第15卷 第2期 北京工业大学学报 Vol.15, No.2
1989年6月 JOURNAL OF BEIJING POLYTECHNIC UNIVERSITY Jun., 1989

弹性力学的广义变分原理*

牛 库 均

（土木建筑工程学系）

【摘要】 突破传统的势能密度与余能密度的数学形式，利用拉氏乘子法[1]，建立了三类独立自变函数的广义泛函及其广义变分原理，以及各类新型的二类和一类独立自变函数的泛函及其变分原理。并证明了胡-鹫原理，Hellinger-Reissner 原理和广义余解原理[2]，[3]实质上都是二类独立自变函数的广义变分原理。

关键词：广义变分原理，拉氏乘子法，匹配问题

0 引 言

0.1 线性弹性理论的数学公式

已知弹性体Ω；在边界$2\Omega_1$上作用着已知的外力$\overline{P}_i$；在边界$2\Omega_2$上已知边界位驻$\overline{u_i}$；弹性体具有体积力为$\overline{F}_i$. 待解函数为应力函数σ_{ij}、应变函数ε_{ij}、位移函数u_i. 在静力条件下，弹性体的σ_{ij}、ε_{ij}、u_i之间应满足下面的数学方程：

平衡方程 $\sigma_{ij;ij}+\overline{F}_i=0$ （在Ω内） (0.1)

几何方程 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ （在Ω内） (0.2)

物理方程 $\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$ （在Ω内） (0.3.1)

或者为 $\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$ (0.3.2)

其中 $a_{ijkl}b_{ijmn}=\delta_{km}\delta_{ln}$ (0.4)

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

边界条件 $\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i=0$ （在$2\Omega_1$内） (0.5.1)

$u_i-\overline{u_i}=0$ （在$2\Omega_2$内） (0.5.2)

0.2 约束条件

为了便于讨论问题，把约束条件分为变分约束条件和一般约束条件[1]. 变分约束条件系指在求泛函极值时，泛函中的自变函数之间应满足的关系式. 变分约束条件可以通过拉氏乘子法，化为泛函求极值时所得的尤拉方程（一般称为变分条件）.

一般约束条件系指自变函数之间应满足的关系式. 在构造泛函时，利用这种关系式进行

---

*本文在国际计算工程科学会议上宣读并刊于会议文集，美国亚特兰大，1988年4月10日～17日，

本文于1989年3月21日收到.

变量代换，消去某一类自变函数，所以，它不再是泛函求极值时自变函数之间应满足的变分约束条件. 一般约束条件是不能用（线性）拉氏乘子法转化为变分条件. 可通过求泛函极值时得到某一类自变函数，再利用一般约束条件求得另一类自变函数.

0.3 广义泛函的构造

在文献[1]中提出用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函的方法，这样就使构造广义泛函的方法建立在严格的数学方法的基础上，使深入分析广义变分原理及促使它们进一步发展建立了理论基础.

利用变分问题描述弹性力学问题，各类广义变分原理实质上是基于势能密度与余能密度的数学形式的基础上，在各种变分约束条件，变分条件和一般约束条件下的匹配问题.

由于已知的广义变分原理中的广义泛函，都是基于势能声度（$\Pi_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$）和余能密度（$\mathscr{L}_0=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$）基础上构造的，这样应力应变的关系式对广义泛函而言是一般约束条件，因此无法利用（线性）拉氏乘子法解除一般约束条件，所以实质上为二类自变函数的广义变分原理.

0.4 势能密度与余能密度的表示形式

为了建立真正的三类自变函数的广义变分原理，我们突破传统的势能密度与余能密度的表示形式.

0.5.1 势能密度

在物理方程（0.3.1）为变分约束条件下，势能密度可表示为

$$\Pi_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \tag{0.6}$$

0.5.2 余能密度

在几何方程（0.2）和物理方程（0.3.2）为变分约束条件下，余能密度可表示为

$$\mathscr{L}_0=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j} \tag{0.7}$$

平衡方程可表示为

$$\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i=(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i=0 \tag{0.8}$$

0.5 规一化问题

考虑到历史的原因，我们称势能极値原理与余能极値原理为标准型变分原理. 对各类广义变分原理而言，当把变分条件还原为变分约束条件时，通过自变函数的代换，广义变分原理退化为标准型变分原理，这个过程叫规一化问题. 在规一化过程中，可以形成各种类型的广义变分原理.

1 广义变分原理Ⅰ

在几何方程（0.2）、物理方程（0.3.1）和位移边界条件（0.5.2）为变分约束条件下，势能变分原理的泛函可表示为

$$\Pi=\iiint_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\overline{F}_i u_i\right)d\Omega-\iint_{2\Omega_1}\overline{P}_i u_i ds \tag{1.1}$$

基于泛函（1.1），利用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函．于是有

$$\Pi_1=\iiint_{\Omega}\Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\overline{F}_i u_i\Big)+a_{ij}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)$$

$$+\beta_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\Big]d\Omega-\iint_{2\Omega_1}\overline{P}_i u_i ds+\iint_{2\Omega_2}r_i(u_i-\overline{u}_i)ds \tag{1.2}$$

令 σ_{ij}，ε_{ij}，u_i，a_{ij}，β_{ij}，r_i 均为独立自变函数，利用驻值条件

$$\delta\Pi_1=0 \tag{1.3}$$

来确定拉氏乘子．则有

$$\delta\Pi_1=\iiint_{\Omega}\Big[\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta a_{ij}+(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\delta\beta_{ij}$$

$$+(a_{ij,j}-\overline{F}_i)\delta u_i+\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}+a_{ij}-a_{ijkl}\beta_{kl}\Big)\delta\varepsilon_{ij}$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}+\beta_{ij}\Big)\delta\sigma_{ij}\Big]d\Omega-\iint_{2\Omega_1}(a_{ij}l_j+\overline{P}_i)\delta u_i ds$$

$$+\iint_{2\Omega_2}\Big[(u_i-\overline{u}_i)\delta r_i+(r_i-a_{ij}l_j)\delta u_i\Big]ds=0 \tag{1.4}$$

根据变分法的基本引理，则得

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{1.5.1}$$

$$\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{1.5.2}$$

$$a_{ij,j}-\overline{F}_i=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{1.5.3}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}+a_{ij}-a_{ijkl}\beta_{kl}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{1.5.4}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}+\beta_{ij}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{1.5.5}$$

$$a_{ij}l_j+\overline{P}_i=0 \qquad (\text{在}2\Omega_1\text{内}) \tag{1.5.6}$$

$$u_i-\overline{u}_i=0 \qquad (\text{在}2\Omega_1\text{内}) \tag{1.5.7}$$

$$r_i=a_{ij}l_j \qquad (\text{在}2\Omega_2\text{内}) \tag{1.5.8}$$

于是得

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij} \tag{1.5.9}$$

$$a_{ij}=-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl}) \tag{1.5.10}$$

$$r_i=-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j \tag{1.5.11}$$

方程（1.5）包括了弹性力学问题应满足的四类方程，以及全部拉氏乘子．将拉氏乘子

代入方程（1.2），则得

$$\Pi_{1-3-1}=\iiint_{\Omega}\Big[\Big(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\overline{F}_i u_i\Big)-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})$$

$$\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\Big]\mathrm{d}\Omega$$

$$-\iint_{2\Omega_1}\overline{P}_i u_i\mathrm{d}s-\iint_{2\Omega_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}s \qquad (1.6)$$

这是一个属于三类独立变量函数的广义泛函．基于泛函（1.6）可以建立沒有任何约束条件的广义变分原理．

对（1.6）进行简化，我们得到

$$\Pi_{1-3-2}=\iiint_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{ij}-\overline{F}_i u_i-\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl})\Big]\mathrm{d}\Omega$$

$$-\iint_{2\Omega_1}\overline{P}_i-u_i\mathrm{d}s-\iint_{2\Omega_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}s \qquad (1.7)$$

类似得到下面的形式

$$\Pi_{1-3-3}=\iiint_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})$$

$$\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)-\overline{F}_i u_i\Big]\mathrm{d}\Omega-\iint_{2\Omega_1}\overline{P}_i u_i\mathrm{d}s$$

$$\iint_{2\Omega_2}\frac{1}{2}(\sigma_{ij}+a_{ijkl}\varepsilon_{kl})(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}s \qquad (1.8)$$

上述广义泛函属于三类独立自变量函数的广义泛函，基于这些广义泛函，可以建立沒有任何约束条件的三类独立自变函数的广义变分原理．

1.1 规一化问题

1.1.1 设 $\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$，并且用$\varepsilon_{ij}$代替全部的$\sigma_{ij}$，则泛函$\Pi_{1-3-1}$，或$\Pi_{1-3-2}$或$\Pi_{1-3-3}$退化为

$$\Pi_{1-2-1}=\iiint_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)$$

$$\overline{F}_i u_i\Big]\mathrm{d}\Omega-\iint_{2\Omega_1}\overline{P}_i u_i\mathrm{d}s-\iint_{2\Omega_2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}l_j(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}s \qquad (1.9)$$

这是一个具有二类独立自变函数的广义泛函．由它所形成的广义变分原理是二类独立自变函数的广义变分原理．它沒有变分约束条件，物理方程是它的一般约束条件．

1.1.2 设 $\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$，并且用$\sigma_{ij}$局部的代替$\varepsilon_{ij}$，则由泛函（1.8），我们得到

$$\Pi_{1-2-2}=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}-\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right.$$

$$\left.-\overline{F}_i u\right]\mathrm{d}\Omega-\iint\limits_{2\Omega_1}\overline{P}_i u_i\mathrm{d}s-\iint\limits_{2\Omega_2}\sigma_{ij}l_j l(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}s \tag{1.10}$$

这是一个具有二类独立自变函数的广义泛函．由它所形成的广义变分原理是二类独立自变函数的变分原理．因为是局部的用 σ_{ij} 代替 ε_{ij}，所以物理方程(0.3.1)是它的变分约束条件．很显然，这就是著名的胡-鹫原理的泛函．

1.1.3 若 $\sigma_{ij}-a_{ijkl}\varepsilon_{kl}=0$，并且由此我们得到

$$b_{ijkl}(\sigma_{ij}-a_{ijmn}\varepsilon_{mn})=b_{ijkl}\sigma_{kl}-\varepsilon_{ij}=0$$

然后用 σ_{ij} 代替全部的 ε_{ij}，则泛函 Π_{1-3-1} 或 Π_{1-3-2} 或 Π_{1-3-3} 退化为

$$\Pi_{1-2-3}=\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\left(b_{ijkl}\sigma_{kl}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right.$$

$$\left.-\overline{F}_i u_i\right]\mathrm{d}\Omega-\iint\limits_{2\Omega_1}\overline{P}_i u_i\mathrm{d}s-\iint\limits_{2\Omega_2}\sigma_{ij}l_j(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}s$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i)\right]\mathrm{d}\Omega$$

$$+\iint\limits_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint\limits_{2\Omega_2}\overline{u}_i\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{1.11}$$

这是一个具有二类独立自变函数的广义泛函．由它所形成的广义变分原理是没有变分约束条件的二类独立自变函数的广义变分原理．很显然，泛函（1.11）就是Hellinger-Reissner变分原理的泛函．

1.1.4 若 $\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，但是变量函数不代换，于是由泛函（1.9）我们得到

$$\Pi_{1-1-1}=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\overline{F}_i u_i\right)\mathrm{d}\Omega-\iint\limits_{2\Omega_1}\overline{P}_i-u_i\mathrm{d}s$$

$$-\iint\limits_{2\Omega_2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}l_j(u_i-\overline{u}_i)\mathrm{d}s \tag{1.12}$$

这是具有一个独立自变函数的泛函．由它形成的变分原理是条件变分原理，几何方程（0.2）是它的变分约束条件，物理方程（0.3.1）是它的一般约束条件．

若 $u_i-\overline{u}_i=0$，则泛函(1.12)就退化标准型变分原理．

1.2 各类新型的变分原理

1.2.1 变分原理 1-1

在 u_i，ε_{ij}，σ_{ij} 为独立自变函数的情况下，使泛函 Π_{1-3-1}，Π_{1-3-2} 或 Π_{1-3-3} 实现驻值条件的 u_i，ε_{ij}，σ_{ij} 为弹性力学问题的眞实解．

1.2.2 变分原理 1-2

在 u_i，ε_{ij} 为独立自变函数的情况下，使泛函 Π_{1-2-1} 实现驻值条件的 u_i，ε_{ij} 为弹性力

学问题的真实解．这是无变分约束条件的二类独立自变函数的变分原理．

1.2.3　变分原理1－3

当几何方程（0.2）是变分约束条件时，使泛函Π_{1-1-1}实现驻值条件的u_i，ε_{ij}是弹性力学问题的真实解．这是一个独立自变函数的变分原理．几何方程（0.2）是变分约束条件，物理方程是一般约束条件．

2　广义变分原理II

当几何方程（0.2），物理方程（0.3.2），平衡方程（0.8）和力的边界条件（0.5.1）是变分约束条件时，则余能的泛函能表示为

$$\mathscr{L}=\iiint_{\Omega}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}\mathrm{d}\Omega+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{2.1}$$

基于泛函（2.1），利用拉氏乘子法建立广义变分原理的广义泛函．于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1=\iiint_{\Omega}\Big[&-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+a_{ij}\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\\&+\beta_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})+r_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{ij}+\overline{F}_i)\Big]\mathrm{d}\Omega\\&+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)\mu_i\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2.2}$$

令σ_{ij}，ε_{ij}，u_i，a_{ij}，β_{ij}，r_i，μ_i均为独立自变函数，利用驻值条件

$$\delta\mathscr{L}_1=0 \tag{2.3}$$

来确定拉氏乘子，则有

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_1=\iiint_{\Omega}\Big[&\Big(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)\delta a_{ij}+(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\delta\beta_{ij}\\&+((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i)\delta r_i+\Big(-\frac{1}{2}u_{i,j}-b_{ijkl}\beta_{kl}\Big)\delta\sigma_{ij}\\&+\Big(-\frac{1}{2}\sigma_{ij}-a_{ij}\Big)\delta u_{i,j}+(a_{ij}+\beta_{ij}-a_{ijkl}r_{kl})\delta\varepsilon_{ij}\Big]\mathrm{d}\Omega\\&+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)\delta\mu_i\mathrm{d}s+\iint_{2\Omega_1}\Big[\mu_i\delta\sigma_{ij}l_j\\&+r_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\Big]\mathrm{d}s+\iint_{2\Omega_2}\Big[\overline{u_i}\delta\sigma_{ij}l_j+r_i\delta(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\Big]\mathrm{d}s=0\end{aligned} \tag{2.4}$$

根据变分法基本引理，由（2.4）式得到

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0\quad（在\Omega内） \tag{2.5.1}$$

$$\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0\quad（在\Omega内） \tag{2.5.2}$$

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i=0\quad（在\Omega内） \tag{2.5.3}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}\right)+b_{ijkl}\beta_{kl}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.5.4}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}+a_{ij}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.5.5}$$

$$a_{ij}+\beta_{ij}-a_{ijkl}r_{k,l}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.5.6}$$

由（2.5.5）式，我们得到

$$a_{ij}=-\frac{1}{2}\sigma_{ij} \tag{2.5.7}$$

由（2.5.1）、（2.5.2）和（2.5.4）式得到

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{2}\sigma_{ij} \tag{2.5.8}$$

由（2.5.1）、（2.5.2）和（2.5.6）式得到

$$r_{i,j}=-\varepsilon_{ij}=-u_{i,j},\quad r_i=-u_i \tag{2.5.9}$$

由（2.5.2）式得到

$$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j=(a_{ijkl}b_{ijmn}\sigma_{mn})l_j=\sigma_{ij}l_j \tag{2.5.10}$$

由方程（2.4）和（2.5.10）式得到

$$\mu_i=-r_i=u_i \qquad (\text{在}2\Omega_1\text{上}) \tag{2.5.11}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i=0 \qquad (\text{在}2\Omega_1\text{上}) \tag{2.5.12}$$

$$u_i=\overline{u_i}=0 \qquad (\text{在}2\Omega_2\text{上}) \tag{2.5.13}$$

方程（2.5）包括了弹性力学问题应满足的四类方程以及全部拉氏乘子．将拉氏乘子代入方程（2.2），则得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{1-3-1}=\iiint_{\Omega}\Big[&-\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\\&-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i)\Big]d\Omega\\&+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i ds+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j ds\end{aligned} \tag{2.6}$$

这是一个属于三类独立自变函数的广义泛函．基于泛函（2.6)，可以建立沒有任何约束条件的三类变量函数的广义变分原理．

对（2.6）式进行简化，则得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{0-3-2}=\iiint_{\Omega}&\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})_{,j}+\overline{F}_i)\right]d\Omega\\&+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i ds+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j ds\end{aligned} \tag{2.7}$$

亦可简化为下面形式：

$$\mathscr{L}_{0-3-3}=\iiint_{\Omega}\Big[-\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}-\sigma_{ijkl}\sigma_{kl})-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})+\overline{F}_i)\Big]\mathrm{d}\Omega+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{2.8}$$

上述广义泛函属于三类独立自变函数的广义泛函.基于这些广义泛函,可以建立没有任何约束条件的三类独立自变函数的广义变分原理.

下面进行规一化论述，在规一化过程中，我们得到各种新型的广义泛函，以及基于广义泛函建立的广义变分原理.

2.1 规一化问题

2.1.1 若 $\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$,并且用$\sigma_{ij}$全部代替$\varepsilon_{ij}$,则泛函$\mathscr{L}_{0-3-1}$,$\mathscr{L}_{0-3-2}$或$\mathscr{L}_{0-3-3}$退化为

$$\mathscr{L}_{1-2-1}=\iiint_{\Omega}\Big[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i)\Big]\mathrm{d}\Omega+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{2.9}$$

这是一个属于二类独立自变函数的广义泛函，由它形成的变分原理具有变分约束条件(0.3.2)．这就是Hellinger-Reissner's 原理的泛函.

2.1.2 若 $\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$，则有

$$\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}$$

于是方程(2.9)化为

$$\mathscr{L}_{1-2-2}=\iiint_{\Omega}\Big[\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-u_i(\sigma_{ij,j}+\overline{F}_i)\Big]\mathrm{d}\Omega+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j\mathrm{d}s \tag{2.10}$$

这是在[2]中提出的广义余能变分原理．但它是具有变分约束条件(0.3.2)的属于二类独立自变函数的变分原理.

2.1.3 若 $\varepsilon_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$，则有

$$a_{ijkl}\ (\varepsilon_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})=a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij}=0$$

用ε_{ij}代替全部的σ_{ij}，则泛函$\mathscr{L}_{1-3-1}$，$\mathscr{L}_{1-3-2}$或$\mathscr{L}_{1-3-3}$退化为

$$\mathscr{L}_{1-2-3}=\iiint_{\Omega}\Big[-\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}),_j+\overline{F}_i)\Big]\mathrm{d}\Omega+\iint_{2\Omega_1}((a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j-\overline{P}_i)u_i\mathrm{d}s+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}(a_{ijkl}\varepsilon_{kl})l_j\mathrm{d}s \tag{2.11}$$

这是一个具有二类独立自变函数的泛函，由它所形成的广义变分原理是无条件的二类独立自变函数的变分原理．物理方程（0.3.2）是它的一般约束条件．

2.1.4　若　$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$，并且用$u_{i,j}$代替全部的$\varepsilon_{ij}$，则由（2.6）泛函，我们得到

$$\mathscr{L}_{1-2-4}=\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}u_{i,j}-u_i((a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u_i)),_j+\overline{F}_i\right]d\Omega$$
$$+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i ds+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j ds \qquad (3.12)$$

这是具有二类独立自变函数（σ_{ij}，u_i）的广义泛函，由它所组成的广义变分原理是无变分约束条件的二类独立自变函数的广义变分原理．这个原理与Helling-Reissner′s原理不同．

2.1.5　若　$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}),_j+\overline{F}_i=0$，则由泛函（2.7）我们得到

$$\mathscr{L}_{1-3-4}=\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right]d\Omega$$
$$+\iint_{2\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i)u_i ds+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j ds \qquad (2.13)$$

这是具有三类独立自变函数的广义泛函．由它所组成的广义变分原理，具有变分约束条件$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}),_j+\overline{F}_i=0$．

若　$\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i=0$，则泛函（2.13）变为

$$\mathscr{L}_{1-2-5}=\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\right]d\Omega+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j ds \qquad (2.14)$$

这是具有二类独立自变函数的广义泛函，由它所形成的广义变分原理具有变分条件$(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}),_j+\overline{F}_i=0$和$\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i=0$．它的变分条件为物理方程(0.3.2)，几何方程(0.2)和位移边界条件（0.5.2）．

2.1.6　若　物理方程(0.3.2)，几何方程（0.2)，平衡方程(0.8)和力的边界条件（0.5.1)得到满足，则泛函（2.6）退化为

$$\mathscr{L}_{1-1-1}=\iiint_{\Omega}-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\iint_{2\Omega_2}\overline{u_i}\sigma_{ij}l_j ds \qquad (2.15)$$

这便是标准型余能变分原理．

2.2　各类新型的变分原理

2.2.1　变分原理2－1

设σ_{ij}、ε_{ij}、u_i为独立自变函数时，使泛函$\mathscr{L}_{1-3-1}$或$\mathscr{L}_{1-3-2}$或$\mathscr{L}_{1-3-3}$实现驻值条件的σ_{ij}、ε_{ij}、u_i是弹性力学问题的眞实解．

这是一个沒有任何约束条件的三类独立自变函数的广义变分原理．

2.2.2 变分原理 2-2

设 u_i，ε_{ij} 为独立自变函数时，使泛函 $\mathscr{L}_{1-2-3}$ 实现驻值条件的 u_i，ε_{ij} 是弹性力学问题的眞实解.

这是一个无变分约束条件的二类独立自变函数的变分原理.

2.2.3 变分原理 2-3

设 u_i，σ_{ij} 为独立的自变函数时，使泛函 $\mathscr{L}_{1-2-4}$ 数实现驻值条件的 u_i，σ_{ij} 是弹性力学问题的眞实解.

这是一个具有一般约束条件的二类独立自变函数的变分原理.

2.2.4 变分原理 2-4

当 $(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl})_j+\overline{F}_i=0$ 是变分约束条件，并设 u_i、ε_{ij}、σ_{ij} 是独立自变函数时，则使泛函 $\mathscr{L}_{1-3-4}$ 实现驻值条件的 u_i、ε_{ij}、σ_{ij} 便是弹性力学问题的眞实解.

2.2.5 变分原现 2-5

当 $(a_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}),_j+\overline{F}_i=0$ 和 $\sigma_{ij}l_j-\overline{P}_i=0$ 是变分约束条件，并设 σ_{ij}、ε_{ij} 是独立自变函数时，则使泛函 $\mathscr{L}_{1-2-5}$ 实现驻值条件的 σ_{ij}、ε_{ij} 便是弹性力学问题的眞实 解.

这是一个具有二类自变函数的变分原理，它的变分条件是物理方程和几何方程，以及位移边界条件.

证明上述变分原理是容易的，可从上面论述中得到证明，在此从略.

3 结论

弹性力学的各种类型的广义变分原理实质上是基于势能密度、余能密度的基础上，各种变分约束条件、变分条件、一般约束条件之间的匹配问题.

基于上述观点，我们利用拉氏乘子法，建立了各类三类变函数的和二类自变函数的广义变分原理.

参 考 文 献

[1] 錢伟长. 弹性理论中的广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用. 机械工程学报，1979；15(2)

[2] 胡海昌. 弹塑性理论中的一些变分原理. 物理学报，1954；10(3)

[3] Reissner E. On a variational theorem in elasticity, Journal of Mathematics and physics, 1950；29(2)

Generalized Variational Principles of Elasticity

Niu Xiangjun

(Civil Engineering Department)

[Abstract] We brack through the traditionat forms of potential energy density and complementary energy density to establish the generalized functionals and the generalized variational principles belonging to three independent argument functions by use of Lagrange multiplier method and we derived new forms of the functionals and new forms of the variational principles belonging to one or two independent argument functions.

In the course of the discussion, we proved that Hu-Washizu's principle, H'ellinger-Reissner's principle and the generalized principle of Complementary energy[2][3] are the generalized variational principles belonging to two independent argument functions in essence.

Key Words: The generalized Variational principle, Lagrange multiplier method, Match problem