第15卷 第1期　　北京工业大学学报　　Vol.15,No.1
1989年3月　　JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY　　Mar.,1989

嵌套剖分法及其应用

邓乃扬

（应用数学系）

【摘要】 首先对嵌套剖分法做一综述，然后研究如何用该方法求解一个实际课题中提出的稀疏线性方程组．研究结果表明，直接套用现有的各种算法，均不能令人满意．但是针对该问题结构的特点，根据嵌套剖分法的思想灵活地处理，却可以得到非常好的结果．

关键词：嵌套剖分法，稀疏正定线性方程组，排序问题

0. 引　　言

考虑线性方程组：

$$Ax=b \tag{0.1}$$

其中A是稀疏正定对称矩阵．高斯消去法是求解这类方程组的最重要的方法之一．本文研究如何使高斯消去法对这类问题更为有效．

首先考虑一个例子．设（0.1）中的矩阵A的非零元素有如下结构：

$$A=\begin{pmatrix} \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & \times & \times & \\ & \times & & \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

与矩阵A相应的图如图1所示（例如参看[6]的附录或[7]）．显然，对（0.2）的矩阵A施行高斯消去法后，第4行第3列的元素将变为非零元（这里和今后我们总假定不会因为相消而产生零元素）．这表明消去某些变量后，某些原来是零的元素将变为非零．换句话说，若考虑分解

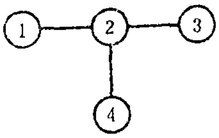

图　1

$$A=LDL^{T}\quad (A=A^{T}) \tag{0.3}$$

其中L是下三角阵，D是对角阵，则L中相应于A中零元素的位置上会产生一些非零元素．我们称这些非零元素所在的位置为非零填充．

“非零填充”对于求解稀疏问题是很重要的，因为它可能把稀疏问题变为非稀疏问题，从而使存贮量和计算量增加，并产生较大的误差．这促使我们考虑如下问题：能否避免或减少非零填充呢？

实际上，非零填充是与变量的次序排列有关系的．仍考虑上述问题（方程（0.2）和图1），但对图1的顶点重新编号——交换顶点2和3．这样可得图2和相应矩阵的非零结构（0.4）．

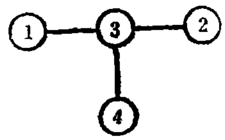

图　2

本文于1988年2月24日收到．

$$A_0=\begin{pmatrix} \times & & \times & \\ & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & \times & \times \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

如果对（0.4）式的A_0施行高斯消去法，竟然不出现非零填充！

上面的例子说明，如果顶点的次序安排得好，是可以减少非零填充的．关键问题是，对给定的系数矩阵A及其相应的图$G=(V,E)$，应如何将G的顶点重新编号，使得非零填充尽可能少呢？这个问题称为排序问题．

一般来说，排序方法可分为两类．一类方法的出发点是尽量使A的包络（Envelope）（从而使L的包络）小，RCM算法是其典型．另一类方法的出发点是尽量使L中的非零元个数少，嵌套剖分法是其典型．本文仅讨论嵌套剖分法．

1 嵌套剖分法

1.1 基本思想

嵌套剖分法[1]是对由有限元问题产生的一类特殊稀疏线性方程组提出的．假定与系数矩阵A相应的图是正则网格，未知数的个数是$N=n^2$，相应于$n=7$和$N=49$的正则网格如图3所示．

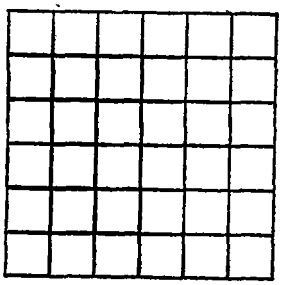

图　3

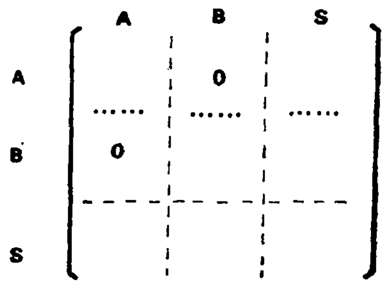

图　4

嵌套剖分法的基础包括下列定理．

定理1．设给定图$G=(V,E)$．假定顶点集合V被分成3个集合A、B和S，使得不存在连结A的顶点和B的顶点的边．若对顶点进行编号时，按A、B、S的次序（如图4所示），则在与之相对应的矩阵中，必然出现图4中所示的零块，且在高斯消去法的过程中，这些零块始终保持为零块．

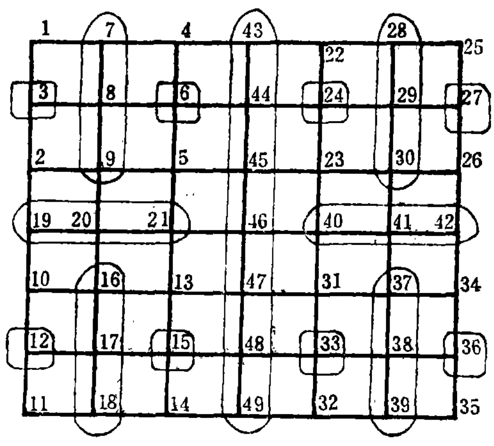

图　3

1.2 嵌套剖分算法

我们可以反复使用上述技巧，使相应矩阵中出现更多的零块．下列算法是对正规网格建立的具体方法．

1.2.1 算法1（嵌套剖分算法）

(1) 设$G(V,E)$是一个$n\times n$的正规网格．取一条直线上的顶点组成的集合做为分离集合S；这条直线把顶点集合V分离成大体相等的两部分A和B.

(2) 从$|V|-|S|+1$到$|V|$的号码对S中的顶点编号.

(3) 对子图B和A反复施行上述方法.

应用本算法于图 3 所示的 7×7 正规网格，所得编号顺序如图 5 所示.

1.2.2 嵌套剖分法的最优性

为了评价一种排序方法，要考虑两个因素：三角阵L中非零元素的个数和把A分解为LDL^T时所需乘法性运算的次数．下列定理表明[2]，在上述两个量的数量级的意义下，嵌套剖分法是最优的.

定理2. 若应用嵌套剖分法于$n\times n$正规网格，则相应矩阵的三角阵L中非零元素的个数为

$$\eta(L)=31\ (n^2\log_2 n)/4+O(n^2)$$

定理3. 与$n\times n$正规网格相应的矩阵的三角阵L，至少有$O(n^2\log_2 n)$个非零元.

定理4. 若应用嵌套剖分法于$n\times n$正规网格，则对相应矩阵进行LDL^T分解所需的乘法性动算次数为

$$829n^3/84+O(n^2\log_2 n)$$

定理5. 分解一个与$n\times n$正规网格相应的矩阵所需的乘法性运算次数，至少为$O(n^3)$.

2 嵌套剖分法的推广

上述嵌套剖分法中，关鍵是设法找到一个它本身尽可能小而且尽可能把图分成两个相等部分的分离集合．由此出发，不难把嵌套剖分法推广于一般的图.

2.1 广义的嵌套剖分法

2.1.1 分离定理

定义1. 设C是一类在子图意义下的闭图（即$G\in C$蘊含着G的任意子图属于C）．称C为$\sqrt{n}$－可分的，如果存在着常数$\alpha(\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1)$和$\beta(\beta>0)$，使得对任意的具有个$n$顶点的$G=(V,E)\in C$，$G$的顶点集合$V$可分成三个互不相交的集合$S$、$A$和$B$，满足

$$|A|\leqslant\alpha n,\quad |B|\leqslant\alpha n,\quad |S|\leqslant\beta\sqrt{n}$$

且G沒有从A到B的边.

定理6.[3] （分离定理）平面图是$\sqrt{n}$-可分的.

2.1.2 广义嵌套剖分算法

根据定理 6，Lipton 等人[4]对较一般的平面图建立了如下算法.

2.1.3 算法 2（广义嵌套剖分算法）

为了说明该算法的步驟，只需考虑下列情况：设G中的某些顶点已被标号，且这些标号都大于b；还有$b+1-a$个顶点需要被标上从a到b的号码．下列步驟可用于处理这一问题：

(1) 如果G的顶点数不超过$n_0=(\beta/(1-\alpha))^2$，则从a到b对所有未标号的顶点任意标号；否则转(2).

(2)找出一个分离集合S和相应的集合A和B．设A、B和S分别包含i、j和k个未标号的顶

点.

(3) 从b到$b-k+1$对S中未标号的顶点进行标号.

(4) 删除两个端点都在S中的所有边. 构造诱导子图$S\cup A$和$S\cup B$.

(5) 反复使用上述方法于子图$S\cup B$，对B中的j个未标号顶点标号.

(6) 类似于(5)考虑子图$S\cup A$，对A中的i个未标号顶点标号.

2.2 一个启发式算法

虽然广义嵌套剖分法具有理论上的意义，但是它比较复杂. 另外，因为它主要适用于与平面图相对应的线性方程组，所以实际应用时可能会遇到困难. 不少实际问题相应于非平面图，例如后面讨论的捕鱼问题. 本节介绍一个启发式方法，它比较简单，且能用于较一般的稀疏线性方程组.

2.2.1 基本思想

本算法的基本思想是找出一个较小的且能把图分成为大体相等的两部分的分离集. 图6所示的最简单的情况，启发我们设法实现下列步骤：

图 6

(1) 找出一个"端部"的顶点.

(2) 把图中的顶点排成一个有某种"次序"的集合.

(3) 从这个有"次序"的集合的"中部"，选择分离集合.

上述步骤用于图6，可得分离集$\{x_3\}$，这是一个较理想的结果. 为把上述策略用于一般的图，只需建立下列对应关系：

图6←→一般图

"端部"顶点←→伪边缘顶点

"次序"结构←→级结构

由此可导出如下算法：

2.2.2 算法3 (George[2]，启发式算法)

(1) 设给定图$G=(V,E)$. 置$R=V$，$N=|V|$.

(2) 考虑截图$G(R)=(R,\ E(R))$，其中

$$E(R)=\{(x,y)\in E\,|\,x\in R,\ y\in R\}$$

找出$G(R)$的一个连通分支$G(C)$. 求出$G(C)$的一个伪边缘顶点r. 对子图$G(C)$生成一个以伪边缘顶点r为根的级结构：

$$L(r)=\{L_0,L_1,\cdots,L_m\}$$

(3) 若$m\leqslant 2$，置$S=C$并转(4)；否则选出位于"中部"的一级L_j，其中j是不超过$(m+1)/2$的最大整数. 从L_j中选出$S(S\subset L_j)$，使得S是$G(C)$的极小分离集.

(4) 从$N-|S|+1$到N对S中的顶点进行标号. 置$R-S$为R，置$N-|S|$为N. 若$R\neq\phi$，则转(2).

使用广义嵌套剖分法求解线性方程组的并行算法，可参看文献[5]、[6]，此处略.

3 对捕鱼问题的应用

3.1 捕鱼问题

捕鱼问题需求解下列无约束问题

$$\min S(p,q)=\sum_{Y=1}^{8}\sum_{a=1}^{7}\left\{V^*\left[\log_e\frac{e^{-0.1}p(y,a)-e^{0.1}p(y+1,a+1)}{c^*(y,a)}\right]^2\right.$$

$$\left.+W^*\left[\log_e\frac{q(a)\,\alpha^*p(y,a)+(1-\alpha^*)p(y+1,a+1)}{u^*(y,a)}\right]^2\right\} \tag{3.1}$$

其中V^*，W^*，α^*，$c^*(y,a)$ 和$u^*(y,a)$ 是常数．该问题的变量如图 7 所示．

$p(1,1)$	$p(1,2)$	$p(1,3)$	$p(1,4)$	$p(1,5)$	$p(1,6)$	$p(1,7)$	
$p(2,1)$	$p(2,2)$	$p(2,3)$	$p(2,4)$	$p(2,5)$	$p(2,6)$	$p(2,7)$	$p(2,8)$
$p(3,1)$	$p(3,2)$	$p(3,3)$	$p(3,4)$	$p(3,5)$	$p(3,6)$	$p(3,7)$	$p(3,8)$
$p(4,1)$	$p(4,2)$	$p(4,3)$	$p(4,4)$	$p(4,5)$	$p(4,6)$	$p(4,7)$	$p(4,8)$
$q(1)$	$q(2)$	$q(3)$	$q(4)$	$q(5)$	$q(6)$	$q(7)$	
$p(5,1)$	$p(5,2)$	$p(5,3)$	$p(5,4)$	$p(5,5)$	$p(5,6)$	$p(5,7)$	$p(5,8)$
$p(6,1)$	$p(6,2)$	$p(6,3)$	$p(6,4)$	$p(6,5)$	$p(6,6)$	$p(6,7)$	$p(6,8)$
$p(7,1)$	$p(7,2)$	$p(7,3)$	$p(7,4)$	$p(7,5)$	$p(7,6)$	$p(7,7)$	$p(7,8)$
$p(8,1)$	$p(8,2)$	$p(8,3)$	$p(8,4)$	$p(8,5)$	$p(8,6)$	$p(8,7)$	$p(8,8)$
	$p(9,2)$	$p(9,3)$	$p(9,4)$	$p(9,5)$	$p(9,6)$	$p(9,7)$	$p(9,8)$

图 7

如果用牛顿法求解问题（3.1），需求解线性方程组：

$$Ax=-\nabla S \tag{3.2}$$

其中系数矩阵A是目标函数的 Hessian，$A=\nabla^2 S$．显然，矩阵A是稀疏且对称的，与之相应的图如图 8 所示．下面研究如何用嵌套剖分法求解线性方程组(3.2)．

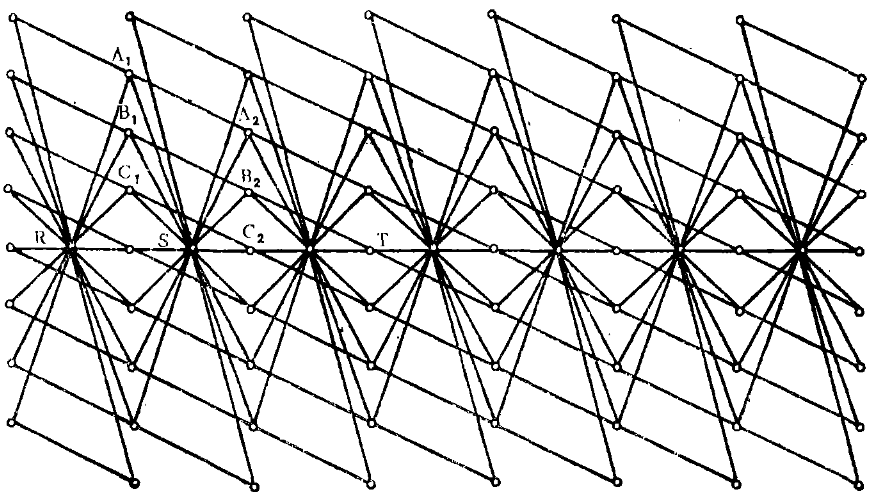

图 8

3.2 与(3.2)式相应的图的非平面性

当试图用算法 2 求解线性方程组(3.2)时，应当考查它的图的平面性．下面证明该图的非平面性．

引理． 一个图是平面图的充要条件是它不包含可以收缩为K_5或K_{33}的子图．

证明． 例如参看文献[7]，第62页．

定理7． 与线性方程组(3.2)相应的图是非平面的．

证明． 定义与(3.2)相应的图的子图$\overline{G}=(\overline{V},\overline{E})$：

$$\overline{V}=\{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, R, S, T\}$$
$$\overline{E}=\{(A_1,A_2), (B_1,B_2), (C_1,C_2); (S,A_2), (S,B_2), (S,C_2); (R,A_1), (R,B_1), (R,C_1); (T,A_2), (T,B_2), (T,C_2)\}$$

（参看图 8）．收缩 (A_1,A_2)，(B_1,B_2) 和 (C_1,C_2) 等各边，可得 $\overline{G}=(\overline{V},\overline{E})$ 的一个收缩，如图 9 所示．它恰恰是K_{33}．因此子图$\overline{G}$可收缩为K_{33}，于是根据引理知，与 (3.2) 相应的图是非平面的．

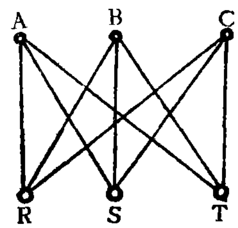

图 9

3.3 计算方法探讨与计算结果

由于与 (3.2) 相应的图的非平面性，我们不能断言算法 2 适用于该问题．因此考虑采用算法 3．一个自然的标号顺序如图10中未被圈起的数字所示．从这个标号顺序出发，使用算法 3 所得的新标号顺序如图 10 中圈起的数字所示．与此相应的非零填充数是 781（参看表 1），它远较与原来标号顺序相应的非零填充数 133 大得多．我们曾从其它若干个不同的初始标号顺序出发，使用算法 3，但结果都很不理想．

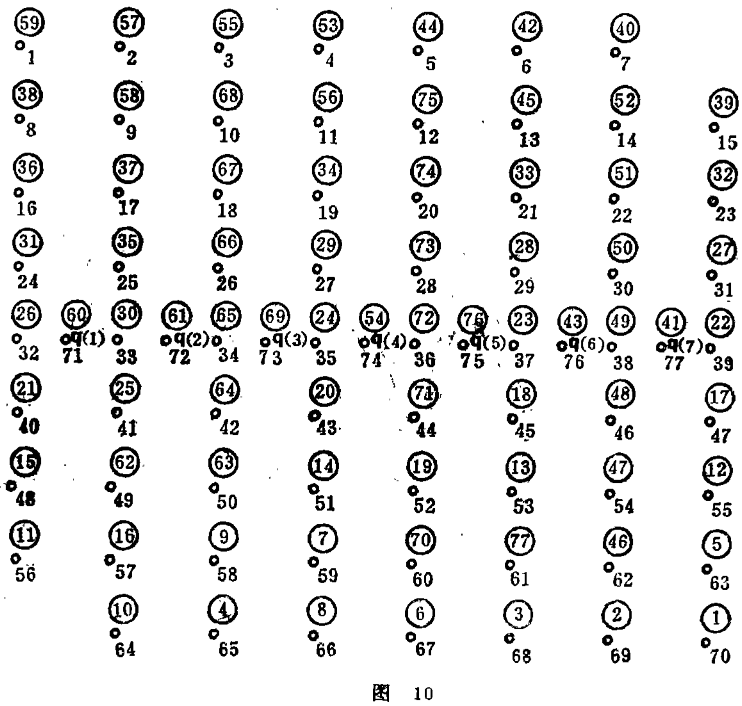

图 10

表 1

	原始标号顺序（图10中未圈起的数字）	由算法3.4得到的标号顺序（图10中圈起的数字）	观察得到的标号顺序（图11中圈起的数字）
A中下三角部分非零元的个数（包括对角元）	245	245	245
L中非零元的个数	378	1026	330
非零填充数	133	781	85
L的包络中的元素个数	1057	1763	591
L的下三角部分的零元素个数	2625	1977	2663
事先预知的L的下三角部分的零元素个数	1916	1810	2327

然而如果依据嵌套剖分法的思想，采用观察的方法选择分离集合，却可以得到非常好的结果．图11中被圈起的数字给出了这样得到的一种标号顺序，与此相应的非零填充只有85（参看表1）．在表1中，还列出了事先可以知道的下三角阵中零元素的个数．因为不需任何检验就能利用这些零元素而节省存贮和计算量，所以这些零元素的个数是有重要意义的．

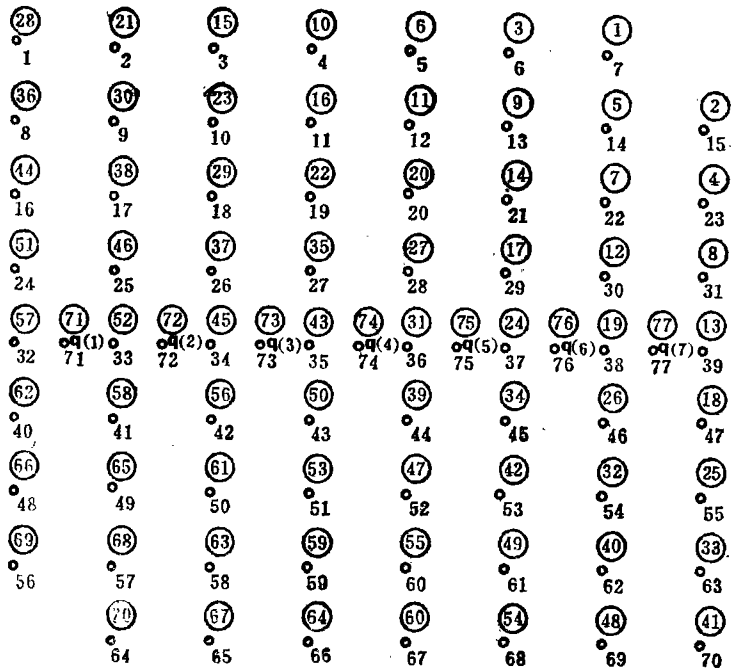

图 11

4 讨论

（1）用算法3所得结果很坏的原因是，选出的分离集合常常把图（子图）分成两个大小相差很大的集合．有可能适当修改算法中第(3)步选择j和S的方法，缩小这种差别．

（2）对于顶点度数之间差别很大的问题，极小度方法（Minimum Degree Mefhod）可能优于算法3．

（3）有可能改造嵌套剖分法，使之考虑顶点的度的因素．

（4）在处理实际问题时，应注意问题的特殊结构．

参考文献

[1] George A. Nested dissection of a regular finite element mesh. SIAM J. Numer. Anal, 1973; 10: 345～363

[2] George A and Liu J H. Computer solution of large sparse positive definite systems, Prentice-Hall: Englewood cliffs, NJ, 1981

[3] Lipton R J and Tarjan R E. A separator theorem for planar graphs. SIAM J. Appl. Math, 1979; 36: 177～189

[4] Lipton R J, Rose D J and Tarjan R E. Generalized nested dissection. SIAM J. Numer. Anal, 1979, 16: 346～358

[5] Pan V and Reif J. Fast and efficient parallel solution of linear systems. Technical Report 87-2, Computer Science Department, State University of New york at Albany, March 1987

[6] Deng N Y. Nested dissection methods for sparse positive definite linear system of equations. NOC TP 200, Hatfield polytechnic, 1988

[7] Wilson R J. Introduction to graph theory. Longman, 1979

[8] Parter S V. The use of linear graph in Gauss elimination. SIAM Rev, 1961; 3: 119～130

[9] Arany I, Smyth W F and Szoda L. An improved method for reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. Information processing 71: Proc. of IFIP Congress, North Holland, Amsterdam, 1972

Nested Dissection Methods and their Application

Deng Naiyang

[Abstract] This paper surveys nested dissection methods (including original Nested Dissection Method, Generalized Nested Dissection Method and heuristic method etc.) and their application to solving a sparse linear system of equations. The results are not satisfactory when the ready-made methods are used to this linear system. However, noticing the particular structure of this linear system and basing on the idea of nested dissection methods, a very nice result is obtained

Key words: Nested dissection method, Sparse positive definite linear syfem of equations, Ordering problem