工业大学学报 Vol.22 No.2
1996年6月 JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY Jun. 1996

关于模糊常矩阵的一个充分必要条件*

胡京兴 王 强
（北京工业大学应用数学系，100022）

摘 要 对模糊矩阵中一些已有的结果进行了改进，在原只有充分条件的基础上，给出了充分必要条件及其一些推论，并对模糊常矩阵的计算给出了一个完整的结果.

关键词 模糊矩阵，模糊常矩阵，自反矩阵
分类号 O159

模糊数学是本世纪60年代兴起的一门新兴的数学学科，随着模糊数学理论的发展和不断完善，模糊数学在实际问题上的应用越来越广泛．模糊矩阵是模糊数学中表示模糊关系的矩阵，它的运算规则是依照模糊代数 $L<0,\ 1,\ \vee,\ \wedge>$ 中的运算来定义的．模糊矩阵理论是模糊数学理论中很重要的部分．本文对模糊矩阵中模糊常矩阵的计算给出了完整的结果．

定义 1 设 $A=(a_{ij})$ 为一 $m\times p$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 为一 $p\times n$ 矩阵

$\forall 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant p$，$a_{ij}$ 是模糊代数 $L<0,\ 1,\ \vee,\ \wedge>$ 中的元素

$\forall 1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant n$，$b_{ij}$ 是模糊代数 $L<0,\ 1,\ \vee,\ \wedge>$ 中的元素

并且 A 与 B 的乘积定义为 $AB=(c_{ij})$ 为一 $m\times n$ 矩阵，其中

$$C_{ij}=\max_{1\leqslant k\leqslant p}\{\min(a_{ik},\ b_{ij})\}$$

则称矩阵 A 与 B 为模糊矩阵

定义 2 设 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 为两个 $m\times n$ 模糊矩阵，λ 为常数，且 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$．则

(1) 若 $\forall 1\leqslant i\leqslant m,\ \forall 1\leqslant j\leqslant n$．都有 $a_{ij}=b_{ij}$，则 $A=B$.

(2) 若 $\forall 1\leqslant i\leqslant m,\ \forall 1\leqslant j\leqslant n$．都有 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$，则 $A\geqslant B$.

(3) $A\wedge B=(c_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 模糊矩阵，其中

$$c_{ij}=\min(a_{ik},\ b_{kj})$$

(4) $\lambda A=(c_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 模糊矩阵，其中

$$c_{ij}=\lambda a_{ij}$$

定义 3 设 A 为一 $n\times n$ 模糊矩阵，且满足

(1) $a_{ii}=1,\ \forall 1\leqslant i\leqslant n$.

则称 A 为自反矩阵．

收稿日期：1995－04－18
*北京市青年科技骨干培养基金资助项目

若 A 满足(1)，且同时满足

(2) $a_{ij}=a_{ji}$, $\forall 1\leqslant i, j\leqslant n$.

(3) $A^2\leqslant A$

则称 A 为相似矩阵

定义 4 设 A 为一 $m\times n$ 模糊矩阵，如果 A 的所有行都是相同的．即

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

则称 A 为模糊常矩阵，若模糊矩阵的每个元素都是 1，则称为全矩阵，记作 U.

文献 1 讨论了一个模糊常矩阵 A 与任一模糊矩阵 B 的乘积 AB 是模糊常矩阵的充分条件．原作者给出下面的结果．

命题 1 如果 A 是一 $n\times n$ 模糊常矩阵，则对于任一 $n\times n$ 模糊矩阵 B, AB 是模糊常矩阵．

命题 2 设 $A=(a_{ij})$ 是一 $n\times n$ 模糊常矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $n\times n$ 模糊矩阵，如果对于所有的 i.

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}(b_{ij})\geqslant a_{ij}$$

则 $BA=A$.

本文讨论的是 BA 为模糊常矩阵的充分必要条件，得到下面的结果．

定理 设 $A=(a_{ij})$ 为一 $p\times n$ 模糊常矩阵，$B=(b_{ij})$ 为一 $m\times p$ 模糊矩阵，则 BA 是模糊常矩阵的充分必要条件是:

(1) $\forall i=1, 2, \cdots, m$, $\max_{1\leqslant k\leqslant p}(b_{ik})=\alpha$，其中 α 为常数．

或

(2) $\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{\max_{1\leqslant k\leqslant p}(b_{ik})\}\geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}(a_j)$

成立．

证明：设 $BA=(c_{ij})$，则 $\forall 1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$

$$c_{ij}=\max_{1\leqslant k\leqslant p}\{\min(b_{ik}, a_{kj})\}$$

$$=\max_{1\leqslant k\leqslant p}\{\min(b_{ik}, a_j)\}$$

$$=\min\{a_j, \max_{1\leqslant k\leqslant p}(b_{ik})\}$$

$$=\min\{a_j, B_i\}$$

其中

$$B_i\triangleq\max_{1\leqslant k\leqslant p}\{b_{ik}\}$$

充分性 若(1)成立，即 $\forall i=1, 2, \cdots, m$, $B_i=\alpha$. 其中 α 为常数，则

$c_{ij}=\min\{a_j, \alpha\}$ 与 i 无关，

因此，BA 是模糊常矩阵.

若(2)成立，即

$$\min_{1\leq i\leq m}\{B_i\}\geq\max_{1\leq j\leq n}\{a_j\}$$

则 $\forall 1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$, $B_i\geq a_j$.

因此 $c_{ij}=\min\{a_j, B_i\}=a_j$ 与 i 无关，所以，BA 是模糊常矩阵.

必要性 设 $BA=(c_{ij})$ 是模糊常矩阵.

若(1)不成立，即 $i=1, 2, \cdots, m$, B_i 不是一个常数. 设

$$a_{j_0}=\max_{1\leq j\leq n}\{a_j\},\ B_{i_0}=\min_{1\leq i\leq m}\{B_i\},\ B_{i_1}=\max_{1\leq i\leq m}\{B_i\}$$

则 $B_{i_0}<B_{i_1}$ 由 BA 是模糊常矩阵可得：$c_{i_0j_0}=c_{i_1j_0}$ 即

$$\min\{a_{j_0}, B_{i_0}\}=\min\{a_{j_0}, B_{i_1}\}$$

若

$$\min_{1\leq i\leq m}\{\max_{1\leq k\leq p}(b_{ik})\}<\max_{1\leq j\leq n}\{a_j\}$$

即 $B_{i_0}<a_{j_0}$ 则

$$\min\{a_{j_0}, B_{i_0}\}=B_{i_0}$$

而

$$\min\{a_{j_0}, B_{i_1}\}=a_{j_0} \text{ 或 } B_{i_1}$$

这样，由 $a_{j_0}>B_{i_1}$, $B_{i_1}>B_{i_0}$ 可得

$$\min\{a_{j_0}, B_{i_0}\}<\min\{a_{j_0}, B_{i_1}\}$$

这与 $c_{i_0j_0}=c_{i_1j_0}$ 相矛盾. 因此 $B_{i_0}\geq a_{j_0}$ 即

$$\min_{1\leq i\leq m}\{\max_{1\leq k\leq p}(b_{ik})\}\geq\max_{1\leq j\leq n}\{a_j\}$$

证毕.

由本定理易得下面的推论：

推论 1 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 模糊常矩阵，$B=(b_{ij})$ 是一个 $m\times m$ 模糊矩阵，则 $BA=A$ 的充分必要条件是：

$$\min_{1\leq i\leq m}\{\max_{1\leq k\leq m}(b_{ik})\}\geq\max_{1\leq j\leq m}\{a_j)$$

推论 2 若 A 是一个 $m\times n$ 模糊常矩阵，B 是一个 $m\times m$ 自反矩阵，则 $BA=A$.

推论 3 若 A 是一个 $m\times n$ 模糊常矩阵，B 是一个 $m\times m$ 相似矩阵，则 $BA=A$.

推论 4 若 A 是一个 $m\times n$ 模糊常矩阵，U 是一个 $m\times n$ 全矩阵，如果 $m\times m$ 模糊矩阵 $B=(b_{ij})$ 满足：

对于所有 $i=1, 2, \cdots, m$, $\max_{1\leq k\leq m}(b_{ik})=\alpha$ 其中 α 是常数，则

$$BA=(\alpha U)\wedge A$$

参 考 文 献

1 Kandel, Abraham Fuzzy Mathematical Techniques With Applications. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1987. 113 ~ 121

2 汪培庄．模糊集合论及其应用．上海：上海科学技术出版社．1983．54~75

The Necessary and sufficient Conditions for the Product of Two Fuzzy Matrices to be a Constant Fuzzy Matrix

Hu Jingxing　Wang Qiang

(Department of Applied Mathematics, Beijing Polytechnic Universety, 100022)

Abstract Two fuzz matrices B and A, of which A is a constant fuzzy matrix, has been considered. The author has established sufficient condition for B A to be constant in previous paper. The results is improved, and the necessary and sufficient conditions are given for B A to be constant in this paper.

Keywords fuzzy matrix, constant fuzzy matrix, self-reflexive fuzzy matrix