泛函积分形式中的整体正则对称性质*

李 子 平**
（北京工业大学应用物理系，100022）
唐 太 明
（新疆师范大学数学系，乌鲁木齐，830054）

摘 要 基于高阶微商奇异拉氏量系统的相空间泛函积分，导出了该系统在相空间中整体变换下的广义正则Ward恒等式，得到了系统在相空间中整体对称下的量子守恒荷．该守恒荷一般有别于经典Noether荷．用于高阶微商Yang-Mills理论，导出了相应的广义BRS荷．这里给出的形式的突出优点在于勿需作出Green函数的相空间生成泛函中对正则动量的泛函积分，即可导出相应的结果．一般情形是不能作出该积分的．

关键词 高阶微商拉氏量，量子守恒荷，泛函积分
分类号 O 413.3

0 引言

对称性和守恒律的联系，在经典理论中通常是由Noether定理给出的[1]．系统的作用量在有限李群变换下不变时(整体对称)，该系统必存在相应的守恒律．在量子理论中，系统在无限李群下的不变性(定域对称)导致的Ward恒等式[2]，在量子场论中占重要地位．它不仅是理论可重正化的根据，在实际计算中也是有用的工具(如QCD中)．Ward恒等式已被推广到超对称和超弦理论[3, 4]．传统的关于Noether定理及其推广的研究，是在位形空间中讨论的．近来我们已给出了相空间中正则形式的Noether定理[5]．利用泛函积分的方法研究Ward恒等式及其推广，也是在位形空间中实现的[6]．这仅适用于Green函数的生成泛函的相空间泛函积分关于正则动量的泛函积分属于Gauss型的情形．在这种情形下，相空间的泛函积分可化为位形空间中的泛函积分．相空间中的泛函积分比位形空间中的泛函积分更基本[7]，前者适用于任意形式的Hamilton量．在某些情形下，相空间中泛函积分对正则动量的积分可积出，当Hamilton量中的“质量”依赖于坐标或依赖于坐标和动量时[8]，其位形空间中的有效拉氏量呈现出δ—函数的奇异性．对于约束Hamilton系统，当约束结构比较复杂时，特别是对高阶微商奇异拉氏量系统，要作出相空间泛函积分中对正则动量的积分往往十分困难，甚至是不能的．动力学系统用高阶微商理论来描述，它与规范理论、引力理论、超对称和超弦等理论密切相关[5]，因而日益受到人们的关

收稿日期：1995－11－16
* 国家自然科学基金资助项目
** 中国高等科学技术中心(世界实验室)协联成员

注，动力系统的量子理论是通过相空间泛函积分来表达的，因此，研究相空间泛函积分的正则对称性就具有更重要的意义．我们在文献[9]中已经讨论了定域对称性，并初步讨论了高阶微商系统的定域对称性．这里，将进一步研究场论中高阶微商系统的泛函积分形式的整体正则对称性质，揭示出系统的量子对称性质．

1 正则形式 Ward 恒等式

设 $\varphi^{\alpha}(x)(1,2,\cdots,n)$ 为场变量，场的运动由含高阶微商的拉氏量

$$L[\varphi^{\alpha}_{(0)},\varphi^{\alpha}_{(1)},\cdots,\varphi^{\alpha}_{(N)}]=\int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\varphi^{\alpha},\varphi^{\alpha}_{,\mu},\cdots,\varphi^{\alpha}_{,\mu(N)}) \tag{1}$$

来描述[5]．对于奇异拉氏量系统(例如所有规范不变系统[1])，将其过渡到 Hamilton 体制描述时，正则变量 $\varphi^{\alpha}_{(s)}(x)$ 和 $\pi^{(s)}_{\alpha}(x)$ 之间存在初级约束(这里采用文献[5]中的记号)：

$$\Phi^0_a(\varphi^{\alpha}_{(s)},\pi^{(s)}_{\alpha})\approx 0,\qquad (a=1,2,\cdots,n-R) \tag{2}$$

其中 R 为广义 Hess 矩阵的秩．根据约束的自洽性条件，由初级约束可逐步导出各次级约束．全部约束分为第一类约束和第二类约束两类，奇异拉氏量描述的系统为约束 Hamilton 系统．

在约束 Hamilton系统的泛函积分(路径积分)量子化理论中，对每一个第一类约束，必须选取相应的规范条件．高阶微商奇异拉氏量系统的 Green 函数的相空间生成泛函为[10]

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\varphi^{\alpha}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\delta(\Phi)\sqrt{\det\{\Phi,\Phi\}}$$
$$\cdot\exp\{i\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^p+J^{(s)}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(s)}+K^{\alpha}_{(s)}\pi^{(s)}_{\alpha})\} \tag{3}$$

其中

$$\mathscr{L}^p=\pi^{(s)}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(s+1)}-\mathscr{H}_c \tag{4}$$

$\mathscr{H}_c$ 为正则 Hamilton 量[5]，$\Phi=\{\Phi_m\}$．对仅含第二类约束的系统，$\{\Phi_m\}$ 为所有第二类约束；对含第一类约束的系统，$\{\Phi_m\}$ 包括所有第一类约束和规范条件．$\{,\}$ 代表场的广义 poisson 括号，$J^{(s)}_{\alpha}$ 和 $K^{\alpha}_{(s)}$ 分别为 $\varphi^{\alpha}_{(s)}$ 和 $\pi^{(s)}_{\alpha}$ 的外源．利用 $\delta-$ 函数和 Grassmann 变量 $C_l(x)$，$\bar{C}_k(x)$ 的积分性质，可将(3)式写为

$$Z[J,K]=\int \mathscr{D}\varphi^{\alpha}_{(s)}\mathscr{D}\pi^{(s)}_{\alpha}\mathscr{D}\lambda_m\mathscr{D}\bar{C}_k\mathscr{D}C_l$$
$$\cdot\exp\{i\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}^p_{eff}+J^{(s)}_{\alpha}\varphi^{\alpha}_{(s)}+K^{\alpha}_{(s)}\pi^{(s)}_{\alpha})\} \tag{5}$$

其中

$$\mathscr{L}^p_{eff}=\mathscr{L}^p+\lambda_m\Phi_m+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4y\bar{C}_k(x)\{\Phi_k(x),\Phi_l(y)\}C_l(y) \tag{6}$$

$\lambda_m(x)$ 为乘子场．为简化记号，令 $\varphi^{\alpha}_{(s)}=(\varphi^{\alpha}_{(s)},\lambda_m,\bar{C}_k,C_l)$，$J^{(s)}_{\alpha}=(J^{(s)}_{\alpha},\eta_m,\xi_k,\bar{\xi}_l)$，其中 η_m，ξ_k 和 $\bar{\xi}_l$ 分别为 λ_m，$\bar{C}_k$ 和 C_l 的外源．这样，(5)式可记为

$$Z[J, K]=\int \mathscr{D}\varphi_{(s)}^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}^{(s)}\exp\{i\int d^4x(\mathscr{L}_{eff}^{p}+J_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{s}^{(\alpha)}\pi_{\alpha}^{(s)})\} \tag{7}$$

考虑增广相空间中的无穷小整体变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu'} &= x^{\mu}+\Delta x^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon_{\sigma}\tau^{\mu\sigma}(x, \varphi_{(s)}^{\alpha}, \pi_{\alpha}^{(s)}) \\ \varphi_{(s)}^{\alpha'}(x') &= \varphi_{(s)}^{\alpha}(x)+\Delta\varphi_{(s)}^{\alpha}=\varphi_{(s)}^{\alpha}(x)+\varepsilon_{\sigma}\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}(x, \varphi_{(s)}^{\alpha}, \pi_{\alpha}^{(s)}) \\ \pi_{\alpha}^{(s)'}(x') &= \pi_{\alpha}^{(s)}(x)+\Delta\pi_{\alpha}^{(s)}(x)=\pi_{\alpha}^{(s)}(x)+\varepsilon_{\sigma}\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}(x, \varphi_{(s)}^{\alpha}, \pi_{\alpha}^{(s)}) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中 $\varepsilon_{\sigma}(\sigma=1, 2, \cdots, r)$ 为无穷小任意参数，$\tau^{\mu\sigma}$，$\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}$ 和 $\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}$ 分别为 x，$\varphi_{(s)}^{\alpha}$，$\pi_{\alpha}^{(s)}$ 的函数. 假设系统的有效正则作用量在(8)式变换下不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1，由于生成泛函(7)式在(8)式的变换下是不变的，于是有

$$\begin{aligned} Z[J, K]=&\int \mathscr{D}\varphi_{(s)}^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}^{(s)}(1+i\varepsilon_{\sigma}\int d^4x\{J_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma}) \\ &+K_{(s)}^{\alpha}(\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}-\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\tau^{\mu\sigma})+\partial_{\mu}[(J_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{(s)}^{\alpha}\pi_{\alpha}^{(s)})\tau^{\mu\sigma}]\}) \\ &\cdot\exp\{i\int d^4x(\mathscr{L}_{eff}^{p}+J_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{(s)}^{\alpha}\pi_{\alpha}^{(s)})\} \\ =&(1+i\varepsilon_{\sigma}\int d^4x\{J_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J_{\alpha}^{(s)}})+K_{(s)}^{\alpha}(\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta K_{(s)}^{\alpha}}) \\ &+\partial_{\mu}[\tau^{\mu\sigma}(J_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{(s)}^{\alpha}\pi_{\alpha}^{(s)})]\})\cdot Z[J, K]\Bigg|_{\substack{\varphi_{(s)}^{\alpha}\to\frac{1}{i}\delta/\delta J_{\alpha}^{(s)} \\ \pi_{\alpha}^{(s)}\to\frac{1}{i}\delta/\delta K_{(s)}^{\alpha}}} \end{aligned} \tag{9}$$

从而，我们得到下列结果：如果系统的有效正则作用量 $I_{eff}^{p}=\int d^4x\mathscr{L}_{eff}^{p}$ 在(8)式的变换下不变，且(8)式变换和 Jacobi 行列式为 1，那么，系统 Green 函数的相空间生成泛函适合下列恒等式：

$$\begin{aligned} &\int d^4x\{J_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta J_{\alpha}^{(s)}})+K_{(s)}^{\alpha}(\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}-\tau^{\mu\sigma}\partial_{\mu}\frac{\delta}{\delta K_{(s)}^{\alpha}}) \\ &+\partial_{\mu}[\tau^{\mu\sigma}(J_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{(s)}^{\alpha}\pi_{\alpha}^{(s)})]\}Z[J, K]\Bigg|_{\substack{\varphi_{(s)}^{\alpha}\to\frac{1}{i}\delta/\delta J_{\alpha}^{(s)} \\ \pi_{\alpha}^{(s)}\to\frac{1}{i}\delta/\delta K_{(s)}^{\alpha}}}=0 \end{aligned} \tag{10}$$

(10)式可称为场论中高阶微商奇异拉氏量系统在增广相空间中整体对称下的广义正则 Ward 恒等式.

对于内部对称变换，$\tau_{\mu\sigma}=0$，此时(10)式化为

$$\begin{aligned} &\int d^4x\{J_{\alpha}^{(s)}\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}(x, \frac{\delta}{i\delta J_{\alpha}^{(s)}}, \frac{\delta}{i\delta K_{(s)}^{\alpha}})+K_{(s)}^{\alpha}\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}(x, \frac{\delta}{i\delta J_{\alpha}^{(s)}}, \frac{\delta}{i\delta K_{(s)}^{\alpha}})\} \\ &\cdot Z[J, K]=0 \end{aligned} \tag{11}$$

对于(10)式或(11)式关于外源$J_{\alpha}^{(0)}$多次求泛函微商，然后令所有外源等于零，即可求得系统各级 Green 函数间的关系.

2 量子守恒荷

假设系统的有效正则作用量在(8)式的变换下不变，将该变换定域化，在增广相空间中考虑相应的定域变换

$$\left.\begin{aligned} x^{\mu'} &= x^{\mu}+\Delta x^{\mu} = x^{\mu}+\varepsilon_{\sigma}(x)\tau^{\mu\sigma}(x,\ \varphi_{(s)}^{\alpha},\ \pi_{\alpha}^{(s)}) \\ \varphi_{(s)}^{\alpha'}(x') &= \varphi_{(s)}^{\alpha}(x)+\Delta\varphi_{(s)}^{\alpha}(x) = \varphi_{(s)}^{\alpha}(x)+\varepsilon_{\sigma}(x)\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}(x,\ \varphi_{(s)}^{\alpha},\ \pi_{\alpha}^{(s)}) \\ \pi_{\alpha}^{(s)}(x') &= \pi_{\alpha}^{(s)}(x)+\Delta\pi_{\alpha}^{(s)}(x) = \pi_{\alpha}^{(s)}(x)+\varepsilon_{\sigma}(x)\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}(x,\ \varphi_{(s)}^{\alpha},\ \pi_{\alpha}^{\sigma}) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中$\varepsilon_{\sigma}(x)(\sigma=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$为无穷小任意函数，它们的值及其所需的各级微商在时空区域的边界上为零. 在(12)式变换下，系统的有效正则作用量的变分为

$$\begin{aligned} \delta I_{eff}^{p} = &\int \mathrm{d}^4x\varepsilon_{\sigma}(x)\{\frac{\delta I_{eff}^{p}}{\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})+\frac{\delta I_{eff}^{p}}{\delta\pi_{\alpha}^{(s)}}(\eta_{\alpha}^{(s)\sigma}-\pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\tau^{\mu\sigma}) \\ &+\partial_{\mu}[(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha}-\mathscr{H}_{eff})\tau^{\mu\sigma}]+D[\pi_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})]\} \\ &+\int \mathrm{d}^4x\{[(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha}-\mathscr{H}_{eff})\tau^{\mu\sigma}]\partial_{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x) \\ &+\pi_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})D\varepsilon_{\sigma}(x)\} \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $D=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$，由于有效正则作用量在整体变换(8)式下不变，故(13)式中的第一积分为零. 根据 $\varepsilon_{\sigma}(x)$的边界条件，(13)式又可写为

$$\begin{aligned} \delta I_{eff} &= \int \mathrm{d}^4x\{[(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha}-\mathscr{H}_{eff})\tau_{\mu\sigma}]\partial_{\mu}\varepsilon_{\sigma}(x)+\pi_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau_{\mu\sigma})D\varepsilon_{\sigma}(x)\} \\ &= -\int \mathrm{d}^4x\varepsilon_{\sigma}(x)\{\partial_{\mu}[(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha}-\mathscr{H}_{eff})\tau^{\mu\sigma}]+D[\pi_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})]\} \end{aligned} \tag{14}$$

将变换(12)式的 Jacobi 行列式记为 $J[\varphi,\ \pi,\ \varepsilon]$. 生成泛函(7)式在(12)式变换下的不变性表明

$$\delta Z[J,\ K]/\delta\varepsilon_{\sigma}(x)|_{\varepsilon_{\sigma}(x)=0}=0 \tag{15}$$

将(12)式和(14)式代入(7)式，并对所得结果关于 $\varepsilon_{\sigma}(x)$求泛函微商，由(15)式，得

$$\begin{aligned} &\int\mathscr{D}\varphi_{(s)}^{\alpha}\mathscr{D}\pi_{\alpha}^{(s)}\{\partial_{\mu}[(\pi_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha}-\mathscr{H}_{eff})\tau^{\mu\sigma}]+D[\pi_{\alpha}^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})]-J_0^{\sigma}-M^{\sigma}\} \\ &\quad\cdot\exp\{i\int \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{eff}^{p}+J_{\alpha}^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha}+K_{(s)}^{\alpha}\pi_{\alpha}^{(s)})\}=0 \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$J_0^\sigma = -i\delta J[\varphi, \pi, \varepsilon]/\delta\varepsilon_\sigma(x)\Big|_{\varepsilon_\sigma(x)=0} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}M^\sigma &= J_\alpha^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma}) + K_{(s)}^{\alpha}(\eta_\alpha^{(s)\sigma} - \pi_{\alpha,\mu}^{(s)}\tau^{\mu\sigma}) \\ &\quad + \partial_\mu[(J_\alpha^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha} + K_{(s)}^{\alpha}\pi_\alpha^{(s)})]\end{aligned} \tag{18}$$

将(16)式关于外源 $J_\alpha^{(0)}$ 求 n 次泛函微商，得

$$\begin{aligned}&\int \mathscr{D}\varphi_{(s)}^{\alpha}\mathscr{D}\pi_\alpha^{(s)}(\{\partial_\mu[(\pi_\alpha^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha} - \mathscr{H}_{eff})\tau^{\mu\sigma}] \\ &+ D[\pi_\alpha^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})] - J_0^\sigma - M^\sigma\}\varphi^\alpha(x_1)\varphi^\alpha(x_2)\cdots\varphi^\alpha(x_n) \\ &- i\sum \varphi^\alpha(x_1)\varphi^\alpha(x_2)\cdots\varphi^\alpha(x_{j-1})\varphi^\alpha(x_{j+1})\cdots\varphi^\alpha(x_n)N^{\alpha\sigma}\delta(x-x_j)) \\ &\cdot\exp\{i\int d^4x(\mathscr{L}_{eff}^{P} + J_\alpha^{(s)}\varphi_{(s)}^{\alpha} + K_{(s)}^{\alpha}\pi_\alpha^{(s)})\} = 0\end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$N^{\alpha\sigma} = \xi_{(0)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{,\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma} \tag{20}$$

在(19)式中，让所有外源为零，得

$$\begin{aligned}&\langle 0|T^*\{\partial_\mu[(\pi_\alpha^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha} - \mathscr{H}_{eff}\tau^{\mu\sigma}] \\ &+ D[\pi_\alpha^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})] - J_o^\sigma\}\varphi^\alpha(x_1)\varphi^\alpha(x_2)\cdots\varphi^\alpha(x_n)|0\rangle \\ &= i\sum_j\langle 0|T^*[\varphi^\alpha(x_1)\varphi^\alpha(x_2)\cdots\varphi^\alpha(x_{j-1})\varphi^\alpha(x_{j+1})\cdots\varphi^\alpha(x_n)N^{\alpha\sigma}]|0\rangle\delta(x-x_j)\end{aligned} \tag{21}$$

其中，$|0\rangle$代表场的基态，T^* 代表一种特定的编时积[9]．固定 t，并让

$$t_1, t_2, \cdots, t_m \to +\infty, \quad t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n \to -\infty$$

利用约化公式[9]，可将(22)式化为

$$\begin{aligned}&\langle \text{out}, m|\{\partial_\mu[(\pi_\alpha^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha} - \mathscr{H}_{eff})\tau^{\mu\sigma}] \\ &+ D[\pi_\alpha^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})] - J_o^\sigma\}n-m, in\rangle = 0\end{aligned} \tag{22}$$

由于 m 和 n 任意，于是得

$$\partial_\mu[(\pi_\alpha^{(s)}\varphi_{(s+1)}^{\alpha} - \mathscr{H}_{eff})\tau^{\mu\sigma}] + D[\pi_\alpha^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{(s),\mu}^{\alpha}\tau^{\mu\sigma})] = J_o^\sigma \tag{23}$$

将(23)式在四维时间区域积分，假设场在空间区域无穷远为零，利用三维 Gauss 定理，由(23)式得

$$D\int_v[\pi_\alpha^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma} - \varphi_{(s),\kappa}^{\alpha}\tau^{\kappa\sigma}) - \mathscr{H}_{eff}\tau^{o\sigma}] = \int d^4xJ_o^\sigma \tag{24}$$

其中重复的拉丁字母 κ 指标求和由 1 至 3．这样，我们就得到下列结果．

如果高阶微商奇异拉氏量系统的有效正则作用量在增广相空间中的整体变换(8)式下不变，并且对应的定域变换(12)式的 Jacobi 行列式与 $\varepsilon_\sigma(x)$ 无关，那么该系统存在如下的量子守恒荷

$$Q^\sigma=\int_v d^3x[\pi_\alpha^{(s)}(\xi_{(s)}^{\alpha\sigma}-\varphi_{(s),\kappa}^{\alpha}\tau^{\kappa\sigma})-\mathscr{H}_{eff}\tau^{o\sigma}]\quad(\sigma=1,2,\cdots,r)\tag{25}$$

此结果对理论中无反常时成立．

量子守恒荷(25)与正则形式 Noether 定理给出的守恒荷相对应[5]．由于约束 Hamilton 系统量子化时，约束带来的量子效应，一般有效 Hamilton 量 $H_{eff}=\int d^3x\mathscr{H}_{eff}$ 与正则 Hamilton量是不同的，这样量子守恒荷(25)式有别于 Noether 荷．这是由于约束 Hamilton 系统的量子正则方程不同于经典正则方程的缘故．在约束 Hamilton 的经典理论中，Dirac 曾猜想：所有第一类约束(初级约束和次级约束)均是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换[11]．这个问题与由扩展 Hamilton 量 H_E 给出的正则方程是否与 Lagrange 方程等价紧密相关[12]．长期以来，关于 Dirac 猜想一直存在着不同的争议．我们已给出反例说明 Dirac 猜想失效[13]．

在量子理论中，基于生成泛函(7)式在正则变量 $\varphi_{(s)}^{\alpha}$ 和 $\pi_\alpha^{(s)}$ 在平移变换下的不变性，仿一阶微商奇异拉氏量系统类似的推导[9]，可得高阶微商奇异拉氏量系统的正则方程

$$\dot\varphi_{(s)}^{\alpha}=\delta H_{eff}/\delta\pi_\alpha^{(s)},\qquad\dot\pi_\alpha^{(s)}=-\delta H_{eff}/\delta\varphi_{(s)}^{\alpha}\tag{26}$$

可见，约束 Hamilton 系统的量子正则方程，既不是由总 Hamilton 量 H_T 决定，也不是由扩展 Hamilton 量 H_E 决定．(26)式不论 Dirac 猜想是否有效均是成立的，它与经典正则方程不同．从而量子水平下的守恒量就不同于经典 Noether 守恒量．在量子理论中，存在守恒量(25)式不仅需要系统的有效正则作用量(而不是正则作用量)在整体变换(8)式下不变，而且在对应的定域变换(12)式下其泛函积分的测度不变．这与经典理论中守恒量存在的条件也是不同的．可见，经典理论中的对称性和守恒律的联系，在量子理论中一般不再适用．

3 高阶微商 Yang - Mills 场论

含高阶微商的 Yang - Mills 场的拉氏量为[10]

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{a}F^{a\mu\nu}-\frac{1}{4\Lambda^2}D_{b\mu}^{a}F_{\gamma\nu}^{b}D_{c}^{a\mu}F^{c\lambda\nu}\tag{27}$$

$$F_{\mu\nu}^{a}=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+f_{bc}^{a}A_\mu^bA_\nu^c\tag{28}$$

$$D_{b\mu}^{a}=\delta_b^a\partial_\mu+f_{cb}^{a}A_\mu^c\tag{29}$$

在 Coulomb 规范下，Green 函数的生成泛函为[10]

$$Z[J, \xi, \bar{\xi}, \eta] = \int \mathscr{D} A_\mu^a \mathscr{D} A_{(1)\mu}^a \mathscr{D} \pi_a^\mu \mathscr{D} \pi_a^{(1)\mu} \mathscr{D} \bar{C}_a \cdot \mathscr{D} C_a \mathscr{D} \lambda_m \cdot \delta(\Phi_{a_1}^G) \delta(\Phi_{a_2}^G) \cdot \exp\{i \int d^4 x (\mathscr{L}_{eff}^{\prime p} + J_a^\mu A_\mu^a + \bar{\xi}^a C_a + \bar{C}^a \xi_a + \eta^m \lambda_m)\} \tag{30}$$

其中

$$\mathscr{L}_{eff}^{\prime p} = \mathscr{L}^p + \mathscr{L}_m + \mathscr{L}_{gh} \tag{31}$$

$$\mathscr{L}^p = \pi_a^\mu \dot{A}_\mu^a + \pi_a^{(1)\mu} \dot{A}_{(1)\mu} - \mathscr{H}_c \tag{32}$$

$$\mathscr{L}_m = \lambda_1^a \Phi_{a_1}^{(1)} + \lambda_2^a \Phi_a^{(2)} \tag{33}$$

$$\mathscr{L}_{gh} = 2 \bar{C}_a D_{bi}^a \partial_i C_b \tag{34}$$

$\mathscr{H}_c$ 是(27)式相应的正则 Hamilton 量密度. π_a^μ 和 $\pi_a^{(1)\mu}$ 分别为 A_μ^a 和 $\dot{A}_{(1)\mu}^a = A_{(1)\mu}^a$ 对应的共轭动量. $\{\Phi\}$和$\{\Phi^G\}$分别为约束条件和规范条件. 在(30)式中, 我们仅对场量 A_μ^a 引入了外源 J_a^μ. 由于理论规范无关[14], 规范条件 $\Phi_{ai}^G \approx 0$ $(i=1, 2)$ 可用规范条件 $\Phi_{ai}^G - P_{ai}(x) \approx 0$ 来代替, 其中 $P_{ai}(x)$ 为与规范无关的函数. 用 $\exp[-\frac{1}{2\alpha_i}\int d^4 x (P_{ai})^2]$ (α_i 为参数)去乘(30)式, 然后关于 $P_{ai}(x)$ 作泛函积分, 略去无关紧要的因子, 得

$$Z[J, \xi, \xi, \eta] = \int \mathscr{D} A_\mu^a \mathscr{D} A_{(1)\mu}^a \mathscr{D} \pi_a^\mu \mathscr{D} \pi_{(1)a}^\mu \mathscr{D} \bar{C}_a \mathscr{D} C_a \mathscr{D} \lambda_m \cdot \exp\{i \int d^4 x (\mathscr{L}_{eff}^p + J_a^\mu A_\mu^a + \bar{\xi}^a C_a + \bar{C}^a \xi_a + \eta^m \lambda_m)\} \tag{35}$$

其中

$$\mathscr{L}_{eff}^p = \mathscr{L}^p + \lambda_1^a \Phi_a^{(1)} + \lambda_2^a \Phi_a^{(2)} - \frac{1}{2\alpha_1} (\Phi_{a1}^G)^2 - \frac{1}{2\alpha_2} (\partial^i A_i^a)^2 + 2 \bar{C}_a D_{bi}^a \partial_i C_b \tag{36}$$

考虑相空间中的 BRS 变换:

$$\delta A_\mu^a = D_{b\mu}^a C^b C, \qquad \delta A_{(1)\mu}^a = \partial_0 (D_{b\mu}^a C^b \tau) \tag{37a}$$

$$\delta \pi_a^\mu = f_{be}^a \pi_e^\mu C^b \tau - f_{be}^a \pi_e^{(1)\mu} C^b \tau, \quad \delta \pi_a^{(1)\mu} = f_{be}^a \pi_e^{(1)\mu} C^b \tau \tag{37b}$$

$$\delta C^a = \frac{\tau}{2} f_{be}^a C_b C_e, \qquad \delta \bar{C}^a = -\frac{\tau}{\alpha_2 g} \partial^i A_i^a \tag{37c}$$

其中 τ 为 Grassmann 参数. 由于高阶微商纯 Yang-Mills 场的约束 $\Phi_a^{(1)} \approx 0$ 和 $\Phi_a^{(2)} \approx 0$ 均为第一类约束, 变换(37a)式是由第一类约束作为规范生成无所产生的规范变换[15], 它不

会离开约束超曲面[9]. 因此，在BRS变换(37)式下，沿着约束(包括规范约束)所确定的超曲面上，系统的有效正则拉氏量(36)式是不变的，即 $\delta\mathscr{L}^{p}_{eff}\approx 0$. 变换(37)式的Jacobi行列式为1. 按(25)式得系统的广义BRS量子守恒荷:

$$Q=\int d^3x(\pi^{\mu}_{a}\delta A^{a}_{\mu}+\pi^{(1)\mu}_{a}\delta A^{a}_{(1)\mu}+\pi_{a}\delta C^{a}+\bar{\pi}_{a}\delta\bar{C}^{a}) \tag{38a}$$

其中

$$\pi^{o}_{a}=\frac{1}{\wedge^2}D^{b}_{aj}D^{e}_{bo}F^{jo}_{e} \tag{38b}$$

$$\pi^{i}_{a}=\frac{1}{\wedge^2}(D^{bj}_{a}D^{e}_{bj}F^{oi}_{e}+D^{a}_{bj}D^{e}_{bo}F^{ij}_{e})-D^{b}_{ao}\pi^{(1)i}_{b}+F^{oi}_{a} \tag{38c}$$

$$\pi^{(1)o}_{a}=0 \tag{38d}$$

$$\pi^{(1)i}_{a}=\frac{1}{\wedge^2}D^{a}_{bj}F^{ij}_{b} \tag{38e}$$

$$\pi_{a}=-\dot{\bar{C}}^{a} \tag{38f}$$

$$\bar{\pi}_{a}=D^{a}_{bo}C^{b} \tag{38g}$$

我们给出的上述形式的显著优点在于勿需作出系统Green函数的相空间生成泛函中对正则动量的泛函积分，即可导出相应的结果.

参考文献

1 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质. 北京: 北京工业大学出版社. 1993

2 Suura H, Yang B-L. Derivation of General Conservation Laws and Ward-Takahashi Identities in the Functional Integration Method. Phys Rev, 1973, D8(12): 4353～4371

3 Joglekar S D, Phys Rev, 1991, D44(12): 3879～3881

4 Danilov G S. Phys Lett, 1991,B257(3): 285～291

5 李子平. 高阶微商场论中奇异系统正则形式的Noether定理和Poincari-Cartan积分不变量, 中国科学(A辑), 1992(9): 977～986

6 Lhallabi T, N=2 Supersymmetric Ward Identities and Renormalized BRS and Anti-BRS Operators in Harmonic Superspace, Int J Theor Phys, 1989, 28(8): 875～891

7 Mizrahi M M. Phase Space Path Integral, Without Limiting Procedure, J Math Phys, 1978, 19(1): 298～307

8 阮图南, 范洪义, 王明中. 路径积分量子化的时间延拓理论, 见: 李华钟, 谷超豪, 周光召主编. 规范场及其他物理问题讨论会文集. 上海: 上海科学技术出版社, 1984. 23～34

9 Li Z P. Canonical Symmetry of a Constrained Hamiltonian System and Canonical Ward Identiey, Int J Theor Phys, 1995, 34(4): 523～543

10 Gitaman D M, Tyutin I V. Quantization of Fields with Consftraints, Berlin: Springer-Verlag, 1990

11 Dirac P A M. Lectures on Quantum Mechanics, New York: Yeshica Universit, 1964

12 Henneaux M, Teitelboim C, Zanell J. Gauge Invariance and Degree of Freedom Count, Nucl Pgys, 1990, B332: 169～187

13 Li Z P. On the Invalidity of a Conjecture of Dirac, Chinese Phys Let, 1993, 10(2): 68～70

14 Sundermeyer K. Leture Notes in Physics, Berlin: Springer-Verlag, 1982

15 Li Z P, Xie Y C. Gauge Generator in Dirac Theory of Constrained System with Singular Higher-Order Lagrangian. Commun Theor Phys, 1994, 21(2): 247～252

Global Canonical Symmetry in the Functional Integral Formalism

Li Ziping

(Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, 100022)

Tang Taiming

(Department of Mathematics, Xingjiang Normal University, Urumqi, 830054)

Abstract In this paper, on the basis of the phase-space functional integral for a system with a singular higher-order lagrangian, the canonical Ward identities for such a system under the global transformation in extended phase space have been derived; the quantal conserved charge under the global symmetry transformation in extended phase space is obtained. In view of this conserved charge in general is different from Noether charge in classical theory. A preliminary application of this formulation to Yang-Mills theory with higher-order derivatives is presented; the generalized BRS Charge is deduced. It is shown that the advantage of this formulation is that one does not need to carry out the integration over canonical momenta in phase-space functional integral, which could not be done by usual practice.

Keywords higher order derivative lagrangian, quantal conserved charge, functional integral