

# 用大变形壳元数值模拟薄板的深冲成形<sup>†</sup>

蒋和洋

(北京工业大学建筑工程学院, 北京, 100022)

**摘要** 开发了大变形弹塑性壳单元有限元程序. 为了改进增量计算的收敛性, 程序中采用  $C^1$  连续的几何非线性——材料非线性三角形浅壳单元. 为了有效计算广泛存在于薄板成形过程中的接触问题, 提出了混合半逆解法有限元解法计算接触问题. 并给出了若干计算结果, 验证了计算方法的有效性.

**关键词** 深冲成形, 接触, 弹塑性变形

**分类号** O 344.3

## 0 引言

在用于薄板成形过程数值模拟的非线性有限元程序中, 两个最重要的方面是要有高精度的弹塑性大变形壳单元和有效的可靠的接触问题的增量算法. 高精度的壳单元可以加速数值解的收敛性和显著节省计算所需的单元数目. 在本文中, 一个基于广义变分原理<sup>[1, 2]</sup>的高精度大变形几何非线性——材料非线性三角形扁壳单元被采用. 由于该单元具有  $C^1$  连续性而收敛性极佳.

在薄板的深冲成形过程中, 板材的大部分将与冲头和模具接触. 来自冲头和模具的接触力是导致深冲成形的主要动力. 存在于板材和冲头及模具之间的摩擦力也是由接触力和夹具的力引起的. 因此, 在板材深冲成形过程的数值模拟中, 一个有效和可靠的接触问题算法是极为重要的. 一般地讲, 在大变形的过程中, 接触力和单元节点的位移分量是未知的. 但是, 在板材的深冲成形过程中有一些节点的增量位移分量是已知的. 比如, 在冲头底部和模具顶部的有限元节点的垂直位置是已知的. 因此, 可以把这些已知增量节点位移分量从总体增量平衡方程的左边移到右边, 而相应的未知的节点接触力分量从方程的右端移到左边. 这样就得到了一个以某些节点增量位移分量和节点接触力分量为未知数的新的总体平衡方程. 这未知的增量节点位移分量和节点接触力均可从这个修正过的方程中得到.

板材的深冲成形强烈地受到材料性质的影响. 如屈服强度、硬化和各向异性及本构模型等等. 因此, 本文采用了适用于正效各向异性材料的 Hill 屈服准则. 在材料和模具之间还采用了 Coulomb 摩擦定律.

# 1 变分原理和有限元列式

薄壳的最小势能原理可以表述为:

$$\pi_m = \iint_A v(\varepsilon) - w \cdot \bar{F} dA - \int_{\partial A} (\underline{u} \cdot \bar{p} + w \cdot \bar{q} - w_{,n} \cdot \bar{M}_n + w \cdot \bar{M}_{ns, s}) ds - \sum_i w_i \cdot \bar{f}_i \quad (1)$$

其中, 独立变量位移  $\underline{u}$  和  $w$  满足下列变分约束:

$$\begin{aligned} \underline{u} - \bar{u} &= 0, \quad w - \bar{w} = 0 \\ w_{,n} - \bar{w}_{,n} &= 0, \quad w_i - \bar{w}_i = 0 \end{aligned} \quad (\text{边界位移相容条件}) \quad (2)$$

和

$$\begin{aligned} \varepsilon^p - f^p &= 0 \\ \varepsilon^s - f^s &= 0 \quad \text{域内应变位移协调条件} \\ \varepsilon^b - f^b &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} f^p &= (u_{,1} + w/R_1, v_{,2} + w/R_2, u_{,2} + v_{,1})^T \\ f^s &= (w_{,1} - u/R_1, w_{,2} - v/R_2)^T \\ f^b &= (-w_{,11} + u_{,1}/R_1, -w_{,22} + v_{,2}/R_2, -2w_{,12} + u_{,2}/R_1 + v_{,1}/R_2)^T \end{aligned} \quad (4)$$

传统的位移模式板壳有限元是由最小势能原理(1)式导出的. 但是在泛函(1)中单一的位移独立变量 ( $\underline{u}$  和  $w$ ) 不能满足边界  $C^1$  连续性条件(2). 为了改进数值解的收敛性, 就需要用大量的单元并耗费大量机时.

本文所用的壳元是具备  $C^1$  连续性的. 推导这个壳元的途径是放松边界位移协调条件(2)和域内应变位移协调条件(3), 并乘以相应的拉格朗日乘子后并入最小势能原理(1). 然后从这一广义变分原理导出该壳元. 这就是本方法和传统的位移模式壳元的区别.

广义变分原理可以表述为:

$$\pi_g = \pi_m + \pi_a - \pi_b \quad (5)$$

其中,  $\pi_m$  是最小势能原理.

$$\pi_a = \iint_A N : (f^p - \varepsilon^p) + M : (f^b - \varepsilon^b) + N \cdot G \cdot (f^s - \varepsilon^s) ds \quad (6)$$

$$\pi_b = \int_{\partial A} [N_n \cdot (\underline{u} - \bar{u}) + Q_n \cdot (w - \bar{w}) - M_n \cdot (w_{,n} - \bar{w}_{,n})] dl +$$

$$\sum_i (w_i - \bar{w}_i) M_{ns} |_{i} \quad (7)$$

其中,  $N, M, N \cdot G, N_n, Q_n, M_n$  和  $M_{ns}|_i$  是拉格朗日乘子. 这些乘子可由将泛函(5)对独立

变量  $\tilde{u}$ ,  $w$ ,  $\varepsilon^p$ ,  $\varepsilon^s$ ,  $\varepsilon^b$  和应力  $N$ , 弯矩  $M$  变分而取得.

有限元列式可由取泛函(5)对单元节点位移参数  $q$  的导数为零导出:

$$\pi_{s, q} = \pi_{m, q} + \pi_{a, q} - \pi_{b, q} \quad (8)$$

单元刚度矩阵由(8)式右端第一项

$$\pi_{m, q} = 0 \quad (9)$$

求得.

单元的应变位移矩阵 ( $B^p$ ,  $B^a$  和  $B^b$ ) 的离散表达式可由(8)式右边第二项

$$\pi_{a, q} = 0 \quad (10)$$

求得.

将(9)和(10)式代入(8)式, 得

$$\pi_{b, q} = 0 \quad (11)$$

(11)式可由采用单元间边界插值函数  $\tilde{u}$  和  $w$  及  $w_{,n}$  而自动满足:

平面刚度矩阵  $K^p$ 、弯曲刚度矩阵  $K^b$  和初应力刚度矩阵  $K^s$  可由(9)式得到:

$$K^p = \int_A \int (B^p)^T \cdot D^p \cdot B^p ds \quad (12)$$

$$K^b = \int_A \int (B^b)^T \cdot D^b \cdot B^b ds \quad (13)$$

$$K^s = \int_A \int (B^s)^T \cdot D^s \cdot B^s ds \quad (14)$$

其中,  $B^p$ 、 $B^b$  和  $B^s$  分别为平面应变位移矩阵、变曲应变位移矩阵和初应力应变位移矩阵;  $D^p$ 、 $D^b$  和  $D^s$  分别为平面应力弹性-塑性材料系数矩阵、弯曲弹塑性材料系数矩阵和初应力矩阵.

为了求出应变-位移矩阵  $B^p$ 、 $B^b$  和  $B^s$ , (10)式可以分成下列3式:

$$\int_A \int N_{, q} : (f^p - \varepsilon^p) ds = 0 \quad (15)$$

$$\int_A \int M_{, q} : (f^b - \varepsilon^b) ds = 0 \quad (16)$$

$$\int_A \int (N \cdot G)_{, q} : (f^s - \varepsilon^s) ds = 0 \quad (17)$$

再把(4)式和下列3个假设应变表达式

$$\varepsilon^p = B^p \cdot q \quad (18)$$

$$\varepsilon^b = B^b \cdot q \quad (19)$$

$$\varepsilon^s = B^s \cdot q \quad (20)$$

分别代入(15)~(17)式, 应变位移矩阵  $B^p$ 、 $B^b$  和  $B^s$  的有限元离散表达式分别为:

$$B^p = N^p \cdot (A^p)^{-1} \cdot C^p \quad (21)$$

$$\mathbf{B}^b = \mathbf{N}^b \cdot (\mathbf{A}^b)^{-1} \cdot \mathbf{C}^b \quad (22)$$

$$\mathbf{B}^s = \mathbf{N}^s \cdot (\mathbf{A}^s)^{-1} \cdot \mathbf{C}^s \quad (23)$$

在推导上式的过程已应用了格林定理. (21 ~ 23) 式中的一些符号的定义和推导可参考文献 [3, 4].

## 2 混合半逆法接触算法

本文所用的接触算法称为“混合半逆法”是因为在总的增量平衡方程中一些增量节点位移分量和节点接触力分量都是未知量, 而在每一步增量计算中又考虑了成形工件的最新形状. 例如, 在板材的深冲成形过程中, 有些节点的增量位移分量是已知的. 如在冲头底部和模具顶部的一些单元节点的垂直位置是已知的, 而与它们对应的节点接触力是未知的.

通常的总体增量平衡方程可以表示为:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \Delta \mathbf{p} \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{K}$  是结构总体增量刚度矩阵;  $\Delta \mathbf{q}$  是增量节点位移向量;  $\Delta \mathbf{p}$  是增量节点载荷向量.

$$\Delta \mathbf{q} = (\Delta \mathbf{q}_1, \Delta \mathbf{q}^*)^T \quad (25)$$

$$\Delta \mathbf{p} = (\Delta \mathbf{p}_1, \Delta \mathbf{p}^*)^T \quad (26)$$

其中,  $\Delta \mathbf{q}^*$  和  $\Delta \mathbf{p}^*$  是已知的增量节点位移分量和相应的增量节点接触力分量.

将 (25) 式和 (26) 式代入 (24) 式, 将含  $\Delta \mathbf{q}^*$  量的项移至方程右端, 而含  $\Delta \mathbf{p}^*$  的项移至方程的左端. 于是得到两个新的增量方程:

$$\mathbf{K}_{11} \cdot \Delta \mathbf{q}_1 = \Delta \mathbf{p}_1 - \mathbf{K}_{12} \cdot \Delta \mathbf{q}^* \quad (27)$$

$$\Delta \mathbf{p}^* = \mathbf{K}_{21} \cdot \Delta \mathbf{q}_1 + \mathbf{K}_{22} \cdot \Delta \mathbf{q}^* \quad (28)$$

其中,  $\mathbf{K}_{ij}$  是总刚度矩阵  $\mathbf{K}$  的相应子矩阵:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

从方程 (27) 和 (28) 分别可以求出未知的增量节点位移分量和增量节点接触力分量.

## 3 本构关系

假设板材是率无关的弹塑性材料所制, 弹性变形是小应变、塑性变形不改变体积<sup>[5]</sup>. 而且变形率张量在实际上可以被分为弹性部分和塑性部分之和. 基于这个假设和根据塑性流动理论, 本构关系可以用流动的克希荷夫 (Kirchhoff) 应力率,  $\dot{\boldsymbol{\tau}}^{ij}$  和拉格朗日 (Lagrangian) 应变率,  $\dot{\boldsymbol{\eta}}_{kl}$  来表示:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^{ij} = L^{ijkl} \boldsymbol{\eta}_{kl} \quad (30)$$

其中

$$L^{ijkl} = C^{ijkl} - \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{g}}^{ik} \boldsymbol{\tau}^{jl} + \bar{\mathbf{g}}^{jk} \boldsymbol{\tau}^{il} + \bar{\mathbf{g}}^{ij} \boldsymbol{\tau}^{jk} + \bar{\mathbf{g}}^{jl} \boldsymbol{\tau}^{ik}] \quad (31)$$

而且

$$C^{ijkl} = \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{1}{2} (\bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} + \bar{g}^{il} \bar{g}^{jk}) + \frac{\mu}{1-2\mu} \bar{g}^{ij} \bar{g}^{kl} - \left( \alpha \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau_{ij}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau_{kl}} \right) / \left( \frac{1+\mu}{E} - 1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau_{mn}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau^{mn}} \right) \right] \quad (32)$$

这里,  $E$  和  $\mu$  为杨氏模量和泊松系数;  $\bar{\sigma}$  为等效克希荷夫应力;  $\bar{g}^{ij}$  为度量张量;  $E_i$  为克希荷夫应力对相应应变的曲线的斜率.

迈罗曾证明<sup>[6]</sup>大部分板材具有正交异性塑性性质, 可用希尔 (Hill) 的屈服函数描述. 对于在平面内具有各向同性和平面应力问题的板材而言, 希尔的屈服函数可以表述为<sup>[7]</sup>:

$$\bar{\sigma} = \left\{ \frac{1}{2(1+R)} \left[ (1+2R) | 2 \bar{g}^{\alpha\gamma} \bar{g}^{\beta\gamma} \tau_{\gamma\beta} \tau_{\alpha\delta} - \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{g}^{\gamma\delta} \tau_{\alpha\beta} \tau_{\gamma\delta} |^{m/2} + | \bar{g}^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} - 2 \bar{g}^{33} \tau_{33} |^m \right] \right\}^{1/m} (\tau_{33} \rightarrow 0) \quad (33)$$

其中  $R$  为正交各向异性参数;  $m$  为材料常数. 当  $M > 2$ ,  $R = 1$  时, (33) 式就蜕化为密西斯 (Mises) 屈服准则.

(32) 式中的张量  $C$  有两个分支: 一为塑性加载; 另一为弹性卸载. 它们是由  $\alpha$  的值决定的:

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \bar{\sigma} = Y, \text{ 且 } \dot{\bar{\sigma}} > 0 \\ 0, & \bar{\sigma} < Y, \text{ 或 } \bar{\sigma} = Y, \text{ 且 } \dot{\bar{\sigma}} < 0 \end{cases} \quad (34)$$

其中  $Y$  为当前的流动应力.

等效应力应变,  $\bar{\sigma}$  和  $\bar{\varepsilon}$ , 曲现可由单向拉伸试验得到, 并分段由幂级数表示:

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_y} = \begin{cases} \bar{\sigma} / \sigma_y, & \bar{\sigma} < \sigma_y \\ (\bar{\sigma} / \sigma_y)^n, & \bar{\sigma} \geq \sigma_y \end{cases} \quad (35)$$

其中  $n$  是硬化指数;  $\varepsilon_y$  是初始屈服应变.

## 4 计算例题

为了验证本课题开发的有限元程序的正确性做了若干数值计算. 图 1 所示为一方的浅壳块受有均布载荷. 图 2 表示几何非线性-材料非线性扁壳单元在有限元网格密度增加时方壳块中心点挠度的收敛情况. 上例表明, 在 72 个单元的情况下, 数值解的误差仅为  $7.2 \times 10^{-5}$  (见图 2).

本文对文献 [8] 中报告的方形杯子的深冲程形做了数值模拟. 图 3 表示该杯子的形状. 图 4 表示板材的初始尺寸和 30 mm 冲程后板材的形状. 板材的几何尺寸和材料参数与文献 [8] 所用的一致, 板材压边力 2 t, 摩擦系数为 0.1,  $r = 1.5$ , 网格大小取情况 I, 冲头冲程 30 mm; 模具 (凹模) 半径为 5 mm. 该方杯成形过程的一组数值结果如图 5 所示. 计算所得的沿着方杯的对角线方向的厚度应变分布和测量所得的数值做了对比 (见图 5), 该图计算值与实测值有良好的一致. 沿方杯子横向的厚度应变分布也做了计算, 但没有实验结果可以对比 (见图 6).

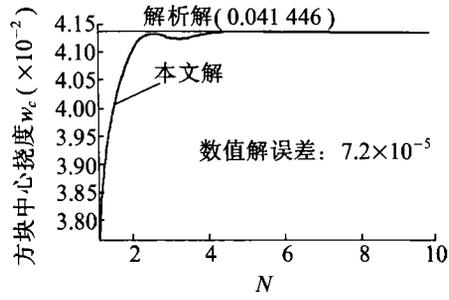
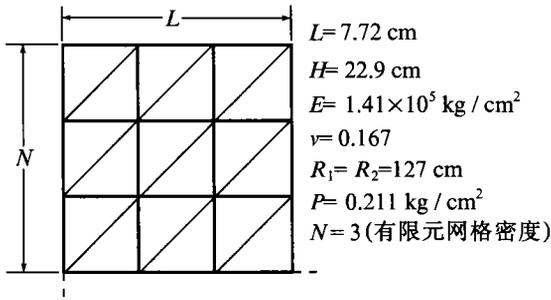


图1 受均布载荷(P)的扁壳方块和有限元网格密度(N)

图2 壳元的收敛性(受均布载荷的简支方壳块)

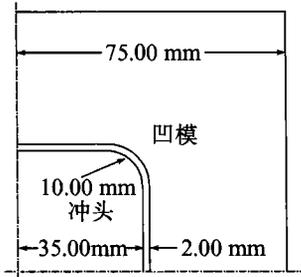


图3 冲头与凹模的平面图

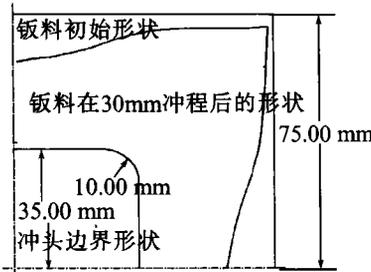


图4 料的初始和冲压后的形状对比

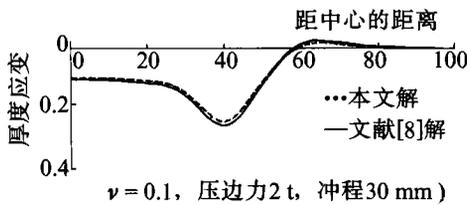


图5 对角线方向的厚度应变的分布

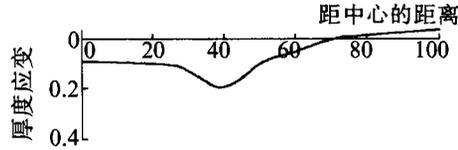


图6 横向厚度应变分析

图7表示摩擦系数对最大厚度应变(在杯角的肩部)的影响. 其中凹模半径为5 mm.

图8表示了深冲成形过程中压边力的影响, 压边力为4 t, 摩擦系数为0.1, 材料正交各向异性值  $r = 1.5$ , 冲头冲程 30 mm, 凹模半径为 20 mm. 在图中显示的厚度应变分布与文献[8]的结果有良好的一致. 应变的分布是从杯底中心指向对角线方向.

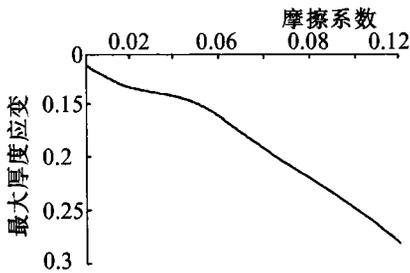


图7 摩擦系数对最大厚度应变的影响

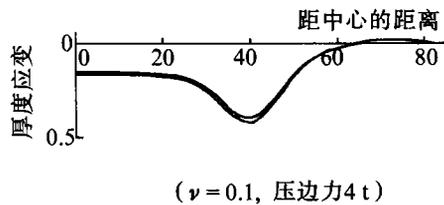


图8 对角线方向上厚度应变的分布

## 5 总结和结论

本文用大变形弹塑性壳元开发有限元程序模拟板材深冲成形过程. 为了改进增量计算的收敛性,  $C^1$ 连续的几何非线性-材料非线性三角形扁壳单元用于分析过程. 本文还提出了用混合半逆解法用于成形过程中的接触计算. 该算法大大加快了广泛存在于板材成形过程中的接触过程的计算.

本文对板材变成方形杯的深冲成形过程的数值模拟进行了计算. 相应于冲程为 30 mm, 压边力为 2 t, 正交各向异性值为  $r = 1.5$  的特殊成形条件, 计算了沿对角线方向分布的厚度应变, 并与实测值有良好的一致性.

### 参 考 文 献

- 1 Pian T H H. Constraints of stress in hybrid plate and shell elements. In: Bergan, Bathe, Wunderlich. Finite Elements Methods for Nonlinear Problems. Norway: Trondheim, 1985. 249~257
- 2 蒋和洋. 拟协调几何非线性板壳有限元的变分基础. 大连理工大学学报, 1988, 28(1): 78~86
- 3 Tang L M, Chen W J, Liu Y X. Formulation of quasi-conforming element and Hu-Washizu principle. Comput Struct. 1984, 19: 247~250
- 4 蒋和洋. 拟协调几何非线性板单元. 大连理工大学学报, 1984, 23(2): 145~148
- 5 Lee L H N. Wrinking in sheet metal forming. In: Interdisciplinary Issues in Materials Processing and Manufacturing-Volume Two. Samant S K New York: ASME, 1987. 419~436
- 6 Mellor P B. Experimental studies of plastic anisotropy in sheet metal, mechanics of solid-the rodney hill 60th anniversary volume H, Hopkines G, Sewell M J. New York: Pergamon Press, 1982. 383~415
- 7 Hill R. Theoretical plasticity of textured aggregates. In: Mathematical Proceedings of Cambridge Philosophical Society. U K: 1979, 85, 179~191
- 8 Ohwue T, Nakamachi E. Finite element analyses of box-shaped cup-drawing and comparison with experiments. In: FE-SIMULATION OF 3-D SHEET METAL FORMING PROCESSES IN AUTOMOTIVE INDUSTRY, International Conference with Workshop, Switzerland, 1991. 153~166

# Numerical Simulation of Sheet Metal Forming by Using Large Deformation Shell Elements

Jiang Heyang

( School of Architectural Engineering, Beijing Polytechnic University, Beijing, 100022 )

**Abstract** The large deformation elastic-plastic shell finite element code is developed. In order to improve the convergence of incremental calculations, the  $C^1$ -continuity geometric nonlinear-material nonlinear triangle shallow shell finite elements are applied in the code. Also, a mixed semi-inverse finite element contact algorithm is created for effective calculations of contact problems widely existing in sheet metal forming processes. To verify the computational code based on present shell element and contact algorithm, some numerical results are worked out. These results are compared with other numerical or analytical solutions, which turns out to be good in agreement.

**Keywords** deep drawing forming processes, contact, elastic-plastic deformation

---

上接第58页

# Study on Crystal and Magnetic Structures of $\text{PrFe}_{10.2}\text{Mo}_{1.5}\text{Co}_{0.3}$ Alloy By Neutron Diffraction

Zhang Shengen Zhang Jiuxing Yang Hongchuan Zhou Meiling

( College of Materials Science and Engineering, Beijing Polytechnic University, Beijing, 100022 )

Du Honglin Xue Yanjie Zhang Baisheng

( China Institute of Atomic Energy, Beijing, 102413 )

**Abstract** To find out the effect of Co on magnetic properties of  $\text{PrFe}_{10.2}\text{Mo}_{1.5}\text{Co}_{0.3}$  permanent magnetic alloy, the crystal and magnetic structures of the alloy are determined by powder neutron diffraction. Reitveld analysis of the neutron diffraction data indicates that Mo prefers the  $8j$  site while Co prefers the  $8j$  site. The experimental study shows that the magnetic moment and the saturation magnetization are enhanced, and the Curie temperature is raised due to the  $8j$  crystal site Fe is replaced by Co.

**Keywords** neutron diffraction, permanent magnetic alloy, crystal structure, magnetic structure