平板式结合面动态建模与参数识别方法

肖毅川,伍良生,马建峰,马淑慧 (北京工业大学机械工程及应用电子技术学院,北京 100124)

摘 要:用有限元法对含有平板式结合面的结构进行分析时,平板本身对结合面层的影响往往会被忽略,误差也由 此产生.针对这种平板结合面刚度的传统计算方法的缺陷进行修正,综合考虑结合面层和结合面板两者的弹性,推 导出平板式结合面的综合单元刚度矩阵.此刚度矩阵能应用于结合面的有限元计算及动态参数识别当中.通过算 例将这种方法与传统方法进行对比验证,前者具有更高的精确度和可靠性.该方法可应用于此类结构的精确建模 与分析,为解决其振动问题提供手段.

Method for Establishing Dynamic Model and Identifying Parameters of Plate-like Joint Interfaces

XIAO Yi-chuan, WU Liang-sheng, MA Jian-feng, MA Shu-hui

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: When FEM is used to analyze the structures that include plate-like joint interfaces, the effect of plates on joint interfaces is often be ignored and defect thus follows. Aiming at the traditional method for calculating the stiffness of plate-like joint, this defect is revised and a comprehensive unit stiffness matrix is deduced. The matrix can be applied to finite element analysis and identities of dynamic characteristic parameters of joint interfaces. By comparing the results of presented method and the traditional method through an example, the former is proven to have higher accuracy and reliability. The presented method can be applied to modeling and analyzing of the similar structure and can be used as a way to solve mechanical vibration issues.

Key words: plate-like joint interface; vibration; finite element method; comprehensive unit stiffness matrix

数控机床的床身、立柱、横梁等大件若是一个整体,那么其结构会具有最好的刚性和抗振能力,但是为了机床本身的加工和运输方便,有时须将大件分成多个部分分别进行加工和运输,然后装配而投入使用.这些部分(零件、组件、部件)之间互相连接形成的表面,称为机械结构结合面.结合面按结合方式一般可分为固定结合面、可移动结合面、半固定结

合面等.结合面的产生势必会对机床的整机性能产 生影响,研究表明^[1-5]:机床上出现的振动问题有 60% 是源自结合面,约30%~50%静刚度以及 60%~80%的动刚度决定于结合面的刚度特性,而 总阻尼值的90%以上来源于结合面的阻尼,不同材 料或者结合状态的结合面在导热性上会有几倍甚至 是十几倍的差距.即一台机床的大件即使设计得看

收稿日期: 2013-12-10

基金项目:国家自然科学基金资助(51105006);国家科技重大专项资助项目(2009ZX04014-036)

作者简介:肖毅川(1985—),男,博士研究生,主要从事机械结构分析与优化方面的研究, E-mail: xiaoyichuan@ hotmail. com

似粗大结实,若对结合面处理不当,整机的刚度也会 结合 受影响.在现代有限元分析计算中,单件机械结构 限力 的动、静态特性分析及优化设计技术不断趋于完善, 但是在计算组合件(由多个零部件组成的结构)时 过道

但是在计算组合件(田多个零部件组成的结构)时 却往往会产生很大的误差,归根结底其原因在于结 合面有限元模型处理不当,如何处理好结合面已经 成为解决整机动态分析优化的关键.

1 结合面的单元刚度矩阵的推导

1979年,日本学者 Yoshimura^[6] 通过对机床结合面的研究提出著名的"吉村允孝法",他提出并验证了一个设想:若平均接触压力相同,则结合面单位面积动态性能参数也是相同的. 当采用吉村允孝法处理平板结合面时,需将结合面处理成一个没有质量但是有刚度阻尼的"弹性层",再通过对单位面积结合面的刚度和阻尼求积分便可以得到实际结合面的刚度和阻尼等参数. 但是,一般在简化的过程中此"弹性层"与上下平板之间弹性的相互影响并没有被考虑到. 以图 1 中的平板结合面为例,其板中心点的垂直刚度 K 和绕 y 轴的扭转刚度 K 分别为

$$K_z = \iint K_n \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{1}$$

$$K_{t} = \iint K_{n} x^{2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \qquad (2)$$

式中*K*_a为该平板结合面的单位面积法向刚度.实际 上,这2个公式在使用时已经假设结合面板为刚性 板,故只能应用于平板刚度远远大于结合面弹性层 刚度的情况.若结合面板是薄板,则式(1)(2)将会 由于未考虑薄板本身弹性以及其与结合面层的相互 影响而引起误差,从而导致分析结果出现偏差不 可用.



图 1 平板结合面 Fig. 1 Plate-like joint interface

本文将综合考虑平板本身弹性以及结合面层的 弹性,推导出平板式结合面的综合单元刚度矩阵,并 通过一则算例比较了该矩阵与常规方法计算出的结 果的不同,并且证明综合单元刚度矩阵对于平板式 结合面建模的准确性以及用于整体结构振动特性有限元分析的重要性.

在测定出结合面的单位面积参数^[7]之后,可通 过这些参数推导出结合面的综合单元刚度和阻尼矩 阵,其中综合单元刚度矩阵的推导如下.

图 1 所示的板状结合面由上板 1 和下板 2 组成,设其厚度分别为 δ_1 和 δ_2 ,故 2 板的弯曲刚度分别为

$$K_{b_1} = \frac{E\delta_1^3}{12(1-\mu^2)}$$
(3)

$$K_{b_2} = \frac{E\delta_2^3}{12(1-\mu^2)}$$
(4)

式中 E、 μ 分别为弹性模量和泊松比.

图 2 为板单元结合面的解析模型.



图 2 板单元的解析模型 Fig. 2 Plate analysis model of the plate

可知,板单元为4节点12自由度,结合面单位 面积刚度 K_a在单元接触区域内为常数,故板单元弯 曲问题的微分方程为

$$K_{b_1} \nabla^2 (\nabla^2 W_1) + K_n (W_1 - W_2) = 0$$
 (5)

$$K_{b_2} \nabla^2 (\nabla^2 W_2) - K_n (W_1 - W_2) = 0$$
 (6)

式中: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; W_1 、和 W_2 分别为板 1 和板 2 中面的挠度函数,为了方便进行有限元法分析求解,可表示为

$$W_1 = W_1'(x, y) + A_1 f_1(x, y)$$
(7)

$$W_2 = W'_2(x,y) + A_2 f_2(x,y)$$
(8)

式中 W'₁(x,y)、W'₂(x,y)分别为上下板按节点位移 表示的挠度函数,是典型弯曲板单元(4 节点 12 自 由度)的挠度函数

$$W_1'(x,y) = N\boldsymbol{q}_1 \tag{9}$$

$$W_2'(x,y) = N\boldsymbol{q}_2 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{q}_{1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{i} & \boldsymbol{\theta}_{xi} & \boldsymbol{\theta}_{yi} & \cdots & \boldsymbol{\theta}_{xl} & \boldsymbol{\theta}_{yl} \end{bmatrix}_{1}^{\mathrm{T}} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{i} & \boldsymbol{\theta}_{xi} & \boldsymbol{\theta}_{yi} & \cdots & \boldsymbol{\theta}_{xl} & \boldsymbol{\theta}_{yl} \end{bmatrix}_{2}^{\mathrm{T}} \quad (12)$$

 $\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & \cdots & N_{12} \end{bmatrix}$ (13)

式中:q是单元节点位移的列矩阵;N是插值函数矩阵,其中N₁等各插值函数元素的具体形式可参照有

限元理论相关文献^[8].

由于结合面单元与其相邻单元位移相容,而其 中f₁(x,y)和f₂(x,y)用于协调考虑薄板本身和结合 面的综合变形,故它们满足在单元边界的位移和转 角为零的条件.将式(7)(8)代入(5)(6)中可以推 导出

$$f_1(x,y) = f_2(x,y)$$
 (14)

$$A_2 = -\frac{K_{b_1}}{K_{b_2}} A_1 \tag{15}$$

$$K_{b_1}A_1 \nabla^2 \left[\nabla^2 f_1(x,y) \right] + K_n A_1 \left(1 + \frac{K_{b_1}}{K_{b_2}} \right) f_1(x,y) = -K_n N \{ q_1 - q_2 \}$$
(16)

式中系数 A_1 可通过伽辽金法求出,将式(16)两边同时乘以 $f_1(x,y)$ 并在板单元全面积的范围内求积分,可得

$$A_1 = \boldsymbol{C} \{ \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 \}$$
(17)

式中C为12阶行矩阵,并且

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{12} \end{bmatrix}$$
(18)
$$C_i = -\frac{K_n}{K_{b_i}} \cdot \frac{\iint N_i(x, y) f_1(x, y) \, dx \, dy}{\iint \left(\nabla^2 \begin{bmatrix} \nabla^2 f_1(x, y) \end{bmatrix} + K_n \frac{K_{b_1} + K_{b_2}}{K_{b_1} K_{b_2}} f_1(x, y) \right\} f_1(x, y) \, dx \, dy}$$
(19)

综上可得,板1和板2的挠度函数为

$$W_1 = Nq_1 + Cf_1(x, y) \{ q_1 - q_2 \}$$
(20)

$$W_{2} = Nq_{2} - \frac{K_{b_{1}}}{K_{b_{2}}}f_{1}(x, y) \{q_{1} - q_{2}\}$$
(21)

根据式(20)(21)并且运用虚功原理,可将考虑 板本身弹性的平板结合面综合单元的力与位移的相 互关系表示为

F = Kq (22)
式中:F和q分别为24阶节点力向量和位移向量;K
为一个24×24阶的综合单元刚度矩阵,并且

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(23)

为了便于进行有限元计算,可将 K 改写成分块 矩阵

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} \end{bmatrix}$$
(24)

式中:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_5 \\ \mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_5 \\ \mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21} = -\mathbf{K}_3 - \mathbf{K}_4 - \mathbf{K}_5 \end{cases}$$
(25)

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_{1} = K_{b_{1}} \iint \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\ \boldsymbol{K}_{2} = K_{b_{2}} \iint \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\ \boldsymbol{K}_{3} = K_{n} \iint \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N} \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\ \boldsymbol{K}_{4} = K_{b_{1}} \left(1 + \frac{K_{b_{1}}}{K_{b_{2}}} \right) \iint \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{D} \mathrm{d} x \mathrm{d} y + \\ K_{n} \left(1 + \frac{K_{b_{1}}}{K_{b_{2}}} \right)^{2} \iint \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} f_{1}^{2} (x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y + \\ K_{n} \left(1 + \frac{K_{b_{1}}}{K_{b_{2}}} \right) \iint (\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}) f_{1} (x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y \\ \boldsymbol{K}_{5} = K_{b_{1}} \iint (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}) \mathrm{d} x \mathrm{d} y \end{cases}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} N \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} N \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \frac{\partial^2 f_1(x, y)}{\partial x^2} \\ \boldsymbol{C} \frac{\partial^2 f_1(x, y)}{\partial y^2} \\ 2\boldsymbol{C} \frac{\partial^2 f_1(x, y)}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}$$
(27)

从式(26)(27)中可以看出, K_1 和 K_2 的具体形 式与上述有限元理论相关文献^[9-11]中所述相同,其 他参数在设定 $f_1(x,y)$ 之后也均可求出.由于前述 $f_1(x,y)$ 应满足在单元边界的位移和转角为0的条 件,故其可由若干个满足此边界条件的函数叠加而 成,设平板的长和宽分别为a、b, 当 $f_1(x,y)$ 取

$$f_1(x,y) = \left(1 + \cos\frac{\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos\frac{\pi y}{b}\right) \quad (28)$$

中的值时,矩阵 C 便可以表示为

$$C = -\frac{K_{a}}{QK_{b_{1}}} [1, h_{b}, -h_{a}, 1, h_{b}, h_{a}, 1, -h_{b}, h_{a}, 1]$$
(29)

其中:

$$h = \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi^2}$$
(30)

$$Q = \frac{2\pi^4}{a^4} + \frac{2\pi^4}{b^4} + \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 + 9K_n \frac{K_{b_1} + K_{b_2}}{K_{b_1}K_{b_2}}$$
(31)

从而

(26)

$$\boldsymbol{K}_{4} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} \tag{33}$$

式中R是常数,并且

$$R = K_{b_1} \left(1 + \frac{K_{b_1}}{K_{b_2}} \right) \frac{\pi^4}{ab} \left(-2 - 3 \frac{b^2}{a^2} \right) - 9K_n ab \left(1 + \frac{K_{b_1}}{K_{b_2}} \right)^2$$
(34)

再根据式(26)可算出 K₁、K₂和 K₃,即得到整个 综合单元刚度矩阵.此综合单元刚度矩阵的具体形 式与传统有限元法建立的刚度矩阵有明显不同,并 且其可应用于有限元计算中,可获得比一般方法更 为准确的整体结构振动特性计算结果.另外,综合 单元阻尼矩阵也可通过类似的方法得到.

2 算例

为了便于对不同方法结果做对比,此处可以用 多种不同的处理方法对同一个试验对象进行有限元 计算和振动试验测试.图 3 是一个材料为 45^{*}钢的 1 500 mm × 120 mm × 200 mm 一次成型的整体横梁, 而图 4 则是一个由 3 个部分组合而成的分段梁,其 尺寸、材料和质量均与整体梁相同,其结合部是焊接 而成的平板结合面,板厚 10 mm.计算过程中的各 参数如下:弹性模量 210 GPa,密度 ρ = 7 800 kg/m³, 泊松比 μ = 0.3,单位面积刚度 2.05 × 10¹² N/m³. 对分段梁整体的有限元计算可采取 4 种方法:

 采用本文所推导的综合单元刚度矩阵,横梁 的弯曲应力状态的矩阵按照式(22)来计算.

2)采用通常的方法,横梁结合面的刚度用式
 (1)来计算.

3) 板单元结合面的焊接结构的处理方法:周围 一圈按铰支边处理,其余部位不接触,亦即 K_a=0.

4) 板单元结合面按照刚性连接,即按照分段梁整体梁来计算, $K_n = \infty$.



图 3 整体梁三维模型 Fig. 3 Model of the the integrated beam

为了更真实地反映计算结果的准确性,还对分 段梁和整体梁分别进行振动试验测试,获取其前几



图 4 分段梁三维模型 Fig. 4 Model of the assembled beam

阶弯曲振动固有频率,图 5~8 中表示的是分段梁和 整体梁(方法 1 和方法 4)的前两阶固有频率振型. 4 种仿真方法的计算结果及 2 个横梁的试验结果如 表 1、2 所示. 从结果可看出,方法 3 对于结合面的 简化过于简单,结果不可靠;方法 4 的 1 阶固有频率 计算结果和测试结果相差只有不到 0.35%,计算方



图 5 方法 1 的 1 阶振型 Fig. 5 1st model by method 1



图 6 方法 4 的 1 阶振型 Fig. 6 1st model by method 4



图 7 方法 1 的 2 阶振型 Fig. 7 2nd model by method 1



图 8 方法 4 的 2 阶振型 Fig. 8 2nd model by method 4

表1 不同方法的固有频率计算结果

 Table 1
 Result of FEA on natural frequency

计算方法		1	2	3	4
固有频率/Hz	1 阶	270. 23	315.66	125.85	358.08
	2 阶	598.81	695.23	334.62	866. 19

表 2 不同方法的固有频率实验结果

 Table 2
 Result of tests on natural frequency

试验对象		分段梁	整体梁
固有频率/Hz	1 阶	279.00	348.65
	2 阶	548.00	890.47

法相对比较准确,但是实际上是对整体梁进行有限 元分析,完全没有考虑结合面对整体结构的影响,两 者1阶固有频率的计算结果相差24.53%,测试结 果相差 19.98%,从侧面反映了结合面本身对整体 结构的影响很大,故方法4的结果不能用于计算分 段梁结构当中:方法2虽然考虑结合面的特性而对 其进行相应的处理,但是平板本身的弹性和其对结 合面层弹性的相互影响都被忽略了,在建立单元刚 度矩阵的时候有不小的误差,其1阶和2阶固有频 率与振动试验结果相差分别是 13.14% 和 26.87%, 而方法1与振动试验所测的结果仅仅分别相差 3.14%和10.73%.由此可见,在对含有平板结合面 的结构进行振动特性计算时,单元刚度矩阵的建立 方法对计算结果是否精确有着重要的影响. 按照本 文推导的综合单元刚度矩阵对平板结合面的刚度等 参数进行计算,其结果与实际情况有着良好的一 致性.

3 结论

 1)对于含有平板式结合面乃至其他各类结合 面的结构而言,结合面对整体结构的力学性能有着 不可忽略的影响,故在机械设计阶段设计合理的结 合面特性或者在结构优化阶段改善现有的结合面特性,不仅可以降低结构的应力水平,而且还能提高结构的抗振性和刚度,让整体结构有着更好的力学性能.

2)该方法综合考虑结合面层和结合面板两者的弹性,在进行有限元建模时较传统方法更能准确体现出真正的结合状态,而通过算例中的对比验证之后表明该方法具有更高的精确性和可靠性.

3)该方法适用于含有平板式结合面的结构的 有限元精确建模与分析当中,为解决其振动问题提 供了有效手段.

参考文献:

- GREENWOOD J A, WILLIAMSON J B P. Contact of nominally flat surfaces [J]. Proceedings of the Royal Society of London: Series A, 1966, 295: 300-319.
- [2] 张学良, 徐格宁, 温淑花. 机械结合面静动态特性研究 回顾及展望[J]. 太原重型机械学院学报, 2002, 23
 (3): 105-110.
 ZHANG Xue-liang, XU Ge-ning, WEN Shu-hua. Review and prospect of the research on the static and dynamic characteristics of machine joint surfaces [J]. Journal of

Taiyuan Heavy Machinery Institute, 2002, 23(3): 105-110. (in Chinese)

- [3] MAO Kuan-min, LI Bin, WU Jun, et al. Stiffness in fluential factors-based dynamic modeling and its parameter identification method of fixed joint sin machine tools [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010, 50(2): 156-164.
- [4] 任树伟,辛锋先,卢天健. 蜂窝层芯夹层板结构振动与 传声特性研究[J]. 力学学报, 2013, 45(3): 45-54.
 REN Shu-wei, XIN Feng-xian, LU Tian-jian.
 Vibroacoustic performance of simply supported honeycomb sandwich panels [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2013, 45(3): 45-54. (in Chinese)
- [5] 赵晓春,李祥宁,李凯,等. 三明治夹层板振动特性与 优化[J]. 中国舰船研究, 2013, 8(4): 50-55.
 ZHAO Xiao-chun, LI Xiang-ning, LI Kai, et al. Analysis and optimization of the vibration characteristics of sandwich plates[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2013, 8 (4): 50-55. (in Chinese)
- [6] YOSHIMURA M. Computer-aided design improvement of machine tool structure incorporating joint dynamics data [J]. Annals of the CIRP, 1979, 28(1): 241-246.
- [7] 肖毅川. 考虑结合面特性的多段梁结构动态特性的研究[D]. 北京:北京工业大学机械工程及应用电子技术学院, 2010.

XIAO Yi-Chuan. Research on dynamic characteristic of the assembled structure of beams considering characteristic of joint [D]. Beijing: College of Mechanical Engineering and Applied Electronics, Beijing University of Technology, 2010. (in Chinese)

[8] 伍良生. 带弹性夹层的层板结构的振动特性研究[J]. 机械工程学报, 1999(1): 82-85.

WU Liang-sheng. Study on vibration behavior of sandwich structure with spring interlayer [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1999(1): 82-85. (in Chinese)

[9] 曾国雄. 弹性矩形薄板振动[M]. 北京: 中国建筑工业 出版社, 1983: 10-12.

(上接第1783页)

[2] 苏雷. 平版印刷机油墨传递特性的仿真分析[D]. 北京: 北京工业大学机械工程与应用电子技术学院, 2013.

SU Lei. Simulation analysis of the ink transferring characteristics of offset printing [D]. College of Mechanical Engineering & Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, 2013. (in Chinese)

- [3] 蔡杰. 墨斗装置[J]. 印刷杂志, 2004(10): 61-63.
 CAI Jie. Ink fountain device [J]. Printing Field, 2004 (10): 61-63. (in Chinese)
- [4] 张阿漫, 戴绍仕. 流固耦合动力学[M]. 北京: 国防工 业出版社, 2011: 9-39.
- [5] 解元玉. 基于 Ansys Workbench 的流固耦合计算研究及 工程应用[D]. 太原:太原理工大学化学化工学院, 2011.

XIE Yuan-yu. FSI calculation of research based on ansys workbench and engineering applications [D]. Taiyuan: College of chemistry and chemical engineering, Taiyuan University of Technology, 2011. (in Chinese)

- [10] 伍良生. 弹性夹层叠形梁结构的力学性能研究[J]. 机械强度, 1999(1): 46-48.
 WU Liang-sheng. Investigation on mechanical properties of fold beams with spring layer [J]. Journal of Mechanical Strength, 1999(1): 46-48. (in Chinese)
- [11] TIAN Hong-liang, LI Bin, LIU Hong-qi, et al. A new method of virtual material hypothesis-based dynamic modeling on fixed joint interface in machine tools [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2011, 51(3): 239-249.

(责任编辑 杨开英)

- [6] ANDERSON J D. 计算流体力学基础及其应用[M]. 吴 颂平,刘赵淼,译. 北京:机械工业出版社,2007:52-60.
- [7] 吴云峰. 双向流固耦合两种计算方法的比较[D]. 天津: 天津大学机械工程学院, 2009.
 WU Yun-feng. The comparison of two coupling approaches on the analysis of two-way fluid-solid interaction [D]. Tianjin: School of Mechanical Engineering, Tianjin University, 2009. (in Chinese)
- [8] 余节约,刘真. 胶印机串墨性能的仿真研究[J]. 包装 工程,2009,30(11):66-72.
 YU Jie-yue, LIU Zhen. Simulation the effects of vibrator oscillation of offset printing [J]. Packing Engineering, 2009,30(11):66-72. (in Chinese)
- [9] SUN Ting, CHU Hong-yan, CAI Li-gang, et al. Numerical simulation of ink flow field on ink fountain roller of offset printing machine [J]. Information Technology Journal, 2013, 12: 2497-2504.

(责任编辑 杨开英)