非弹性碰撞中的引导力与理想气体的相对论热量

李双九，王 娜，尚瑞岗，郭建新
（河北大学 物理科学与技术学院，河北 保定 071002）

摘 要：为了澄清匀速的受热物体是否接受引导力与引导功，从狭义相对论中物理量的时空属性出发，分析了匀速物体在受热过程中总动量的变化，指出了因改变静质量而产生四维类时引导力的客观事实．在实验室参考系建立三维引导力与引导功的概念，研究了两物体非弹性碰撞过程．用热力学定律计算了其中的引导功与相对论热量，得出了微元碰撞过程中热量收缩的结果．把四维动量守恒方程应用于理想气体的多体系统，计算出整体封闭系统的运动热量的收缩因子，从而进一步证实了相对论热力学的 P-E 理论．

关键词：热力学；狭义相对论；非弹性碰撞；引导力；理想气体
中图分类号：O412；O414；O551；O561 **文献标识码**：A **文章编号**：0254-0037(2007)07-0766-05

1907年，普朗克与爱因斯坦（Planck and Einstein, P-E）在狭义相对论的基础上研究了热力学量从本体参考系到实验室参考系的变换关系，得出[1-7]：整体速度为 v 的热力学系统的热量与温度比其固有值收缩一个相对论因子 $\sqrt{1-v^2/c^2}$．1963年以来，奥特与缪勒（Ott and Mϕller, O-M）认为运动的热量与温度应该比其固有值膨胀一个相对论因子 $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$[8-13]．

Ott 根据传统的四维力矢量表达式[8]，重新计算了 P-E 学派的引导力与引导功，得出只受同速热源传热的匀速运动系统所受引导力及其引导功“最后消失”．在删除了引导力与引导功之后，O-M 学派得出了热量温度膨胀的相反结果．

本文以引导力四维表达式为基础，研究了2物体的非弹性碰撞过程，并把四维动量守恒方程推广到理想气体系统．在所选框架下，用热力学定律计算热量的相对变换，并对微元过程与整体过程的热力学规律作出证明．

1 引导力与引导功[14-16]

相对论四维力矢量定义为四维动量 $P_\mu\left[P_\mu=\left(\boldsymbol{P},\frac{i}{c}E\right),(\mu=1,2,3,4)\right]$ 对本征时（固有时）τ 的变化率．通常的相对论力是通过改变物体的三维速度 v 而导致其动量变化的机械作用，暂且称为常规力．在常规力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下物体的静质量 m^0 不变．若位矢 $x_\mu=(x_{1,2,3},x_4=ict)$，常规力的相对论形式为[2]

$$F_\mu=\{\boldsymbol{F},F_4\}=\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\left\{\gamma\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t},\frac{i}{c}\gamma\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right\}=\left\{\boldsymbol{F},\frac{i}{c}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\right\},(\mathrm{d}t=\gamma\mathrm{d}\tau,m^0=\mathrm{const})\tag{1}$$

式中 E,t 分别为物体的能量与运动时，

常规四维力矢量的模方必是个洛伦兹标量，应等于在本体参考系的数值（在本体参考系中物体的三维总动量或整体三维速度为零，此参考系也称为相对论动量中心参考系或固有参考系，用右上标数字0来表示物理量）

$$F_\mu F_\mu=F_\mu^0F_\mu^0=\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2-0^2>0\tag{2}$$

其中已经采用爱因斯坦求和惯例（下同）．式(2)显示，四维常规力的模方为正，是类空矢量其时间分量（功

收稿日期：2006-03-15．
基金项目：河北省自然科学基金资助项目(A2005000090)．
作者简介：李双九(1947-)，男，河北保定人，教授．

率)在本体(固有)参考系可化为零. 变换到实验室参考系,由于受力物体有了非零的总动量或整体速度,这个四维力就有了非零的时间分量(功率),式(1)形式的常规力力只适用于静质量不变而三维速度变化的过程. 在众多物理现象中还有另一种相反形式的的三维动量变化过程:物体的三维速度不变化而其静质量随时间变化,例如(实验室参考系中)匀速物体接受外界(与物体同速的热源)热量的过程. 在这样的过程中,匀速物体的静质量变化进而三维动量同样随着时间变化,它也必然受力,只不过在本体参考系中由于物体速度恒为零,这个三维力消失. 或者说,仅因静质量变化的常速物体受到的三维力在从本体参考系过渡到实验室参考系中将会自动产生,这个力 $\boldsymbol{G}$(用固有时量度的动量变化率)称为引导力[8]. 按照相对论四维力[17]的定义,引导力的四维形式为

$$G_\mu=\{\boldsymbol{G},G_4\}=\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}=\left\{\gamma\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m^0}{\mathrm{d}\tau},\frac{i}{c}\gamma c^2\frac{\mathrm{d}m^0}{\mathrm{d}\tau}\right\},G_\mu^0=\{\boldsymbol{0},ic\mathrm{d}m^0/\mathrm{d}\tau\}(\mu=1,2,3,4)\tag{3}$$

$$G_\mu G_\mu=G_\mu^0G_\mu^0=0-c^2(\mathrm{d}m^0/\mathrm{d}\tau)^2<0\tag{4}$$

式(3)中的引导力为类时矢量(模方为负),其时间分量永不为零,在本体参考系中空间分量为零.

由式(3)计算出整体常速的受热系统所接受外界的引导力和引导功. 设外界传给热力学系统的微元热量在本征系和实验室系分别为 δQ^0 与 δQ,前者除以光速平方即为常速物体静质量的变化值. 常速系统因受热所受到的三维引导力 $\boldsymbol{K}$(用运动时量度的动量变化率)及其引导功 $\delta A'$ 为

$$\boldsymbol{K}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m^0}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\delta Q^0/c^2}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},\beta=v/c\tag{5}$$

$$\delta A'=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\frac{\delta Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}}v^2/c^2\tag{6}$$

2　非弹性碰撞过程中的引导功

在本体参考系 Σ^0 中热力学系统的总动量为零,或者说系统的“相对论动量中心”处于静止状态,而在实验室参考系 Σ 中本体系 Σ^0 以速度 $\boldsymbol{v}$ 作匀速直线平动. 首先研究2个物体组成的热力学系统. 在实验室系 Σ 中,静质量、平动速度分别是(m_1^0, $\boldsymbol{v}_1$)和(m_2^0, $\boldsymbol{v}_2$)的2个物体做非弹性碰撞,碰撞后的共同速度为 $\boldsymbol{v}$. 在这一碰撞过程中认定动能转化成热量而没有转化成旋转能和分子中的激发能. 在非弹性碰撞中,两物体的总动量是守恒的. 如果把刚刚碰撞以后的以共同速度运动的共同体与产生的热量(的载体)也包括进去,则总能量也守恒,虽然机械能并不守恒. 当然,生成的热量终究要散发到环境中去,物体散热时对环境要施加引导力,作引导功. 由于三维动量与能量组成四维矢量,对于不受压强的包括热量载体在内的封闭系统来说,碰撞过程必然满足四维动量守恒方程.

设碰撞前2物体和碰撞后的共同体的速度为分别为 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}$. 对应的四维速度分别为

$$\Gamma_\mu^{(1)}=\frac{(\boldsymbol{v}_1,ic)}{\sqrt{1-v_1^2/c^2}},\Gamma_\mu^{(2)}=\frac{(\boldsymbol{v}_2,ic)}{\sqrt{1-v_2^2/c^2}}\text{和 }\Gamma_\mu=\frac{(\boldsymbol{v},ic)}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

则四维动量守恒的碰撞方程及其时间分量分别为

$$m_1^0\Gamma_\mu^{(1)}+m_2^0\Gamma_\mu^{(2)}=M^0\Gamma_\mu\tag{7}$$

$$\frac{m_1^0c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}+\frac{m_2^0c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}=\frac{M^0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\tag{8}$$

碰撞后的共同体的静质量 $M^0\neq m_1^0+m_2^0$,否则由式(7)即可得出碰撞后速度为2个物体碰撞前状态的函数,使得碰撞后 Γ_μ 的模方与碰撞前两物体的状态有关. 但由相对论运动学知,Γ_μ 的模方是洛伦兹标量,它等于固有参考系数值($\Gamma_\mu^0\Gamma_\mu^0=-c^2$),该模方是个常数.

碰撞前后静质量并不守恒,静质量的变化联系到本体系所测量到的固有热量 δQ^0,这个热量在实验室参考系中应记为相对论的运动热量 δQ. 可以看出,在本体系测量的2个物体碰撞前后的静质量增量以及它所联系到的热量为

$$\Delta m^0=M^0-(m_1^0+m_2^0),\delta Q^0=\Delta m^0c^2\tag{9}$$

现在设计个思想实验(thought experiment),由外界的常规力作功改变2个物体共同体的速度,使得碰后同速运动的2物体恢复到碰前的分离状态,设外界常规力所输入的机械功为 $-\delta A$,或者说系统对外界做功 $+\delta A$,则与此功相对应的能量差为

$$\frac{m_1^0c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}+\frac{m_2^0c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}-\frac{(m_1^0+m_2^0)c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}=|\delta A|=-\delta A \tag{10}$$

2个物体经过1个循环恢复原态,能量总增量为零.(在实验室参考系中)向外界放出的相对论热量 δQ 必等于从外界输入的总功,或者说吸收外界的热量($-\delta Q$)等于对外界作的总功.已知在碰撞以后的散热过程中作为常速共同体的(热)力学系统的静质量是变化的,因此存在引导力,由(6)式,对应的引导功为

$$\delta A_1=\frac{\Delta m^0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{\delta Q^0v^2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{11}$$

因为总功中应包括系统循环的放热阶段对外界作的引导功,前者(总功)等于吸收的相对论热量($-\delta Q$),故有

$$-\delta Q=\delta A_1+\delta A=\frac{\delta Q^0v^2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{(m_1^0+m_2^0)}{\sqrt{1-\beta^2}}-\left(\frac{m_1^0c^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}}+\frac{m_2^0c^2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\right) \tag{12}$$

将(7)~(9)式带入上式,得

$$\delta Q=\delta Q^0\sqrt{1-\beta^2} \tag{13}$$

从式(13)看到,考虑了引导力与引导功以后,二体模型中的非弹性碰撞微元过程中产生的运动热量比固有热量收缩一个相对论因子,这与用其他方法导出的P-E理论的结果完全一致.

3 理想气体系统的相对论热量

前面的二体非弹性碰撞过程,很容易被推广到 n 个质量(物体)的组合系统.设第 k 个($k=1,\cdots,n$)静质量 m_k^0 原来('碰撞'前)具有的四维速度在实验室系与本征系分别为 $\Gamma_\mu^{(k)}=\frac{\{\boldsymbol{v}_k,ic\}}{\sqrt{1-(v_k/c)^2}}\equiv\frac{\{\boldsymbol{v}_k,ic\}}{\sqrt{1-\beta_k^2}}$, $\Gamma_\mu^{(k)0}=\frac{\{\boldsymbol{v}_k^0,ic\}}{\sqrt{1-(v_k^0/c)^2}}\equiv\frac{\{\boldsymbol{v}_k^0,ic\}}{\sqrt{1-(\beta_k^0)^2}}$.在本征系,$n$ 个静质量的组合系统向外界放出总热量 $Q^0=\sum\delta Q^0=\Delta m^0c^2$.经"非弹性碰撞"以后各个质量对本征系都静止,这个以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的共同体以及各个成员的四维速度在实验室系与本征系(碰撞后)分别为 $\Gamma_\mu\Gamma_\mu^{(k)}=\{\gamma\boldsymbol{v},i\gamma c\}=\frac{\{\boldsymbol{v},ic\}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $\Gamma_\mu^0\Gamma_\mu^{(k)0}=\{0,0,0,ic\}$.完全类似于二体系统,非弹性碰撞中多体系统的四维动量守恒方程适合于一切参考系,满足

$$\sum m_k^0\Gamma_\mu^{(k)}=\left(\sum m_k^0+\Delta m^0\right)\Gamma_\mu \tag{14}$$

$$\sum\frac{m_k^0c^2}{\sqrt{1-\beta_k^2}}=\sum\frac{m_k^0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}},(\beta\equiv v/c,Q^0=\Delta m^0c^2) \tag{15}$$

利用式(14)来确定理想气体系统的相对论(总)热量.设('碰撞'前本体参考系中第 k 个分子的三维速度是 $\boldsymbol{v}_k^0$,含有容器壁的封闭理想气体系统中整体(或容器壁)静止,总动量为零

$$\sum\frac{m_k^0\boldsymbol{v}_k^0}{\sqrt{1-(\beta_k^0)^2}} \tag{16}$$

为了利用方程式(14),必须把第2节的思想实验设计成能适用于多体非弹性碰撞方程.注意在上面的推导中只用到了"碰前速度不同而碰后速度相同"的条件,因此这里也只需要初态各个分子具有不同的速度,末态各个分子具有相同的速度.广义非弹性碰撞的中间过程的细节并不重要.但这个过程意味着停止各个分子的无规则热运动即抽走该气体系统中的热量,直到所有分子在本征参考系中都处于静止状态(当然这时在实验室参考系中,这些'分子共同体'具有共同的非零速度).那么,在本征参考系测量的这个热量为

$$Q^0=\sum\frac{m_k^0c^2}{\sqrt{1-(\beta_k^0)^2}}-\sum m_k^0c^2>0 \tag{17}$$

但在实验室参考系中要发生热交换，所有分子最后都达到具有相同的速度．这个过程中气体系统要放出(被抽走)热量 Q，整个常速系统的静质量当然要发生变化，因此，对外界作出引导功

$$A_1=\frac{Q^0v^2/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}>0 \tag{18}$$

在上述抽走热量的过程中，可以反向认定系统吸收热量 $-Q<0$，接受外界的(引导)功 $-A_1<0$，而由式(15)得出能量增加量为

$$\Delta E=\sum\frac{m_k^0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}-\sum\frac{m_k^0c^2}{\sqrt{1-\beta_k^2}}=-\frac{Q^0}{\sqrt{1-\beta^2}}<0 \tag{19a}$$

根据热力学第一定律，系统的能量增量等于所吸收的热量加上所接受的外功

$$\Delta E=(-Q)+(-A_1) \tag{19b}$$

将(18)、(19a)代入(19b)，得

$$Q=Q^0\sqrt{1-\beta^2}=\gamma^{-1}Q^0 \tag{20}$$

式(20)显示，与微元碰撞过程一样，理想气体系统整体的相对论运动热量比整体固有热量也收缩 γ^{-1} 因子，从而进一步证实了相对论热力学的 P-E 理论．

4　结束语

常速物体系统仅因传热而改变静质量所受到的或对外所施加的引导力只在实验室参考系存在，在本体参考系因三维总动量恒为零而消失．

若热力学系统达到热平衡[6]，整个系统将有一个共同的运动温度 T 和固有温度 T^0．这时由于热力学熵 S 是洛伦兹标量[1-10]，$\frac{\delta Q}{T}=S=S^0=\frac{\delta Q^0}{T^0}$，由热量的收缩关系必然导致 P-E 理论的温度收缩关系 $T=T^0\sqrt{1-v^2/c^2}$．

常规力的类空表达式不适于引导力，Ott 把引导力写成类空形式[8]，是导致‘引导力最后消失’的根本原因．把类时引导力纳入相对论热力学以后，无论是微元热过程，还是整体热过程，热量与温度的相对论收缩(即 P-E 理论)就成为不可避免的结果，这里的非弹性碰撞过程就是一个明显例证．

参考文献：

[1] 爱因斯坦 A. 爱因斯坦文集(第二卷)[M]. 范岱年，赵中立，许良英译. 北京：商务印书馆，1979.

[2] TOLMAN R C. Relativity, Thermodynamics and cosmology[M]. Oxford: Pergamon Press, 1950.

[3] 泡利 W. 相对论[M]. 凌德洪，周万生，译. 上海：上海科学技术出版社，1958.

[4] PATHRIA R K. Statistical mechanics[M]. Oxford: Pergamon Press, 1972.

[5] 谈镐生，朱如曾，谢文豹. 关于相对论热力学中的温度变换[J]. 中国科学(A 辑)，1982，12(3)：244-253.
TAN Gao-sheng, ZHU Ru-zeng, XIE Wen-bao. The transformation of temperature in relativistic thermordynamics[J]. Science in China (Series A), 1982, 12(3): 244-253. (in Chinese)

[6] 李双九. 爱因斯坦转盘上的热平衡及其时空对偶性[J]. 物理学报，2004，53(10)：3252-3257.
LI Shuang-jiu. Thermal equilibrium of a fluid system on Einstein turntable and its space-time duality[J]. Acta Physica Sinica, 2004, 53(10): 3252-3257. (in Chinese)

[7] 沈惠川. 分析热力学的应用：平衡态热力学中的温度的相对论变换[J]. 物理学报，2005，54(6)：2482-2487.
SHEN Hui-chuan. Application of analytical thermodynamics relativistic transformation of temperature in equilibrium thermodynamics[J]. Acta Physica Sinca, 2005, 54(6): 2482-2487. (in Chinese)

[8] OTT H. Lorentz-transformation der wärme und temperature[J]. Zeitschrift für physik, 1963, 175(1): 70-104.

[9] 李复玲. 相对论热力学的进展[J]. 物理学进展，1989，9(3)：362-383.

LI Fu-ling. Progress of relativistic thermodynamics[J]. Progress in physics, 1989, 9(3): 362-383. (in Chinese)
[10] 刘泽文. 相对论热力学向量理论[J]. 中国科学(A辑), 1994, 24(9): 933-940.
LIU Ze-wen. Vector theory of relativistic thermodynamics[J]. Science in China(Series A), 1994, 24(9): 933-940. (in Chinese)
[11] 刘录新. 相对论热力学向量理论对 Schwazschild 场中物质系统特性的研究[J]. 物理学报, 1997, 46(12): 2300-2304.
LIU Lu-xin. Applications of the theory of relativistic thermodynamics to the schwarzschild matter systym in the gravitational field[J]. Acta Physica Sinica, 1997, 46(12): 2300-2304. (in Chinese)
[12] 陆全康. 相对论热力学的 TdS 方程[J]. 复旦学报(自然科学版), 1997, 36(3): 275-279.
LU Quan-kang. TdS equation of relativistic thermodynamics[J]. Journal of Fudan University (Natural Science), 1997, 36(3): 275 - 279. (in Chinese)
[13] VEITSMAN E V. On relativistic surface tension[J]. Journal of Colloid and Interface of Science, 2003, 265(1): 174-178.
[14] 李双九. 相对论流体的压强与 Landsberg 温度佯谬[J]. 北京工业大学学报, 2003, 29(3): 225-228.
LI Shuang-jiu. Pressure of relativistic fluid and Landsberg's temperature paradox[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2003, 29(2): 225-228. (in Chinese)
[15] 李双九, 尚瑞岗, 刘喜排, 等. 类时引导力与运动流体温度收缩关系的新论证[J]. 河北大学学报(自然科学版), 2005, 25(2): 144-148.
LI Shuang-jiu, SHANG Rui-gang, LIU Xi-pai, et al. Time-like leading-force and new proof of motion-temperature contraction[J]. Journal of Hebei University (Natural Science Edition), 2005, 25(2): 144-148. (in Chinese)
[16] 聂金柱, 李双九. 论动体温度变换和热力学定律的协变形式[J]. 河北大学学报(自然科学版), 1994, 14(3): 20-23.
NIE Jin-zhu, LI Shuang-jiu. On the temperature transformation of moving body and the covariant formalism of thermodynamics law[J]. Journal of Hebei University (Natural Science Edition), 1994, 14(3): 20-23. (in Chinese)
[17] 刘泽文. Minkovski 时空中的四维力[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(3): 370-372.
LIU Ze-wen. 4-dimentional force in Minkowski spacetime[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(3): 370-372. (in Chinese)

Leading-force in Process of Inelastic Collision and Relativistic Quantity of Heat of Ideal Gas System

LI Shuang-jiu, WANG Na, SHANG Rui-gang, GUO Jian-xin
(College of Physics Science and Technology, Hebei University, Hebei Baoding 071002, China)

Abstract: In order to clarify whether heated object moving in homogeneous velocity receives leading-force and leading-work, the changes of total momentum of heated object at uniform velocity is analyzed from space-time attribute of physical quantity in special relativity, and the objective fact of producing time-like leading-force 4-vector only because of changing proper-mass is pointed out. The concepts of leading-force and leading-work in laboratory-reference-system are established and the process of inelastic collision between two bodies is examed. Using thermodynamic law, the leading-force, leading-work, and relativistic quantity of heat are calculated. We find that the relativistic quantity of heat is contractive than proper quantity of heat in infinitesimal process. 4-momentum-conservation equation is used in manybody system of ideal gas, and the contractive factor $\sqrt{1 - v_2/c_2}$ of the motion quantity of heat of closed global system is evaluated. It is exactly consistent with that of Planck-Einstein school. This result further validates P-E theory in relativistic thermodynamics.

Key words: thermodynamics; special relativity; inelastic collision; leading-force; ideal gas