第23卷 第3期 北京工业大学学报 Vol.23 No.3
1997年 9月 JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY Sept. 1997

与 Tychonov 不动点定理相关的几个结果

程 曹 宗
（北京工业大学计算机学院，100044）

摘 要 给出了两个拓扑向量空间的乘积空间上截口定理，极小极大不等式及一个推广的不动点定理. 指出这 3 个形式不同的结果与 Tychonov 不动点定理是相互蕴含的. 并且用截口定理直接证明了多值映射的一个重合定理.

关键词 拓扑向量空间，截口定理，极小极大不等式，不动点定理
分类号 O 189.2

Tychonov 不动点定理是非线性分析中的一个重要结果，纯数学中许多结论可由该定理推出. 在应用数学中该定理也有许多应用. 本文的目的是获得与 Tychonov 不动点定理密切相关的几个结论.

首先我们用 Tychonov 不动点定理证明一个截口定理.

定理 1 设 E 为局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间，F 为 Hausdorff 拓扑向量空间，$X \subset E$ 和 $Y \subset F$ 为非空凸子集，$B \subset A \subset X \times Y$. 设 $K \subset X$ 为非空紧凸集，$\varphi: Y \to K$ 为连续映射，如果

(i) 对任意 $y \in Y$，子集 $\{x \in X: (x, y) \in A\}$ 是闭的；

(ii) 对任意 $x \in X$，子集 $\{y \in Y: (x, y) \notin B\}$ 是凸的或空的；

(iii) 对任意 $y \in Y$，$(\varphi(y), y) \in B$，

那么，存在 $x_0 \in K$ 使

$$\{x_0\} \times Y \subset A.$$

证 对任意 $y \in Y$，记 $A^c(y) = \{x \in X: (x, y) \notin A\}$. 由 (i) 知 $A^c(y)$ 为开集. 假设结论不真. 则对任意 $x \in X$，存在 $y \in Y$ 使 $(x, y) \notin A$，即 $x \in A^c(y)$. 于是 $K \subset \bigcup_{y \in Y} A^c(y)$.

由 K 的紧性及 $A^c(y)$ 为开集知，存在 Y 的有限子集 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 使 $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A^c(y_i)$. 设 P_1，P_2，$\cdots$，P_n 为 K 上从属于 $A^c(y_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的连续单位分解. 即 $P_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 K 上连续函数，当 $x \in K \setminus A^c(y_i)$ 时 $P_i(x) = 0$，且对任意 $x \in K$ 有 $\sum_{i=1}^{n} P_i(x) = 1$. 定义映射 $q: K \to Y$:

收稿日期: 1995—11—17

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) y_i$$

对 $x \in K$ 及任意指标 i，若 $P_i(x) > 0$ 则 $x \in A^c(y_i)$，即 $(x, y_i) \notin A$. 从而 $(x, y_i) \notin B$. 由(ii)知 $(x, \sum_{i=1}^{n} P_i(x) y_i) \notin B$. 即 $(x, q(x)) \notin B$ 对任意 $x \in K$.

考虑映射 $\varphi \circ q: K \to K$. 由于 φ, q 均为连续映射，K 为非空紧凸子集，由 Tychonov 不动点定理知，存在 $x_0 \in K$ 使 $x_0 = \varphi(q(x_0))$. 记 $y_0 = q(x_0)$，则 $x_0 = \varphi(y_0)$. 由(iii)知 $(x_0, y_0) = (\varphi(y_0), y_0) \in B$. 此与 $(x_0, y_0) = (x_0, q(x_0)) \notin B$ 相矛盾. 于是结论成立.

我们知道，在 Ky Fan 关于一个拓扑向量空间的截口定理中，X 为紧凸子集，$X \times X$ 中子集 A 要求包含"对角线"$\Delta = \{(x, x): x \in X\}$. 当基本空间是两个不同的拓扑向量空间时，这一条件如何叙述并加以放宽呢? 定理 1 中用连续映射 φ 的"像曲线"$\{(\varphi(y), y): y \in Y\}$ 代替了这一基本假设. 同时用 X 中存在紧子集 K 代替了 X 本身的紧性. 对于 A 的闭性及凸性是对子集 A，B 分别要求的，这样更有利于下面的定理 2 关于两个泛函的极小极大不等式的建立. 由此可以看出，除空间 E 附加了局部凸性的假设外，定理 1 中其他条件均宽于 Ky Fan 的截口定理，是该定理的自然推广. 至于 E 的局部凸性是证明中用到 Tychonov 不动点定理所要求的. 我们猜想，当 E 不是局部凸时，定理 1 及下述定理 2 也应该是成立的.

定理 2 设 E 为局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间，F 为 Hausdorff 拓扑向量空间，$X \subset E$ 和 $Y \subset F$ 为非空凸子集，$K \subset X$ 为非空紧凸集，$\varphi: Y \to K$ 为连续映射. 设 f, g: $X \times Y \to R$ 满足 $f \leqslant g$. 记 $\sup_{y \in Y} g(\varphi(y), y) = \alpha$. 如果

1) 对任意 $y \in Y$，$f(\cdot, y)$ 在 X 上是下半连续的;

2) 对任意 $x \in X$，$g(x, \cdot)$ 在 Y 上是准凹的.

则存在 $x_0 \in K$ 使

$$f(x_0, y) \leqslant \alpha \quad \text{对任意 } y \in Y$$

特别

$$\inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) \leqslant \sup_{y \in Y} g(\varphi(y), y)$$

证 记

$$A = \{(x, y) \in X \times Y: f(x, y) \leqslant \alpha\}$$
$$B = \{(x, y) \in X \times Y: g(x, y) \leqslant \alpha\}$$

由 $f \leqslant g$ 知 $B \subset A \subset X \times Y$. 根据 $\sup_{y \in Y} g(\varphi(y), y) = \alpha$ 可推出对任意 $y \in Y$ 有 $(\varphi(y), y) \in B$. 又由 1) 知对任意 $y \in Y$，子集 $\{x \in X: (x, y) \in A\}$ 为 X 中闭集. 由 2) 知对任意 $x \in X$，子集 $\{y \in Y: (x, y) \notin B\} = \{y \in Y: g(x, y) > \alpha\}$ 为 Y 中凸集. 故根据定理 1，存在 $x_0 \in K$ 使 $\{x_0\} \times Y \subset A$，即

$$f(x_0, y) \leqslant \alpha \quad \text{对任意 } y \in Y.$$

实际上，定理 2 和定理 1 是等价的，即由定理 2 也可推出定理 1. 令

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in A\\ 1 & (x,y)\notin A\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}0 & (x,y)\in B\\ 1 & (x,y)\notin B\end{cases}$$

由 $B\subset A$ 知 $f\leqslant g$. 由(iii)知 $g(\varphi(y),y)=0$ 对任意 $y\in Y$. 于是 $\alpha=\sup\limits_{y\in Y}g(\varphi(y),y)=0$.

对任意 $y\in Y$ 及任意实数 γ，子集 $\{x\in X: f(x,y)\leqslant\gamma\}$ 或为空集(当 $\gamma<0$)，或为 X(当 $\gamma\geqslant 1$)，或为 $\{x\in X:(x,y)\in A\}$(当 $0\leqslant\gamma<1$). 由(i)知它们均为 X 中闭集. 即 $f(\cdot,y)$ 在 X 上是下半连续的.

对任意 $x\in X$ 及任意实数 γ，子集 $\{y\in Y: g(x,y)>\gamma\}$ 或为空集(当 $\gamma\geqslant 1$)，或为 Y(当 $\gamma<0$)，或为 $\{y\in Y:(x,y)\notin B\}$(当 $0\leqslant\gamma<1$). 由(ii)知它们均为 Y 中凸集或空集. 即 $g(x,\cdot)$ 在 Y 上是准凹的.

于是由定理 2 知，存在 $x_0\in K$ 使 $f(x_0,y)\leqslant 0$ 对任意 $y\in Y$. 即 $\{x_0\}\times Y\subset A$.

不难知道，除 E 附加了局部凸性外，定理 2 是 Ky Fan 不等式的推广. 为了说明由定理 1 可推出 Tychonov 不动点定理，我们首先用定理 1 来证明下述结论.

定理 3 设 E 和 F 都是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间，$X\subset E$ 为非空紧凸集，$Y\subset F$ 为非空凸集. 设 $f,\ g: X\to Y$ 为连续映射，且 g 存在连续的逆映射，则存在 $\bar{x}\in X$ 使 $f(\bar{x})=g(\bar{x})$.

证 设 $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$ 是一族可分的连续半范数，定义了 F 上局部凸拓扑. 对于 $\lambda\in\wedge$，记

$$X_\lambda=\{x\in X: P_\lambda(g(x)-f(x))=0\}$$

首先证明 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$ 有有限交性质. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\wedge$，即证明 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}X_{\lambda_i}\neq\varnothing$，亦即证明 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\{x\in X: P_{\lambda_i}(g(x)-f(x))=0\}\neq\varnothing$，或 $\{x\in X: \sum\limits_{i=1}^{n}P_{\lambda_i}(g(x)-f(x))=0\}\neq\varnothing$. 为此令

$$A=\{(x,y)\in X\times Y: \sum_{i=1}^{n}P_{\lambda_i}(y-f(x))\geqslant\sum_{i=1}^{n}P_{\lambda_i}(g(x)-f(x))\}$$

$$\varphi=g^{-1}: Y\to X,\ B=A$$

显然 φ 连续，且 $(\varphi(y),y)\in A$ 对任意 $y\in Y$.

由 f，g，P_λ 的连续性知，$\{x\in X:(x,y)\in A\}$ 为 X 中闭子集. 以下说明 $\{y\in Y:(x,y)\notin A\}$ 为凸集或空集.

设 $y_j\in Y(j=1,2)$ 使 $(x,y_j)\notin A$，即

$$\sum_{i=1}^{n}P_{\lambda_i}(y_j-f(x))<\sum_{i=1}^{n}P_{\lambda_i}(g(x)-f(x))$$

若 $0<\lambda<1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}P_{\lambda_i}(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2-f(x))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 - \lambda f(x) - (1-\lambda) f(x))$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda P_{\lambda_i}(y_1 - f(x)) + \sum_{i=1}^{n} (1-\lambda) P_{\lambda_i}(y_2 - f(x))$$

$$< \lambda \sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}(g(x) - f(x)) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}(g(x) - f(x))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}(g(x) - f(x))$$

即 $(x, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \notin A$. 此即说明 $\{y \in Y: (x, y) \notin A\}$是凸的. 于是由定理 1 可知，存在 $x_0 \in X$使得 $(x_0, y) \in A$ 对任意 $y \in Y$, 即

$$\sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}(y - f(x_0)) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}(g(x_0) - f(x_0)) \quad \text{对任意} y \in Y.$$

特别取 $y = f(x_0)$，则

$$0 \geqslant \sum_{i=1}^{n} P_{\lambda_i}(g(x_0) - f(x_0)).$$ 从而 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}$. 即 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \wedge}$任意有限交非空.

又由f, g和 P_λ的连续性知，X_λ 为紧子集 X中的闭子集从而也是紧的，所以 $\bigcap_{\lambda \in \wedge} X_\lambda \neq \varnothing$. 设 $\bar{x} \in \bigcap_{\lambda \in \wedge} X_\lambda$，即对任意$\lambda \in \wedge$ 有 $P_\lambda(g(\bar{x}) - f(\bar{x})) = 0$. 于是由 $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \wedge}$的可分性知 $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

若取 $E = F$, $X = Y$, g 为恒同映射，则定理 3 即为著名的 Tychonov 不动点定理.

定理 4 设 E 为局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, $K \subset E$ 为非空紧凸子集. 如果$f: K \to K$为连续映射，则f 至少有一个不动点.

以下讨论多值映射的情形. 首先将定理 1 作一个微小的推广.

定理 1′ 设 E、F、X、Y、B、A、K同定理 1. 设$\varphi: Y \to 2^K$为上半连续映射. 如果满足定理 1 中(i), (ii)及(iii) (对任意 $y \in Y$, 有 $\{(x, y): x \in \varphi(y)\} \subset B$). 则存在 $x_0 \in K$ 使 $\{x_0\} \times Y \subset A$.

证 如定理 1 的证明的前半部分，构造映射 $q: K \to Y$, 则 $(x, q(x)) \notin B$ 对任意 $x \in K$.

考虑复合映射$\varphi \circ q: K \to 2^K$，由于 q 是连续的，φ是上半连续的，于是$\varphi \circ q$ 是上半连续的. 又 K 为非空紧凸集. 由推广的(关于多值映射的)Tychonov 不动点定理知，存在 $x_0 \in K$使 $x_0 \in \varphi(q(x_0))$. 记$y_0 = q(x_0)$, 则 $x_0 \in \varphi(y_0)$. 由(iii)知 $(x_0, y_0) \in \{(x, y_0): x \in \varphi(y_0)\} \subset B$. 此与 $(x_0, y_0) = (x_0, q(x_0)) \notin B$ 矛盾. 故结论成立.

最后用定理 1′来直接证明多值映射的一个重合定理. 它是 Ky Fan 重合定理的一个变体. 为此先回顾一下有关概念[1, 2]. 设 E 为 Hausdorff 拓扑向量空间，E'是 E 上所有的连续线性泛函构成的拓扑向量空间，即 E 的对偶空间. X是 E 的子集，多值映射$f: X \to 2^E$称为 u.d.c. (即 upper demi − continuous，意为上半连续. 但它与通常的上半连续 u.s.c. 在定义上有些差异，故记为 u.d.c.)，如果对任何 $x \in X$及 E 中任何包含$f(x)$的开半 − 空间 H, 都存在 x的一个领域 $O \subset X$, 使得$f(y) \subset H$对一切 $y \in O$. 这里开半 − 空间 H是指对某个非零元$\phi \in E'$和某个实数γ所给出的 E 中子集 $\{x \in E: \phi(x) < \gamma\}$. 另外，$E$ 中两个子集

U，V称为被闭超平面严格分离，如果存在$\phi \in E'$和实数γ使得$\phi(u) < \gamma$对一切$u \in U$和$\phi(v) > \gamma$对一切$v \in V$.

定理5 设E是局部凸Hausdorff拓扑向量空间，$X \subset E$为非空紧凸集. 设f，$g: X \to 2^E$为u.d.c.，如果

(a) 对每个$x \in X$，$f(x)$和$g(x)$均为E中非空闭凸集，且至少有一者为紧集；

(b) 存在上半连续映射$\varphi: E' \to 2^X$使得对任意$\phi \in E'$及$x \in \varphi(\phi)$，存在$u \in f(x)$和$v \in g(x)$满足$\phi(u) \geq \phi(v)$.

那么存在$x_0 \in X$使$f(x_0) \cap g(x_0) \neq \varnothing$.

证 取$K = X$，$Y = E'$，取$B \subset A \subset X \times Y$如下：

$$A = \left\{ (x, \phi) \in X \times Y: \begin{array}{l} \text{不存在实数}\gamma\text{使}\phi(u) < \gamma < \phi(v) \\ \text{对一切}u \in f(x)\text{和}v \in g(x) \end{array} \right\}$$

$$B = \{(x, \phi) \in X \times Y: \text{存在}u \in f(x)\text{和}v \in g(x)\text{满足}\phi(u) \geq \phi(v)\}$$

由(b)式知，对任意$\phi \in Y$有$\{(x, \phi): x \in \varphi(\phi)\} \subset B$. 对任意$x \in X$及任意$\phi_j \in Y(j = 1, 2)$，若$(x, \phi_j) \notin B$，即对一切$u \in f(x)$和$v \in g(x)$均有$\phi_j(u) < \phi_j(v)$. 于是对于任何$0 < \lambda < 1$，$(\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2)(u) < (\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2)(v)$，即$(x, \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2) \notin B$. 因此对任何$x \in X$，子集$\{\phi \in Y: (x, \phi) \notin B\}$是凸的.

以下再说明$\{x \in X: (x, \phi) \in A\}$为闭子集. 为此证明其余集$A^c(\phi) = \{x \in X: (x, \phi) \notin A\} = \{x \in X:$ 对一切$u \in f(x)$和$v \in g(x)$，存在实数γ_x使得$\phi(u) < \gamma_x < \phi(v)\}$为开集. 事实上，对任意$x \in A^c(\phi)$.

$$f(x) \subset H_1 = \{z \in E: \phi(z) < \gamma_x\}$$

$$g(x) \subset H_2 = \{z \in E: \phi(z) > \gamma_x\}$$

因f和g是u.d.c.，所以存在x的邻域O_1和O_2使$f(z) \subset H_1$当$z \in O_1$时，$g(z) \subset H_2$当$z \in O_2$时. 取$O = O_1 \cap O_2$，则当$z \in O$时，对一切$u \in f(z)$和$v \in g(z)$有$\phi(u) < \gamma_x < \phi(v)$，即$O \subset A^c(\phi)$. 于是$A^c(\phi)$为开集.

至此验证了定理1′的条件全部满足. 故存在$x_0 \in X$使$\{x_0\} \times Y \subset A$，即$f(x_0)$和$g(x_0)$不能被任何闭超平面严格分离. 于是由(a)知$f(x_0) \cap g(x_0) \neq \varnothing$.

注 在Ky Fan[1, 2]的重合定理中，相应于(b)的条件为(b′)：对任何$x \in X$和E上任何满足$\phi(x) = \min\limits_{z \in X} \phi(z)$的连续线性泛函$\phi$，存在$u \in f(x)$和$v \in g(x)$满足$\phi(u) \geq \phi(v)$. 这是两个不同的假设. 同时定理5的证明是由我们的截口定理直接给出的.

参 考 文 献

1 Ky Fan. A Survey of Some Results Closely to Related to the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewioz Theorem. In: Game Theory and Applications, New York: Acadcmic Prcss. 1990, 358～370

2 Fan Ky. A Minimax Inequality and Applications, In: Shisha O, eds. Inequalities New York: Academic Press, 1972, 3, 103～113

3 Ha C W. Minimax and Fixed Point Theorems, .Math, Ann, 1908, 248, 73～77

4 Baiocchi C, Capclo A. Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems, New York: Wiley (Interscience), New York, 1984, 199～225

5 Yen C L. A Minimax Inequality and its Applications to Variational Incqualitics, Pacific J Math, 1981, 97(2): 477～481

Some Results Related to the Tychonov's Fixed Point Theorem

Cheng Caozong

(Computer Institute, Beijing Polytechnic University, 100044)

Abstract A section theorem, a minimax inequality and a generalized fixed point theorem where the underlying space is a product space of two topological vector spaces, are given. It is shown that results from the three different form and with Tychonov's fixed point theorem imply with each other. A coincidence theorem on set-valued mapping is directly derived according to the section theorem.

Keywords topological vector space, section theorem, minimax inequality, fixed point theorem