第20卷 第4期 北京工业大学学报 Vol. 20 No. 4
1994年12月 JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY Dec. 1994

图型序列母函数与割集定理

邵学才 叶秀明
(北京工业大学计算机科学系, 100022) (上海大学数学系, 201800)

【摘要】 在"图型序列的母函数"一文的基础上, 讨论了图型序列母函数的性质, 给出了割集定理.

【关键词】 图型序列, 母函数, 割集
【中图分类号】 O157.5

以有向图 G 的顶点为元素, G 的有向通路对应的序列全体称为图型序列. 本文在文献[1]的基础上进一步讨论图型序列母函数的性质, 给出了一条割集定理, 文中记号和术语与文献[1]相同.

由线性代数的知识易得下面的结果.

引理 设 A 是 $n\times n$ 满秩方阵, B 是 $n\times 1$ 矩阵, C 是 $1\times n$ 矩阵, 则

$$(A+BC)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\cdot B\cdot C\cdot A^{-1}}{1+CA^{-1}B} \tag{1}$$

定理 1 设 $S\bigcup T$ 是图 G 的割集, 即

$$G-S\bigcup T=G_1\hat{+}G_2$$

其中

$$S=\{(i,j_s)\mid i\in V(G_1),\ s=1,2,\cdots,r\},\ T=\{(k,l_t)\mid k\in V(G_2),\ t=1,2,\cdots,p\}$$

则

$$G^*=G_1^*+G_2^*-1+\delta \tag{2}$$

其中

$$\delta=\frac{1}{1-\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(l_t)}G_{2_{(k)}}^{(j_s)}}\Big(G_{1_{(i)}}\sum_{s=1}^{r}G_2^{(j_s)}+G_{2_{(k)}}\sum_{t=1}^{p}G_1^{(l_t)}$$

$$+G_{1_{(i)}}\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{2_{(k)}}^{(j_s)}G_1^{(l_t)}+G_{2_{(k)}}\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(l_t)}G_2^{(j_s)}\Big)$$

证 设 A 是 G 的邻接矩阵,

$$I-AX=\begin{bmatrix} I-A_1x & x \\ Y & I-A_2x \end{bmatrix}$$

其中

$$X=-e_i\sum_{s=1}^{r}e'_{j_s}x,\ Y=-e_k\sum_{t=1}^{p}e'_{l_t}x,\ \text{令}\ (I-Ax)^{-1}=\begin{bmatrix} G & S \\ T & H \end{bmatrix}$$

收稿日期: 1994-03-15.

则由引理可知

$$G=[(I-A_1x)-X(I-A_2x)^{-1}Y]^{-1}=(I-A_1x)^{-1}$$

$$+\frac{(I-A_1x)^{-1}X(I-A_2x)^{-1}Y(I-A_2x)^{-1}}{1-\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}e'_{i_s}(I-A_1x)^{-1}e_ie'_{j_t}(I-A_1x)^{-1}xe_k}=(I-A_1x)^{-1}$$

$$+\frac{(I-A_1x)^{-1}xe_i\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{2_{(k)}}^{(j_t)}e'_{i_s}(I-A_1x)^{-1}}{1-\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(i_s)}G_{2_{(k)}}^{(j_t)}}$$

$$T=-(I-A_2x)^{-1}YG,\ H=[(I-A_2x)-Y(I-A_1x)^{-1}X]^{-1}=(I-A_2x)^{-1}$$

$$+\frac{(I-A_2x)^{-1}xe_k\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(i_s)}e'_{j_t}(I-A_1x)^{-1}x}{1-\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(i_s)}G_{2_{(k)}}^{(j_t)}}$$

$$S=-(I-A_1x)^{-1}XH$$

记

$$\alpha=\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(i_s)}G_{2_{(k)}}^{(j_t)},$$

于是

$$G^*(x)=1+j'(I-Ax)xj$$

$$=1+j'Gxj+j'Txj+j'Hxj+j'sxj$$

$$=G_1^*(x)+\frac{1}{1-\alpha}\ G_{1_{(i)}}\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{2_{(k)}}^{(j_t)}G_1^{(i_s)}+G_{2_{(k)}}\sum_{t=1}^{p}G_1^{(i_s)}$$

$$+\frac{1}{1-\alpha}\ G_{2_{(k)}}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(i_s)}\cdot\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{2_{(k)}}^{(j_t)}G_1^{(i_s)}+G_2^*(x)-1$$

$$+\frac{1}{1-\alpha}\ G_{2_{(k)}}\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(i_s)}G_2^{(j_t)}+G_{1_{(i)}}\sum_{s=1}^{r}G_2^{(j_t)}+G_{1_{(i)}}\sum_{s=1}^{r}G_{2_k}^{(j_t)}\cdot\sum_{s=1}^{r}\sum_{t=1}^{p}G_{1_{(i)}}^{(i_s)}G_2^{(j_t)}$$

整理后即得证明.

推论 1 设 $S=\{(i,j_s)\mid i\in V(G_1),\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ r\}$ 是图 G 的单向割集，即

$$G-S=G_1\dot{+}G_2$$

则

$$G^*(x)=G_1^*(x)+G_2^*(x)-1+\sum_{s=1}^{r}G_{1_{(i)}}G_2^{(j_s)} \tag{4}$$

在定理 1 中置 $G_{2_{(k)}}=G_{2_{(k)}}^{(j_t)}=G_2^{(j_t)}=0$，即得证明.

推论 2 设 (i,j) 是图 G 的无向割边，即

$$G-(i,j)\cup(j,i)=G_1\dot{+}G_2,\quad i\in V(G_1),\ j\in V(G_2)$$

则

$$G^*(x)=G_1^*(x)+G_2^*(x)-1+\delta \tag{5}$$

其中

$$\delta=\frac{1}{1-G_{1_{(i)}}^{(i)}G_{2_{(j)}}^{(j)}}\left[G_{1_{(i)}}G_2^{(j)}+G_1^{(j)}G_{2_{(j)}}+G_{1_{(i)}}G_{2_{(j)}}^{(j)}G_1^{(i)}+G_{2_{(j)}}G_{1_{(i)}}^{(i)}G_2^{(j)}\right]$$

在定理 1 中置 $r=1$, $t=1$ 即得证明.

推论 3　设 (i, j) 是图 G 的单向割边，即 $G-(i, j)=G_1\dot{+}G_2$, 则

$$G^*(x)=G_1^*(x)+G_2^*(x)-1+G_{1_{(i)}}G_2^{(j)} \tag{6}$$

在推论 1 中置 $r=1$ 即得证明.

推论 4　设图 G 是由 G_1, G_2, G_3 通过单向割边 (i_1, j_1), (i_2, j_2), 连接而成，即

$$G-(i_1, j_1)-(i_2, j_2)=G_1\dot{+}G_2\dot{+}G_3$$
$$i_1\in V(G_1),\quad j_1,\quad j_2\in V(G_2),\quad j_2\in V(G_3)$$

则

$$G^*(x)=G_1^*(x)+G_2^*(x)+G_3^*(x)-2+G_{1_{(i)}}G_2^{(j_1)}+G_{2_{(i_2)}}G_3^{(j_2)}+G_{1_{(i_1)}}G_{2_{(i_2)}}^{(j_1)}G_3^{(j_2)} \tag{7}$$

证　由推论 3, 记 $G-(i_1, j_1)=G_1\dot{+}\widetilde{G}_2$, 于是

$$G^*(x)=G_1^*(x)+G_2^*(x)-1+G_{1_{(i_1)}}\widetilde{G}_2^{(j_1)}$$

易知

$$\widetilde{G}_2^*(x)=G_2^*(x)+G_3^*(x)-1+G_{2_{(i_2)}}G_3^{(j_2)}$$
$$\widetilde{G}_2^{(j_1)}=G_2^{(j_1)}+G_{2_{(i_2)}}^{(j_1)}G_3^{(j_2)}$$

代入 (7) 式，整理后即得证明．类似地可证:

推论 5　设图 G 由 G_1, G_2, …, G_n 通过单向割边 (i_k, j_k) 连接而成，$k=1, 2, \cdots, n-1$, 即

$$G-\bigcup_{k=1}^{n-1}(i_k, j_k)=G_1\dot{+}G_2\dot{+}\cdots\dot{+}G_n,\quad i_k\in V(G_k),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2,$$

则

$$G^*(x)=\sum_{k=1}^{n}G_k(x)-(n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}G_{k_{(i_k)}}G_{k+1}^{(j_k)}+\sum_{k=1}^{n-2}G_{k_{(i_k)}}G_{k+1_{(i_{k+1})}}^{(j_k)}G_{k+1_{(i_{k+2})}}^{(j_{k+1})}+\cdots+G_{1_{(i_1)}}G_{2_{(i_2)}}^{(j_1)}\cdots G_n^{(j_{n-1})} \tag{8}$$

推论 6　设图由 G_1, G_2 和 G_3 通过单向割集

$$S=\{(i^{(1)}, j_s^{(1)})\,|\,i^{(1)}\in V(G_1),\ j_s^{(1)}\in V(G_2),\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ r^{(1)}\}$$

和

$$T=\{(i^{(2)}, j_t^{(2)})\,|\,i^{(2)}\in V(G_2),\ j_t^{(2)}\in V(G_3),\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ r^{(2)}\}$$

连接而成，即 $G-S\cup T=G_1\dot{+}G_2\dot{+}G_3$, 则

$$G^*(x)=G_1^*(x)+G_2^*(x)+G_3^*(x)-2+\sum_{s=1}^{r^{(1)}}G_{1_{(i^{(1)})}}G_2^{(j_s^{(1)})}$$

$$+\sum_{t=1}^{r^{(2)}} G_{2_{(i^{(2)})}} G_3^{(j_t^{(2)})} + G_{1_{(i^{(1)})}} \sum_{s=1}^{r^{(1)}} \sum_{t=1}^{r^{(2)}} G_{2_{(i^{(2)})}}^{(j_s^{(1)})} G_3^{(j_t^{(2)})} \quad (9)$$

证 由推论 1,

$$G^* = G_1^* + \widetilde{G}_2^* - 1 + \sum_{s=1}^{r^{(1)}} G_{1_{(i^{(1)})}} \widetilde{G}_3^{(j_s^{(1)})}$$

其中 $G-S=G_1 \cdots \widetilde{G}_2$,

$$\widetilde{G}_2^* = G_2^* + G_2^* - 1 + \sum_{s=1}^{r^{(1)}} G_{2_{(i^{(2)})}} G_3^{(j_s^{(2)})},\quad \widetilde{G}_2^{(j_s^{(1)})} = G_2^{(j_s^{(1)})} + \sum_{t=1}^{r^{(2)}} G_{2_{(i^{(2)})}}^{(j_s^{(2)})} G_3^{(j_s^{(2)})},$$

代入 G^* 后整理即得. 类似地可证.

推论 7 设G由 G_1, G_2, …, G_n通过单向割集

$$S^{(k)} = \{(i^k, j_{s^{(k)}}^{(k)}) \mid i_{(k)} \in V(G_k),\quad j_{s^{(k)}}^{(k)} \in V(G_{k+1}),\ s^{(k)} = 1, 2, \cdots, r^{(k)}\}$$

连接而成，即

$$G - \sum_{k=1}^{n-1} S^{(k)} = G_1 \dot{+} G_2 \dot{+} \cdots \dot{+} G_n$$

则

$$G^* = \sum_{k=1}^{n} G_k^* - (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{s^{(k)}=1}^{r^{(k)}} G_{k_{(i^{(k)})}} G_{k+1}^{(j_s^{(k)})} + \cdots$$

$$+ \sum_{s^{(1)}=1}^{r^{(1)}} \sum_{s^{(2)}=1}^{r^{(2)}} \cdots \sum_{s^{(n-1)}=1}^{r^{(n-1)}} G_{1_{(i^{(1)})}} G_{(i^{(2)})}^{(j_s^{(1)})} \cdots G_n^{(j_s^{(n-1)})} \quad (10)$$

参 考 文 献

1 叶秀明. 图型序列的母函数. 上海科技大学学报. 1994, 17(1): 73～79

The Generating Functions of Graphical Sequences and the Cut-Set Theorem

Shao Xuecai

(Department of Computer Science, Beijing Polytechnic University, 100022)

Ye Xiuming

(Department of Mathematics, Shanghai University, 201800)

【Abstract】 This paper discusses the generating functions of graphical sequences and their properties. The Cut-Set Theorem is also presented.

【Key words】 graphical sequences, generating function, cut-set