

求“圆度”程序

罗适之

(光仪教研室)

摘 要

本文分析了圆度误差的存在性和唯一性, 讨论了圆度误差的计算方法。并进一步介绍了用 0.618 法计算圆度误差的程序, 给出了详细的程序框图。

Programming for Evaluation of Roundness Errors

Luo Shi-zhi

Abstract

The existence and singularity of roundness errors are analysed in this paper. The method to evaluate the roundness errors has also been discussed. Programming by using the 0.618 method to evaluate roundness errors is introduced, and its flow chart is also given in details.

一、概 述

根据“表面形状和位置公差”新的标准, 实际轮廓圆的形状误差, 主要用圆度来评定。圆度误差的定义是包容同一横剖面实际轮廓, 且半径差为最小的两个同心圆间的距离 Δ , 如图 1。

圆度的测量可在圆度仪上进行, 亦可用光学分度头和测微计联合测量。要得到准确的圆度误差, 首先要求测量精度足够高, 要求测量点数足够多。但是按照定义, 找出符合 Δ 为最小值的误差值, 还需要一定的评定方法。本文从圆度的定义出发, 分析各种计算方法, 最后编出程序, 能够根据已知的测量数据, 在电子计算机上较准确的算出圆度。也为设计圆度仪的演算装置提供二种计算方法。

本文于 1980 年 5 月 10 日收到

二、原理分析

如图2, 对实际轮廓圆, 我们以圆心 O 为测量中心, 测得了一系列点的半径 r_i , 以极坐标表示, 有 (r_i, α_i) , $i=1, 2, \dots, N$, 表示测点号, α —转角。

为了方便, 把测点的极坐标换算到直角坐标, 有

$$\begin{cases} x_i = r_i \cos \alpha_i \\ y_i = r_i \sin \alpha_i \end{cases} \quad (1)$$

从而可得到一系列测点的坐标值 (x_i, y_i) 。

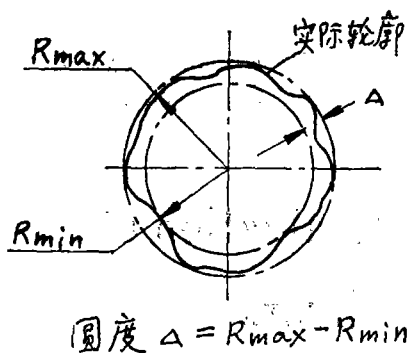


图1

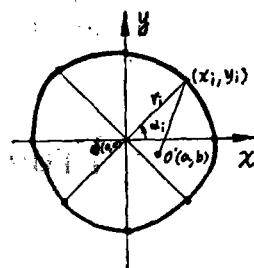


图2

假定一新圆心 $O'(a, b)$, 则各测点到新圆心的距离为

$$R_i = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2}, \quad (2)$$

从而得到一系列新的半径 R_i , 从中找出最大的 R_{\max} 与最小的 R_{\min} , 则以新圆心为中心, 以 R_{\max} 、 R_{\min} 为半径的两个同心圆, 必定包容实际轮廓圆, 它们的半径差为

$$\Delta = R_{\max} - R_{\min}. \quad (3)$$

移动新圆心 $O'(a, b)$, 即有新的 Δ 值, Δ 为随 (a, b) 变化的函数。当 $\Delta = \Delta_{\min}$ = 最小时, 这时的 (a, b) 即为理想圆心, Δ_{\min} 即实际轮廓圆的圆度误差。

(3)式称为圆度函数, 以 $\Delta = \Delta(a, b)$ 表示之(为书写方便, 这里用同一符号表示相应的函数)。当在 a, b 二个变量中固定一个数值, 只让一个变量变时, 也写成 $\Delta = \Delta(a)$, 或 $\Delta = \Delta(b)$ 。

由于 $O'(a, b)$ 是在实际轮廓圆的内部变化, 由(2)式所得的 R_i 值应满足 $0 < R_i < m$, 式中 m 为一正实数, 它应小于或等于实际轮廓圆的最大直径。进而由(3)式所得的 Δ 也应满足 $0 < \Delta < m$, 即函数 Δ 是有一定的变化范围的。当计算时采用有限的点, 所得的 Δ 为一数集, 则 Δ 为有上下界的数集, 因而可以推知最小的 Δ 是必定存在的。这就说明了符合定义的圆度误差的存在性。

至于最小 Δ 的“唯一性”问题, [1]指出, 可找出特例来说明最小 Δ 不都是唯一的。我们认为实际轮廓圆可能有二个或二个以上的理想圆心, 都得到相同的最小 Δ 值(如不是相同的数值, 其中的大者就不是最小 Δ)。从实际需要来说, 找到这些最小 Δ 值中的任一个,

也就是找到了符合定义的圆度误差。这就是说符合定义的圆度误差在数值上仍是唯一的。

三、解析法求圆度

当实际轮廓圆以公式来表达时，我们可以试用解析法直接解出圆度 Δ_{\min} 。假定已知轮廓圆为圆形，其方程式为

$$x^2 + y^2 = C^2, \quad (4)$$

则 $y = \pm \sqrt{C^2 - x^2}$,

代入(2)式有

$$R^2 = (x-a)^2 + (\pm \sqrt{C^2 - x^2} - b)^2. \quad (5)$$

(5)式表示在圆形内部任取一新圆心 $O'(a, b)$ 时，圆上各点到新圆心的距离。为了求得 R 的极值 R_{\max} 和 R_{\min} ，我们对(5)式求导数得：

$$R' = (-a \pm \frac{bx}{\sqrt{C^2 - x^2}}) / R.$$

令 $R' = 0$ ，解得：

$$x = \pm \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (6)$$

利用(6)、(4)二式就可求出新圆心在 $O'(a, b)$ 时，最大、最小半径所在的测点坐标。

为求出极值 R_{\max} 和 R_{\min} ，把(6)式代入(5)式，并经过化简得到

$$R_m = C \pm \sqrt{a^2 + b^2} \quad (7)$$

(7)式是 R_{\max} 、 R_{\min} 随 (a, b) 变化的公式，(7)式中取“+”时， R_m 为 R_{\max} ，取“-”时， R_m 为 R_{\min} 。

$$\begin{cases} R_{\max} = C + \sqrt{a^2 + b^2} \\ R_{\min} = C - \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \quad (8)$$

(7)式可进一步化为：

$$(R_m - C)^2 = a^2 + b^2 \quad (9)$$

令 $R'_m = R_m - C$ ，则上式可化为

$$a^2 + b^2 - R'^2_m = 0. \quad (10)$$

这是一个齐次的二次方程，它表示一个顶点在原点的锥面，要确定这个锥面只要给出一条准线就行了。用平面 $R'_m = W$ 去截它，就得到一条准线：

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = W^2 \\ R'_m = W \end{cases}$$

显然这是一个圆，因而方程式(10)表示顶点在原点的圆锥面，如图3(a)所示。图中顶点上面的为 R_{\max} ，顶点下面为 R_{\min} 。

把(8)代入(3)式，有

$$\Delta(a, b) = R_{\max} - R_{\min} = 2\sqrt{a^2 + b^2}, \quad (11)$$

这就是轮廓圆为圆形时的圆度函数。(11)式仍是一个顶点在原点的圆锥面，只是母线斜率比(10)式大一倍，如图3(b)所示。由(11)式知 $\Delta(a, b)$ 只有正值，所以图3(b)中圆锥没有顶点以下的部分。

在图3(a)中, $\Delta(a, b)$ 是由 R_{\max} 面和 R_{\min} 面所截出的垂直距离。

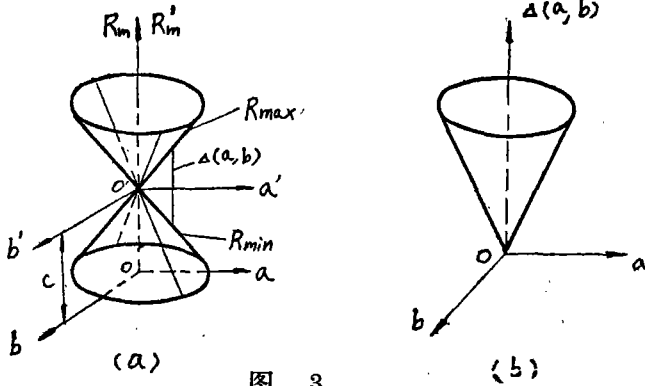


图 3

由图3(b), 可以明显地看出, 在 $a=0, b=0$ 处, Δ 有唯一的最小值。把 $a=0, b=0$ 代入(11)式可得到

$$\Delta_{\min} = \Delta(0, 0) = 0$$

这就是所要求的实际轮廓圆为圆形时的圆度误差。由于(11)式有唯一的最小值点(0,0), 这就说明了圆形的圆度函数是单峰函数。

如用 $b=b_0$ (常数) 的平面去

截图3(a)所示的圆锥面, 得到准线为等轴双曲线。

$$\begin{cases} \frac{R_m'^2}{b_0^2} - \frac{a^2}{b_0^2} = 1 \\ b = b_0 \end{cases} \quad (12)$$

作图于图4。图4说明了当把 b 看成常数时 R_m 单随 a 变化的情况, 也可看出 $\Delta(a, b)$ 单随 a 变化的情况。当 $a=0$ 时, 有唯一的极小值 $\Delta(a) = 2b$ 。

上面提供了一种求圆度误差的方法, 但这种方法在技术测量中是很难应用的, 因为实际测量所给出的是表格函数, 只有有限测点上的数据, 不能给出连续、且可求导数的公式, 因此还需探索别的方法来求圆度。

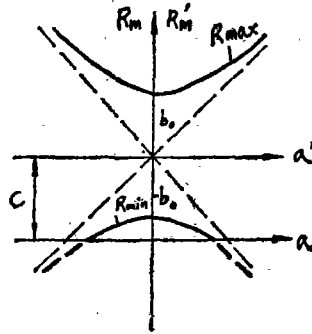


图 4

四、轮廓圆为有限点时求圆度的方法。

先看任一测点 (x_i, y_i) 的半径 R_i 是如何随新圆心 (a, b) 变化的。由(2)式有

$$R_i^2 = (x_i - a)^2 + (y_i - b)^2,$$

式中 x_i, y_i 是已知数, 令 $a' = x_i - a, b' = y_i - b$, 有

$$a'^2 + b'^2 - R_i^2 = 0. \quad (13)$$

同(10)式形式一样, 这是一个以 $a'=0, b'=0$ (即 $a=x_i, b=y_i$) 为顶点的圆锥面, 母线的斜率为1 (45°角), 如图5所示。由于 R_i 只能为正, 所以圆锥面只取顶点以上的部分。

如果轮廓圆有多个测点, 则以各测点的坐标为顶点, 可分别作出圆锥面 R_1, R_2, R_3, \dots 。当有新圆心 $O'(a, b)$, 可在 O' 点作 xoy 面的垂线, 垂线与 R_1 锥面相交于 m , 与 R_2 相交于 n, \dots , 则 m, n, \dots 的 R 坐标值即表示 (x_1, y_1) 点、 (x_2, y_2) 点、 \dots 的半径。从中挑出最高点即 R_{\max} , 最低点即 R_{\min} 。而 $\Delta = R_{\max} - R_{\min}$, 即最高点和最低点的距离。

为便于进一步分析, 用 $b=b_0$ (常数) 的平面去截图5中所示的圆锥面, 由(13)式可得到准线为等轴双曲线。

$$\begin{cases} \frac{R_i^2}{(y_i - b_0)^2} - \frac{(x_i - a)^2}{(y_i - b_0)^2} = 1 \\ b = b_0 \end{cases} \quad (14)$$

如图6, 双曲线对称于 a 轴和 R'_i 轴, 顶点在 $a = x_i$ 和 $R_i = \pm (y_i - b_0)$, 有二个顶点, 即在 (x_i, y_i) 点和以 a 轴为对称轴的共轭点, 如图6中的1和1'、3和3'。它的渐近线方程为 $R_i = \pm (x_i - a)$, 从而可以很容易地作出 (x_i, y_i) 点随 a 变化的 R_i 曲线。

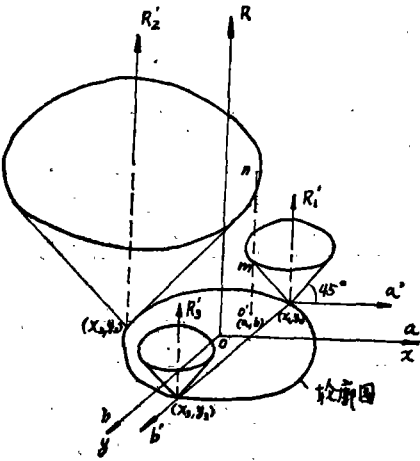


图 5

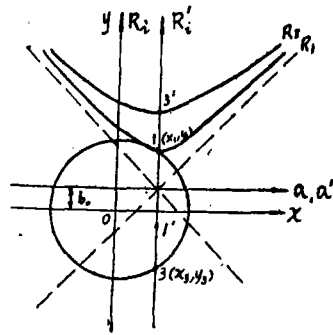


图 6

因为半径 R_i 必须为正值, 所以只能取 a 轴上面的一支双曲线。1 (x_i, y_i) 点在 a 轴上面, 可以 (x_i, y_i) 为顶点作出。3 (x_i, y_3) 在 a 轴下面, 则要以 a 轴为对称轴先作出其共轭点 3', 然后以 3' 为顶点作出。与图5对照看, 图6中的 R_i 系 $b = b_0$ 。平面截图5中 R_i 锥面的结果, 图6中的 R_i 系 $b = b_0$ 。平面截图5中 R_i 截面的结果。

当轮廓圆上有很多测点, 例图7中有1、2、3、4四个测点。由于4点在 a 轴下面, 先作出共轭点 4', 然后用上述方法分别作出 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 四条双曲线, 它们分别代表各测点在 a 变化时半径变化的情况。

当 $a = a_0$ 为某一定值时, 各测点的 R 值是很清楚的, 只要作一条 $a = a_0$ 的直线, 它与各 R_i 曲线相交点的纵坐标即是。最上面的交点即 R_{\max} , 最下面的交点即 R_{\min} 。

随着 a 的变化, 把所有最高点连在一起可得到 R_{\max} 线, 它是由 R_1 的 Cd 段加 R_2 的 de 段加 R_3 的 ef 段组成, 同理可作出 R_{\min} 线, 它由 $3gh1$ 组成, R_{\max} 线与 R_{\min} 线之间的距离就是圆度函数, $\Delta = \Delta(a)$, 距离最小的地方就是 Δ_{\min} 。

为找出距离最小点的坐标, 在测点少的时候, 可以

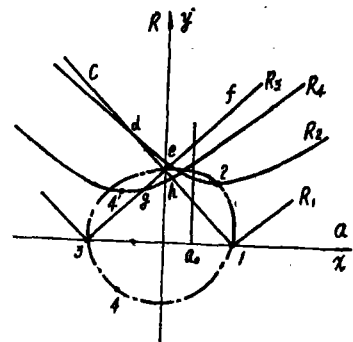


图 7

先作图初步判断出距离最小的地方，如图7中e点，再计算出坐标。e点是 R_2 、 R_3 所决定，对应的 R_{\min} 是 R_4 所决定，于是联立解 R_2 和 R_3 式可求得坐标 a_e ，并求得 R_{\max} ，把 a_e 代入 R_4 就可求得 R_{\min} ，进而求得 Δ_{\min} 。

由于距离最小处必定在d、e、g、h等交点中的一点，当无法判断距离最小在何处时，可以考虑把各 R_i 式两两组合以求得一系列a值，再求得各a值时的R值，进而求得 R_{\max} 、 R_{\min} 、 Δ ，比较各 Δ 的大小得到 Δ_{\min} 和对应的 a^* 。

这种算法计算复杂。优点是可以准确的找出 a^* 和 Δ_{\min} 。还可为以后圆度函数多峰性的讨论打下基础。

五、用优选法求圆度误差

我们采用最优化方法来寻找最小值点和圆度。圆度函数即优化时的目标函数或评价函数，是个单目标问题，自变量有a、b两个，是个二维问题。最优化方法种类很多，为了简单起见，这里采用直接方法。不利用导数来寻找方向，只计算目标函数值，直接比较，寻求目标函数下降的方向。又由于是二维问题，我们采用坐标轮换法，把二维问题降为一维问题。而一维方向的寻查则利用简单的0.618法。

1. 一维的寻查。我们假设 $\Delta = \Delta(a)$ 具有单峰性，如图8所示，即在所考虑的区间内部，函数 $\Delta(a)$ 有唯一的极小值点 a^* ，且函数 $\Delta(a)$ 在 a^* 之左下降，在 a^* 之右上升。并假设寻查区间 $[a_0, a_2]$ 已知，即已知极小值点 a^* 在 $[a_0, a_2]$ 中间。我们用0.618法来逐渐缩短寻查区间，最后找出在最小值点 a^* 附近的 Δ 值来作为 Δ_{\min} 。具体办法是在 $[a_0, a_2]$ 区间内取二点：

$$\begin{cases} a_1 = a_0 + 0.382 \times (a_2 - a_0) \\ a_3 = a_0 + 0.618 \times (a_2 - a_0) \end{cases} \quad (15)$$

并计算出函数值 $\Delta(a_1)$ 、 $\Delta(a_3)$ ，比较这两个函数值的大小。因 $\Delta(a)$ 为单峰函数，所以有：

① 当 $\Delta(a_1) < \Delta(a_3)$ ，则极小值点必在区间 $[a_0, a_3]$ 内，从而把寻找区间由 $[a_0, a_2]$ 缩短为 $[a_0, a_3]$ 。

② 当 $\Delta(a_1) > \Delta(a_3)$ ，则极小值点必在区间 $[a_1, a_2]$ 内，从而把寻找区间由 $[a_0, a_2]$ 缩短为 $[a_1, a_2]$ 。如图8。

无论那种情况，进一步缩短寻查区间，只需在已缩短的区间内再取一点，算出函数值，按上述方法比较取舍即可。

2. 如何确定开始的寻查区间 $[a_0, a_2]$ ？采用进退试算的方法。如已知初始点为 a_0 ，初始步长为 δa ，则 $a = a_0 + \delta a$ ，可算出 $\Delta(a_0)$ 、 $\Delta(a_1)$ 。

① 若 $\Delta(a_0) > \Delta(a_1)$ ，极小点还可能在 a_1 点之外，可加大步长继续向前寻找。用

$$a_2 = a_1 + \frac{0.618}{0.382} (a_1 - a_0) \quad (16)$$

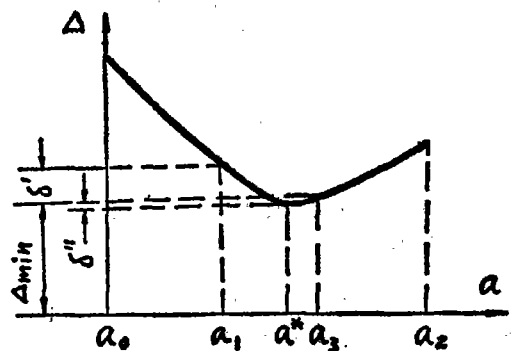


图 8

算出 a_2 ，并算出 $\Delta(a_2)$ 。比较 $\Delta(a_1)$ 与 $\Delta(a_2)$ 的大小，若 $\Delta(a_1) > \Delta(a_2)$ ，说明还要按上述办法继续向外寻查。若 $\Delta(a_1) \leq \Delta(a_2)$ ，则表示寻查区间已经找到，即最后的 $[a_0, a_2]$ ，如图 9(a) 所示。

② 若 $\Delta(a_0) \leq \Delta(a_1)$ ，说明极小值点在 a_1 的左边，就要调头向相反的方向寻找。为此把 a_0 和 a_1 的编号调换，以便应用(16)式求得 a_2 ，继续寻找。如图 9(b) 所示。

3. 坐标轮换。先把 b 固定在 b_0 ，单在 a 方向寻优，找到 Δ_{\min} 和好点 a^* 。然后把 a 固定在 a^* ，单在 b 方向寻优。接着又把 b 固定在好点 b^* ，在 a 方向寻优。反复进行，直到 a, b 二方向同时都符合迭代指标为止。

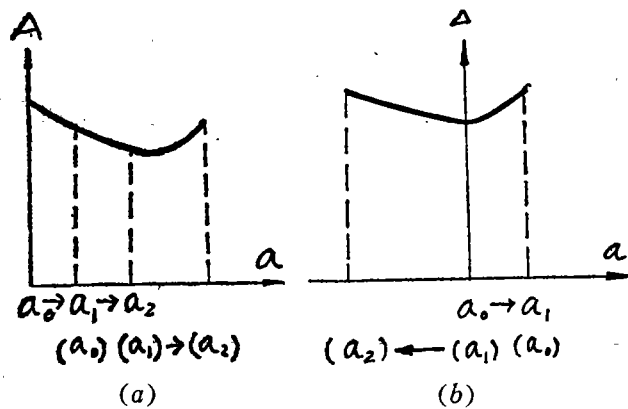


图 9

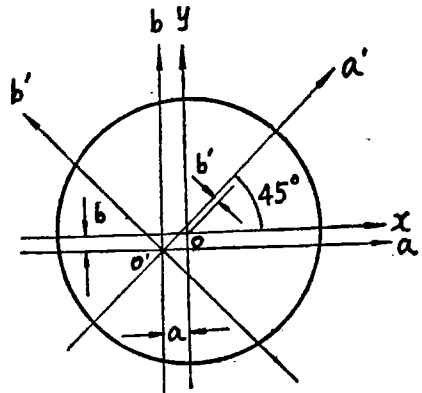


图 10

4. 有时我们采用在 45° 方向寻优，如图 10 中 a' 、 b' 方向。这时每给一点要同时给出 a, b 二者的数值，以保证假设的圆心都在 a' 轴上。当初始步长取 $\delta a = +0.707\epsilon$ 、 $\delta b = +0.707\epsilon$ ，且 a, b 二方向同时取数时，就是沿 a' 的方向寻优。当初始步长取 $\delta a = +0.707\epsilon$ 、 $\delta b = -0.707\epsilon$ 时，就是沿 b' 方向寻优。

为了共用子程序，在 a 方向寻优时，也让程序改变 b 值，但取初始步长 $\delta a = +\epsilon$ ， $\delta b = 0$ ，事实上 b 值是不变的。在 b 方向寻优，则取初始步长 $\delta a = 0$ ， $\delta b = +\epsilon$ 。

5. 计算精度和每次迭代指标：由图 8，计算前的区间为 $[a_0, a_2]$ ，以 $\Delta(a_1)$ 来确定圆度的数值，与 Δ_{\min} 比较，其误差为 δ' 。经过一次缩小区间的计算，得到新区间 $[a_1, a_2]$ 。以 $\Delta(a_2)$ 来确定圆度的数值，与 Δ_{\min} 比较，其误差为 δ'' 。显然 $\delta'' < \delta'$ ，即随着区间的减小， Δ 就越接近 Δ_{\min} 。因而我们可以把每次计算前的区间 $[a_0, a_2]$ 作为更换迭代的指标，当区间小于事先给定的 ϵ 值，就结束这次迭代。

$$\text{迭代指标: } \sqrt{(a_2 - a_0)^2 + (b_2 - b_0)^2} < \epsilon \quad (17)$$

在 a 方向寻优时， $b_2 = b_0$ ，(17) 式为 $a_2 - a_0 < \epsilon$ ，在 b 方向寻优时，同理(17) 式为 $b_2 - b_0 < \epsilon$ 。

ϵ 也是计算精度指标， ϵ 给得越小，计算出的 Δ 就越接近 Δ_{\min} ，计算精度也就越高。

六、圆度函数多峰性的讨论

在用 0.618 法时，必须假定目标函数为单峰函数，为此对圆度函数可能出现的多峰现象进行讨论，并相应地采取一些措施。

由图7可知, R_{\max} 线和 R_{\min} 线是由几段连续函数所组成, 所以 $\Delta(a)$ 也是连续函数, 但接点处一般无导数。判断某点为极小值点可以不管该点是否有导数, 但要求该点附近有导数, 当自变量渐增的经过该点时, 函数的导数由负变正。又由于 $\Delta = R_{\max} - R_{\min}$ 则导数 $\Delta' = R'_{\max} - R'_{\min}$, 即 Δ' 的符号取决于 R'_{\max} 和 R'_{\min} 的大小。

1. 图7中随 a 的增加, Δ 的变化列成下表:

$a < a_1$	$a_1 < a < a_2$	$a_2 < a < a_3$	$a > a_3$
$R'_{\max} < R'_{\min}$	$R'_{\max} < R'_{\min}$	$R'_{\max} > R'_{\min}$	$R'_{\max} > R'_{\min}$
$\Delta \downarrow$	$\Delta \downarrow$	$\Delta \uparrow$	$\Delta \uparrow$

a_1 点是唯一的一个极小值点, 因而图7的圆度函数是单峰函数。

2. 图11中轮廓圆是一个偏心圆。有1(1, 0)、2(0, 1)、3(-1, 0)、4(0, -1)四个测点。用图6的方法作各 R_i 曲线, 再得到 R_{\max} 线(cdef)和 R_{\min} 线(3ghi)。把各 R_i 曲线两两联立解得交点的坐标为

$$\begin{cases} a_1 = a_3 = b \\ a_2 = a_4 = -b \end{cases} \quad (18)$$

图11中随 a 的增加, Δ 的变化列成下表:

$a < a_1$	$a_1 < a < a_2$	$a_2 < a < a_3$	$a > a_3$
$R'_{\max} < R'_{\min}$	$R'_{\max} > R'_{\min}$	$R_{\max} < R'_{\min}$	$R'_{\max} > R'_{\min}$
$\Delta \downarrow$	$\Delta \uparrow$	$\Delta \downarrow$	$\Delta \uparrow$

a_1 和 a_3 都是极小值点, 因而图11的 $\Delta(a)$ 函数是多峰函数。

前已叙述, R_{\max} 线和 R_{\min} 线是由各 R_i 双曲线组成。由于双曲线在顶点附近改变斜率的符号, 进一步分析可得知, 单方向寻优时产生多峰现象多系 R_{\max} 线和 R_{\min} 线同时遇到了由 R_i 曲线顶点附近的线段组成, 这只有轮廓圆在较短的寻查区间 $a_1 a_2$ 内同时有 R_{\max} 和

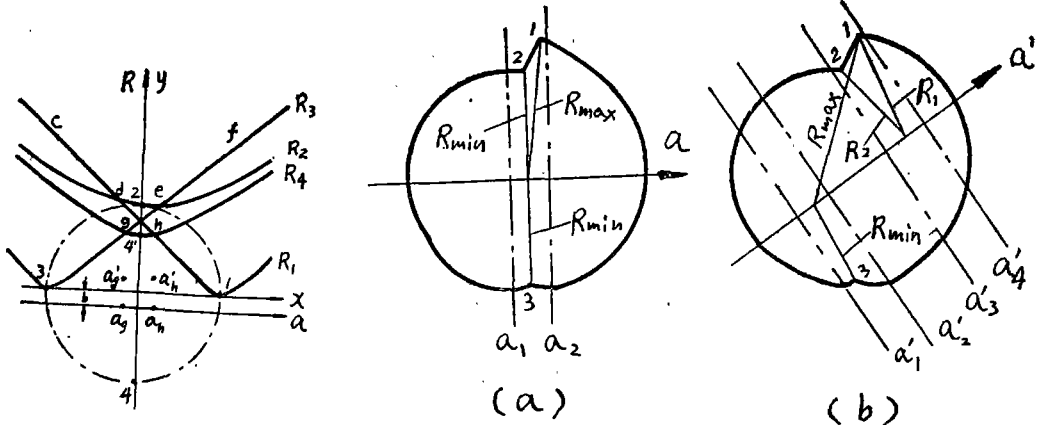


图 11

图 12

R_{\min} 点才有可能。如图12(a), $a_1 a_2$ 内同时有1、2或1、3, 就可能出现多峰现象。

3. 由于圆度要在 a 、 b 两个方向寻优, 只有 a 、 b 两个方向都为极小点, 才可能是 $\Delta(a, b)$ 函数的极小点, 因而我们把上述偏心圆沿 b 方向进行分析。对 b 方向寻优时, 把 a 固定在好点, 由图 11 知 a 的好点为 a_e (或 a_s), 所以在 b 的方向寻优时仍然是一个偏心圆问题。

原来的偏心量为 b , 现在的偏心量为 a_e (或 a_s) 由(18)式知其数量仍然为 b , 即偏心量不能逐渐减小, 保持为定值。这样就要形成 4 个局部极小点, 即图 11 中的 a_e 、 a_s 、 a'_e 、 a'_s 四点。它们之间相互的距离由最初的偏心量 b 所决定。这时的 $\Delta(a, b)$ 可能是一个多峰函数(单由 a 、 b 两个方向分析, 不能肯定 $\Delta(a, b)$ 是多峰函数), 按原来的寻优方法找不到真正的最小值点, 因而得不到圆度误差 Δ_{\min} 。这是固定二坐标轮换的优选方法应该克服的缺点。

4. 如果把偏心圆的测点增多, 在图 11 的基础上增加 $5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $7\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 四点, 按上述同样方法作图并计算, 得知当带有原始偏心 b 在 a 方向寻优时, 仍有二个极小值点 a_e 、 a_s 。但 $a_s = 0.414b$, $a_e = -0.414b$, 每迭代一次, 偏心量就要减小一次, 经过多次迭代, 就能找出最小值点和 Δ_{\min} 。因而上述偏心圆的 Δ 函数仍是一个单峰函数。

随着测点的增多, 每次偏心量的减小就更快。当圆形轮廓圆的测点连续时, 偏心圆在一方向寻优也是单峰的, 一次迭代就能把原始偏心消除, 如图 4 所示。因此用本办法求圆度时, 希望测点数尽可能多一点。

5. 为克服二坐标轮换可能进入局部极小的缺点, 增加新的寻优方向 a' 、 b' , 见图 10, 与 a 、 b 方向相差 45° 。如图 12(b) 在 a' 方向寻优, 当圆心在 a'_1 、 a'_2 区间, 虽然 1、3 点还是 R_{\max} 和 R_{\min} 点, 但 1 点已不在 a'_1 、 a'_2 区间内。在 a_3 、 a_4 区间, 虽然 1、2 点同时在区间内, 但 R_1 、 R_2 已经不是 R_{\max} 和 R_{\min} , 因而可以判断在 a' 方向寻优时图 12(b) 不出现多峰现象。

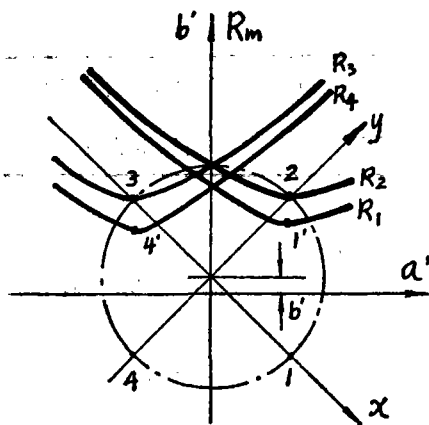


图 13

图 11 中产生多个极小值点的轮廓圆, 现重新选择寻优方向, 采用 a' 的方向。同样的四个测点, 图 13 的圆度函数 $\Delta(a')$ 是单峰函数, 有唯一的极小值点。

总之圆度函数在二个方向寻优时通常表现为单峰函数, 可用 0.618 法找到最小值, 因为 a 、 b 二个方向同时出现图 12(a) 的情况, 且迭代时不能逐渐减小的时候是极少的。在极特殊的情况下, 也可能出现多峰现象, 优化时就可能找不到最小值, 这时增加不同的方向寻优和增加测点数能够帮助寻找最小值。因此本程序在 a 、 b 二坐标轮换的基础上增加了在 a' 、 b' 方向的寻优。

0.618 法求圆度程序框图见附表一、附表二。

七、四点法求圆度误差

[2] 指出, 圆度误差判别法: 由两同心圆包容被测实际轮廓时, 至少有四个实测点内外

相间地在两个圆周上,如图 14 所示。此判别法的证明可见[3]。现利用这原理,找出一种求圆度的新方法。

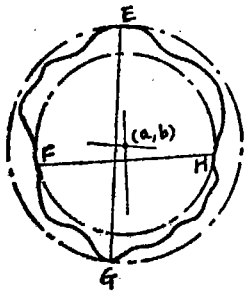


图 14

如图如果 E 、 F 、 G 、 H 四点的坐标已知,则理想圆心 (a, b) 必在 EG 的中垂线和 FH 的中垂线的交点上。两中垂线的方程如下

$$\begin{cases} b - \frac{v}{2} = \frac{P}{u} \left(a - \frac{q}{2} \right) \\ b - \frac{t}{2} = \frac{l}{s} \left(a - \frac{m}{2} \right) \end{cases} \quad (18)$$

式中 $l = X_H - X_F$, $m = X_H + X_F$, $P = X_G - X_E$, $q = X_G + X_E$, $S = y_H - y_F$, $t = y_H + y_F$, $u = y_G - y_E$, $v = y_G + y_E$ 。

联立解 (18) 式可得求圆心 a 、 b 的公式如下

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \frac{lmu + stu - pqs - uv s}{lu - sp} \\ b = \frac{1}{2} \frac{pql + uv l - lmp - st p}{lu - sp} \end{cases} \quad (19)$$

由于哪四个点是最大、最小点事先不知道,现采取排列组合的方法,在全部测点中每次取四个点来试算。每四点用 (19) 式求出 (a, b) , 并进而求出 $\Delta(a, b)$ 。把所有可能的四点组合都求出 $\Delta(a, b)$, 比较各 $\Delta(a, b)$ 的大小,最小的 $\Delta(a, b)$ 即圆度误差 Δ_{\min} 。

这种方法的程序框图见附表 3。

这种方法的优点是能够准确地找出 Δ_{\min} , 适合测点数不多时应用。缺点是测点数多时计算工作量太大。当测点数为 N 时,组合数 C_N^4 为

$$C_N^4 = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad (20)$$

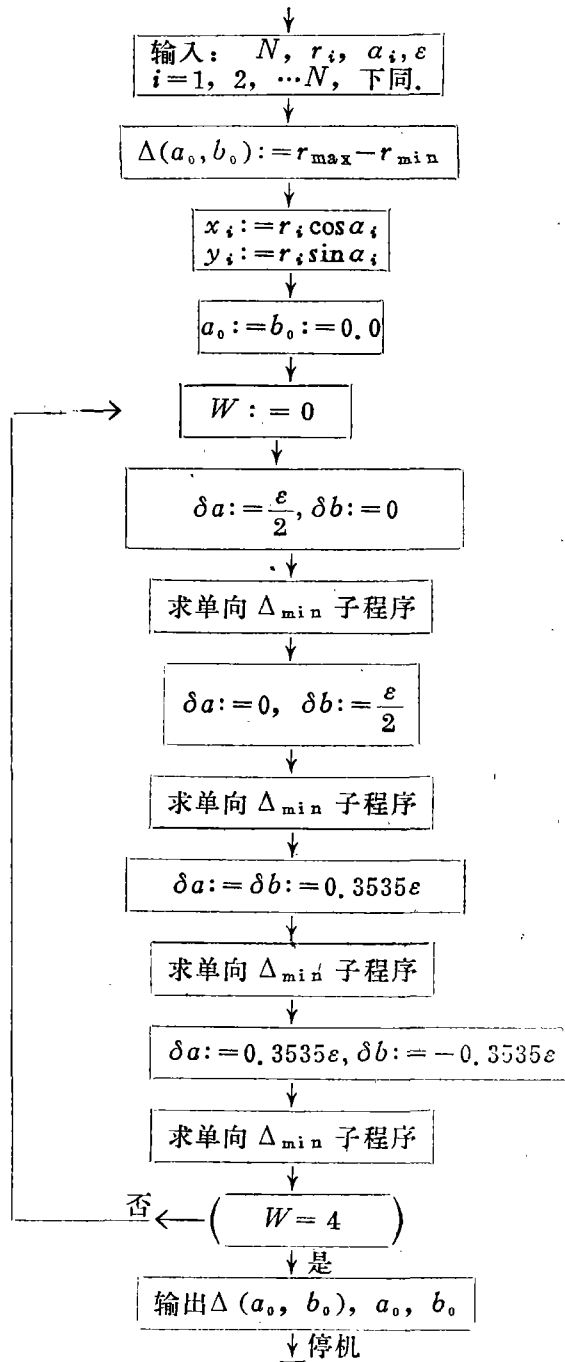
随着测点数的增加, C_N^4 的次数如下表:

N	8(45°—测点)	20(18°—测点)	36(10°—测点)	72(5°—测点)
C_N^4	70	4845	58905	1028790

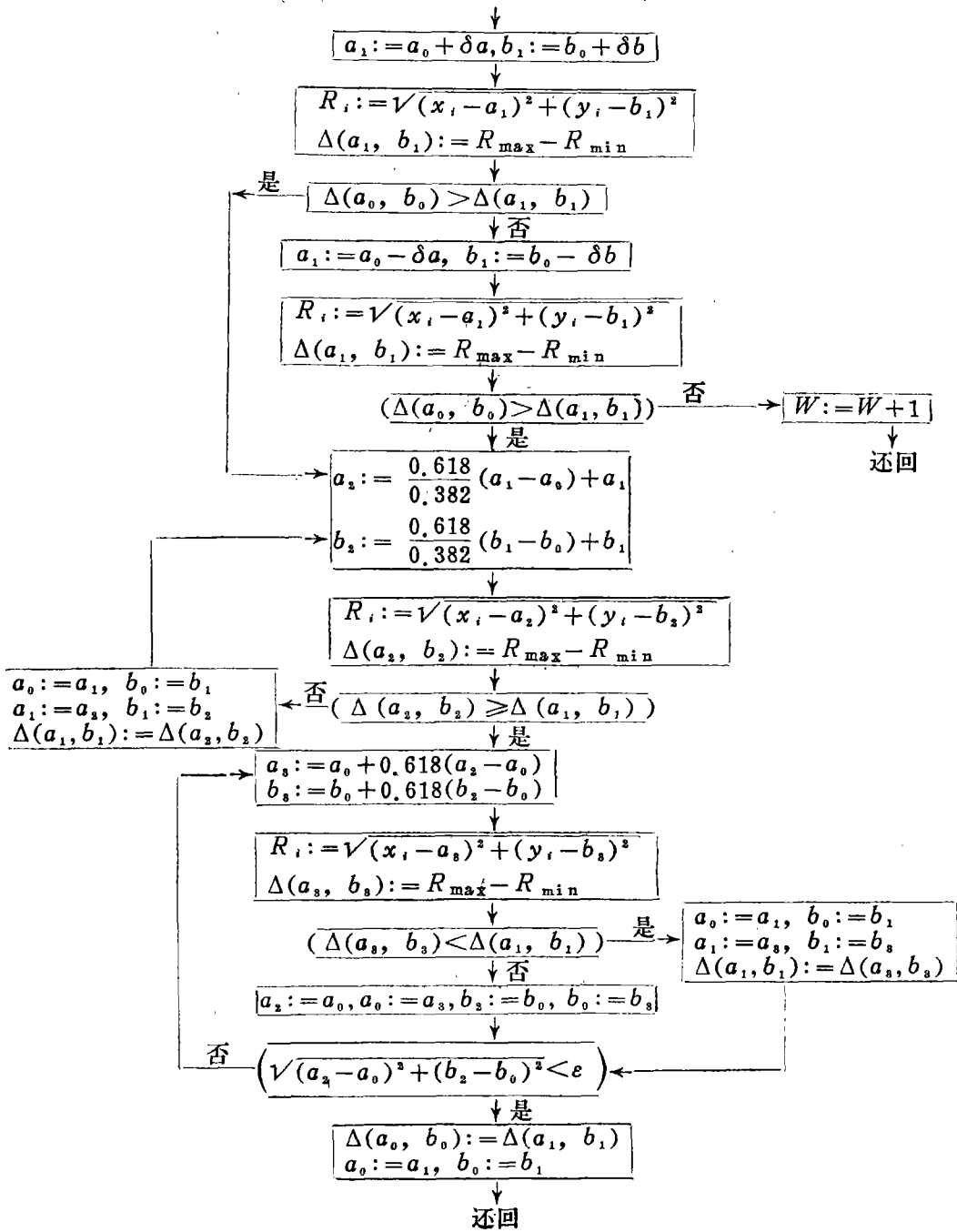
参 考 文 献

- [1] 虞容林, 关于“不圆度”的计算, 全国形位误差测试技术交流会资料, 77年9月。
- [2] 国家标准“形状和位置误差测量”(草案)征求意见稿, 79年8月。
- [3] 林洪桦, 应用函数逼近论分析形状误差测量结果的探讨, 全国形位误差测试技术交流会资料, 77年9月。
- [4] 计量院编, 形位误差测试技术资料汇编(美、英、西德、日、苏资料), 技术标准出版社, 77年。
- [5] 南京大学数学系, 最优化方法, 科学出版社, 78年。
- [6] 数学所, 优选法, 科学出版社, 78年。

附表1： 0.618法求园度主程序框图



附表2： 0.618法求单向 Δ_{\min} 子程序框图



附表 3：四点法求园度程序框图

