

# 曲面积分与局部有限元联合求解摆线 锥齿轮非线性振动特性

刘志峰, 张敬莹, 蒋凤麒, 杨文通, 蔡力钢  
(北京工业大学 精密超精密加工国家工程研究中心, 北京 100124)

**摘要:** 针对重载啮合中动态传递误差所导致的非线性振动问题, 以及如何准确预测和计算等摆线锥齿轮传动中的动态传递误差进一步改善这类齿轮系统振动特性, 研究了在一定的运行速度和扭矩范围内摆线锥齿轮的动态响应特性, 对摆线锥齿轮非线性振动特性提出了一种新的曲面积分与局部有限元联合求解方法, 这种方法可以精确表达轮齿几何及轮齿接触力等对齿轮动力学性能有关键影响的因素; 此外, 所提出的方法无需将静态传递误差、时变拟合刚度和啮合频率变量等非线性因素作为外部的激励进行求解, 而是从齿轮啮合的每一时步计算动态接触力以及动态传递误差, 最终得出摆线锥齿轮的非线性振动特性, 采用本方法可以较好地改善摆线锥齿轮的振动特性。

**关键词:** 摆线锥齿轮; 非线性振动; 有限元; 联合求解方法

**中图分类号:** TH 132.414

**文献标志码:** A

**文章编号:** 0254-0037(2012)11-1643-05

## Combined Solution Method of Surface Integral and Local FEM for the Non-line Vibration Characteristic of Cycloid Bevel Gear

LIU Zhi-feng, ZHANG Jing-ying, JIANG Feng-qi, YANG Wen-tong, CAI Li-gang  
(National Engineering Research Center of Precision and Ultra-precision Machining,  
Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

**Abstract:** This paper researches the dynamic response characteristic of the cycloid bevel gear under a wide range of operation speed and torque, and proposes a new method of semi-analytical FEM. The new method can precisely present the key factors of the gear tooth such as the tooth geometry and tooth contact stress, which influences the dynamic characteristic of the cycloid bevel gear significantly. Different from the conventional method, the non-line factors such as the static transmission error, time-varied stiffness and meshing frequency variation are no longer considered as the excitation. However, every time step of gear meshing is considered to calculate the dynamic contact stress and dynamic transmission error, and finally present the non-line vibration characteristic of cycloid bevel gear.

**Key words:** cycloid bevel gear; non-line vibration; FEM; combined solution method

摆线锥齿轮因为其重合度高, 传递扭矩大, 在重载、大功率的复杂工况下使用尤为广泛, 其动态特性也直接影响到动力传动系统的可靠性。因此, 摆线锥齿轮的动态特性研究一直受到国内外学者的重视, 在其结构模态分析、线性振动分析以及动态试验

等方面取得了许多研究成果<sup>[1-5]</sup>。本文以重载摆角铣头中的摆线锥齿轮作为研究对象, 建立了基于有限元方法的曲面积分与局部有限元联合求解模型, 对重载摆角铣头的这一核心传动部件的非线性振动特性做了分析研究。这种新的研究方法区别于传统

收稿日期: 2010-12-27.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51075006).

作者简介: 刘志峰(1973—), 男, 副教授, 主要从事机械传动与数字化设计方面的研究, E-mail: lzf@bjut.edu.cn.

方法的部分在于,它无需将时变啮合刚度和啮合频率变量等非线性因素作为外部的激励进行求解,而是从齿轮啮合的每一时步计算动态接触力以及动态传递误差,最终得出摆线锥齿轮的非线性振动特性.

### 1 局部有限元振动方程

图1所示为摆线锥齿轮轮齿弹性振动模型,其振动方程是基于轮齿内部曲面积分和外部有限元方法列出的,这种方法可以有效地得到轮齿的变形量及其载荷.啮合齿对的每一个齿轮都在指定的运转速度下按已知的运动轨迹运转,有限单元的位移向

量  $x_{fi}$  基于该已知的运转轨迹得到. 齿轮啮合过程中,在单个时间积分步长上视有限单元的刚度、阻尼为衡量,其动力学方程就可以线性方程表示为式(1),在轮齿完成整个啮合过程后对各时间步长进行拟合,最终得出齿轮整个啮合过程的非线性振动特性.

$$M_{fi}\ddot{x}_{fi} + C_{fi}\dot{x}_{fi} + K_{fi}x_{fi} = f_{fi} \quad (1)$$

式中:  $f_{fi}$  为指定的外部载荷; 阻尼矩阵  $C_{fi}$  通过瑞利阻尼模型得到

$$C_{fi} = \mu M_{fi} + \eta K_{fi} \quad (2)$$

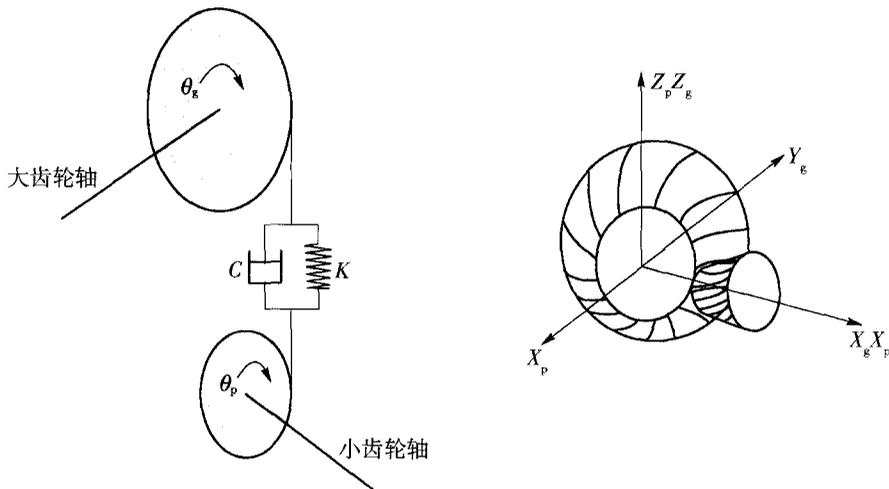


图1 轮齿弹性振动模型

Fig. 1 Gear tooth elastic vibration model

如果有限元网格严格定义在局部坐标系下,则  $x_{fi}$  不包含刚体自由度,且  $K_{fi}$  正定,  $M_{fi}$  恒正定. 对于有限元网格不定义刚体自由度,但是必须对运动的坐标系进行定义. 以位移向量  $x_{fi}$  定义有限元网格坐标系的刚体自由度,这一位移最终在总的已知运动轨迹上进行叠加. 对于当前的研究系统,齿轮中心的平移运动受到约束,每个齿轮都只有1个自由度  $\theta_i$ ,由此,包含位移向量  $x_{fi}$  的增广矩阵运动方程可以表示为

$$\begin{bmatrix} M_{fi} & M_{fri} \\ M_{fri} & M_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{fi} \\ \ddot{x}_{ri} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{fi} & C_{fri} \\ C_{fri} & C_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{fi} \\ \dot{x}_{ri} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{fi} & K_{fri} \\ K_{fri} & K_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{fi} \\ x_{ri} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{fi} \\ f_{ri} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

式中:  $M_{ri} = M_{fi}^T$ ;  $K_{ri} = K_{fi}^T$ ; 通过有限元能量方法进行计算,所有集中质量计入  $M_{ri}$ . 在整体系统中,齿轮处于弹性而非刚性支承,支承方式以集中质量的弹簧-阻尼单元来联接齿轮坐标系和支座,弹簧-阻

尼单元与其他的集中刚度以及黏性阻尼构成式(3)中的矩阵  $K_{ri}$  与  $C_{ri}$ , 由此,描述单个齿轮有限单元的方程就转化为一个整体方程来描述整个齿轮系统:

$$\begin{bmatrix} M_{fi} & M_{fri} \\ M_{fri} & M_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_f \\ \ddot{x}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{fi} & C_{fri} \\ C_{fri} & C_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_f \\ \dot{x}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{fi} & K_{fri} \\ K_{fri} & K_{ri} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_f \\ x_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_f \\ f_r \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$x_f = \begin{Bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \\ \vdots \\ x_{fi} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad x_r = \begin{Bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ \vdots \\ x_{ri} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad f_f = \begin{Bmatrix} f_{f1} \\ f_{f2} \\ \vdots \\ f_{fi} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad f_r = \begin{Bmatrix} f_{r1} \\ f_{r2} \\ \vdots \\ f_{ri} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = f, \quad x = \begin{Bmatrix} x_f \\ x_r \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f_f \\ f_r \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(4)中矩阵  $K_{ri}$  一般不是满秩矩阵,所以刚度矩阵

$\mathbf{K}$  是不可逆矩阵, 这就是每个齿轮可以作无约束的刚性旋转的原因。

在静态和准静态分析中, 质量和阻尼矩阵被忽略, 系统方程(6)简化为

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (7)$$

动力学分析中, 运用 Newmark 对方程进行时间离散化, 式(6)经离散后转化为

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K}]\mathbf{x}_{n+1} = \\ & -[-2\mathbf{M} + (1-2\gamma)\Delta t\mathbf{C} + (1/2-2\beta+\gamma)\Delta t^2\mathbf{K}]\mathbf{x}_n - \\ & [\mathbf{M} - (1-\gamma)\Delta t\mathbf{C} + (1/2+\beta-\gamma)\Delta t^2\mathbf{K}]\mathbf{x}_{n-1} + \\ & \Delta t^2[\beta\mathbf{f}_{n+1} + (1/2-2\beta+\gamma)\mathbf{f}_n + (1/2+\beta-\gamma)\mathbf{f}_{n-1}] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t_0 + n\Delta t), \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{f}(t_0 + n\Delta t) \quad (9)$$

由 Newmark 方法的理论知道, 在  $\gamma = 1/2, \beta \geq 1/4$  条件下, 可保证方程迭代无条件稳定, 本文中取  $\gamma = 1/2, \beta \geq 1/4$ . 式(8)可写成  $\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}$ , 其中  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K}$  是等效刚度矩阵,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{n+1}$ , 且  $\hat{\mathbf{f}}$  等效载荷向量. 式(8)实质上与式(7)一致, 在以下的讨论中对其进行同样的处理。

对式(7)作线性坐标变换以使其对角化并分离出非奇异部分为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\phi & \mathbf{T}_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_\phi \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_\phi \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{T}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\phi^T \\ \mathbf{T}_\theta^T \end{bmatrix} \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_\phi \\ \mathbf{g}_\theta \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_\phi \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_\phi \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_\phi \\ \mathbf{g}_\theta \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中列向量  $\mathbf{T}$  包含特征向量  $\mathbf{K}$ , 若  $\mathbf{K}$  为奇异矩阵, 整体坐标可划分为弹性体部分  $\mathbf{q}_\phi$  和刚性体部分  $\mathbf{q}_\theta$ ,  $\mathbf{K}_{\phi\phi}$  是对角阵且正定. 对于动态系统, 等效刚度矩阵  $\hat{\mathbf{K}}$  总是正定, 因此  $\mathbf{q}_\theta$  总是零维矩阵, 方程(11)的部分可写为

$$\mathbf{q}_\phi = \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{g}_\phi, \quad \mathbf{g}_\theta = \mathbf{T}_\theta^T \mathbf{f} = 0 \quad (12)$$

对于接触分析, 考虑如图 2 所示的大-小齿轮啮合齿轮对. 轮齿表面精确定义为连续的曲线, 或者是定义为一簇特定曲面法向的曲面坐标系, 且这些坐标系不受有限元网格节点的约束. 用于描述曲面的点的数量是任意的, 它表明了轮齿表面可能的接触点, 定义  $\hat{\varepsilon}$  为每 1 对接触轮齿在未加载和未变形状态下沿公共法向的分离量,  $d$  为其受载变形状态下最终的分离距离,  $\delta$  为载荷引起的分离距离的变化量,  $\mathbf{p}$  是齿轮对沿公共法向的接触载荷, 齿轮对最终分离量由下式计算:

$$d = \hat{\varepsilon} + \delta \quad (13)$$

外部载荷向量  $\mathbf{f}$  与接触力向量  $\mathbf{p}$  成线性关系:

$$\mathbf{f} = \mathbf{E}\mathbf{p} + \mathbf{f}_0 \quad (14)$$

式中:  $\mathbf{E}$  为已知的非方阵, 它将齿轮对上的接触力  $\mathbf{p}$  分配成啮合点的点力,  $\mathbf{E}$  的取值取决于轮齿的几何形状和有限元插补函数;  $\mathbf{f}_0$  是外部定义的载荷向量, 是作用在模型上的非接触载荷. 从式(12)和(14)得到

$$\mathbf{q}_\phi = \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{T}_\phi^T (\mathbf{E}\mathbf{p} + \mathbf{f}_0) = (\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{T}_\phi^T \mathbf{E})\mathbf{p} + (\mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{T}_\phi^T) \mathbf{f}_0 \quad (15)$$

分离量  $\delta$  的增加与式(6)中位移向量有关, 表达为

$$\delta = \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\phi & \mathbf{T}_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_\phi \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} \quad (16)$$

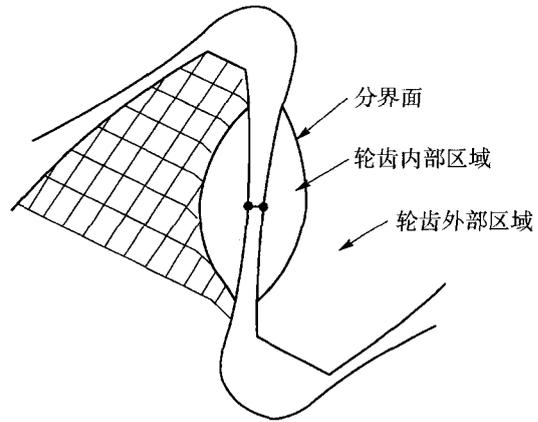


图 2 摆线锥齿轮轮齿接触区划分示意图  
Fig. 2 Schematic of cycloid bevel gear tooth contact area

与前文所述的  $\mathbf{E}$  相同,  $\mathbf{G}$  的取值同样取决于轮齿几何形状和有限元插补函数, 式(16)只包含轮齿外部区域有限单元在接触点所产生的变形量. 除此之外, 还要对模型内部区域变形所产生的变形量作线性叠加, 这部分变形量按轮齿表面的曲面积分和有限元方法联合求解得到, 这样又引入了另一部分变形量  $A_{local}\mathbf{p}$ , 联立式(13)、(15), 可得

$$\begin{aligned} d = \hat{\varepsilon} + \delta = \hat{\varepsilon} + \mathbf{G}\mathbf{T}_\phi \mathbf{q}_\phi + \mathbf{G}\mathbf{T}_\theta \mathbf{q}_\theta + A_{local}\mathbf{p} = \\ (\mathbf{G}\mathbf{T}_\phi \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{T}_\phi^T \mathbf{E} + A_{local})\mathbf{p} + \mathbf{G}\mathbf{T}_\theta \mathbf{q}_\theta + (\hat{\varepsilon} + \mathbf{G}\mathbf{T}_\phi \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{T}_\phi^T \mathbf{f}_0) \end{aligned} \quad (17)$$

从而得

$$\begin{aligned} d = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{C}\mathbf{q}_\theta + \varepsilon \\ \mathbf{A} = (\mathbf{G}\mathbf{T}_\phi \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{T}_\phi^T \mathbf{E} + A_{local}), \\ \mathbf{C} = \mathbf{G}\mathbf{T}_\theta, \quad \varepsilon = \hat{\varepsilon} + \mathbf{G}\mathbf{T}_\phi \mathbf{K}_{\phi\phi}^{-1} \mathbf{T}_\phi^T \mathbf{f}_0 \end{aligned} \quad (18)$$

另外由式(12)、(14)得到平衡方程

$$\mathbf{T}_\theta^T \mathbf{E}\mathbf{p} + \mathbf{T}_\theta^T \mathbf{f}_0 = 0 \quad (19)$$

从而得到

$$\mathbf{B}\mathbf{p} = \lambda, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T}_\theta^T \mathbf{E}, \quad \lambda = -\mathbf{T}_\theta^T \mathbf{f}_0 \quad (20)$$

到此,接触问题就转化为求解方程(18)和(20)以得到  $d$  和  $p$ , 并且  $q_0$  的取值在所有单元的  $d_i$ ,  $p_i \geq 0$  且  $d_i = 0$  或  $p_i = 0$  条件下取得,其结果用来解方程(14)、(10)和(12)中的位移  $x$ , 接触力  $p$  用于曲面积分和有限元联合求解中计算轮齿偏移量和轮齿接触区的应力. 这一过程在每一个积分时步上进行,  $E$  和  $G$  完全取决于运动关系, 则必须在齿轮运转过程的每一时步中重复计算, 因为接触状态的改变, 也必须在每一时步重复计算, 有限元刚度矩阵  $K$  (或是动态分析中的  $\hat{K}$ ) 和它的特征向量  $T$  则只需进行一次计算. 同时, 将运转扭矩和速度作为输入来做动力学分析, 预期的输出是每个齿轮的旋转振动, 以动态传递误差表达为  $DTE = r_1\theta_1 + r_2\theta_2$ , 并通过计算每个啮合轮齿上接触力向量  $p$  得到轮齿接触力.

从根本上讲, 曲面积分和有限元联合求解方法的概念就是要将轮齿表面曲面积分的结果在分界面上同远离轮齿表面的轮心部分的有限元求解结果相匹配, 最终得出整个轮齿的动态响应特性. 因本文篇幅局限, 其匹配的方法未及论述, 可参看文献[6]. 由于轮齿内部区域齿面变形的计算和接触力模型的建立都不依赖有限元, 故不必对轮齿的有限元网格做特别的细化. 这一点保证了对包含复杂接触特性的模型作动力学分析成为可能, 并通过足够数量的时间步长来得到系统频域响应特性.

因此, 本文与以往文献的根本差别在于: 1) 不需要动力学激励的预先假设, 而在已有文献中, 时变啮合刚度和静态传递误差都作为激励输入进行计算, 从而得到轮齿的非线性动力学特性; 2) 传统有限元齿轮啮合动力学分析理论, 须对轮齿齿面进行精确描述, 而本文只对轮心部分作有限元分析, 齿面部分则采用轮齿曲面积分来计算啮合过程中齿面的变形量, 故对齿面部分未作网格划分.

## 2 案例分析

用上述分析求解方法求解某型号重型机床铣头传动链摆线锥齿轮的非线性振动特性, 齿轮对几何参数及工况如表 1 所示.

本例中, 以表 1 中的输入扭矩进行计算, 齿轮以稳定扭矩  $T_i$  进入啮合, 对于单步的积分时间步长, 可将输入扭矩  $T_i$  适当放大以近似实际工况, 得到摆

线锥齿轮振动特性的计算结果, 如图 3 所示.

表 1 摆线锥齿轮几何参数及工况  
Table 1 Cycloid bevel gear geometry parameters and operating conditions

参数	数值
齿数比 $Z_1/Z_2$	9/54
轴交角 $\Sigma/(\circ)$	90
大轮大端节圆直径 $d_{e2}/\text{mm}$	760
大轮齿宽 $b/\text{mm}$	110
大轮参考点螺旋角 $\beta_m/(\circ)$	29.5
参考点法向模数 $m_n/\text{mm}$	10.5
刀盘名义半径 $r_0/\text{mm}$	210
输入扭矩 $T_i/\text{Nm}$	100 ~ 300
啮合频率 $f/\text{Hz}$	500 ~ 3 500

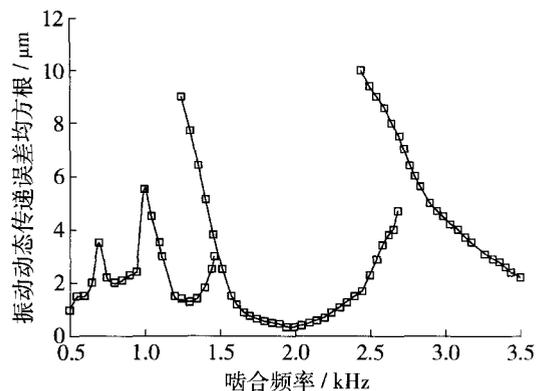


图 3 输入扭矩  $T = 150 \text{ Nm}$  动态传递误差频响  
Fig. 3 Frequency response of dynamic transmission error on the input torque  $T = 150 \text{ Nm}$

图 3 表明了  $T = 150 \text{ Nm}$  状态下相应动态传递误差的结果, 从图中可看出有 2 个明显的共振区, 分别发生在  $f_m = 1 200 \text{ Hz}$  和  $f_m = 2 700 \text{ Hz}$  附近. 在已有的 Blankenship 和 Kahraman 的研究中, 标准齿轮啮合有一个固有频率为  $f_n = 2 700 \text{ Hz}$  [7-8], 这说明摆线锥齿轮有与标准齿轮相似的共振特性, 从图中可以看出摆线锥齿轮振动的非线性以及多次的振动跳跃现象.

图 4 则是摆线锥齿轮系统在  $T = 100, 200$  和  $300 \text{ Nm}$  时动态传递误差的结果, 从图中可以看出, 随着扭矩的变化, 齿轮系统的共振发生频率也在相应发生变化. 在大扭矩的运转条件下, 齿轮振动的跳跃现象更趋明显.

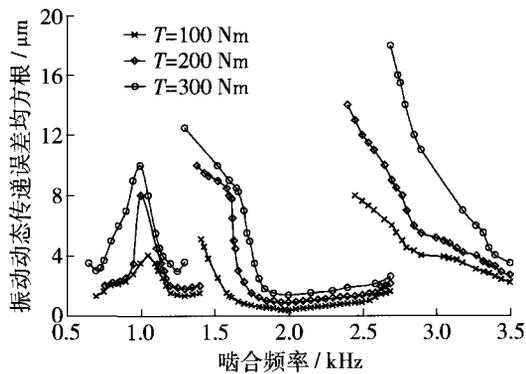


图 4 输入扭矩  $T=100, 200, 300$  Nm 动态传递误差频响  
Fig. 4 Frequency response of dynamic transmission error on the input torque  $T=100, 200, 300$  Nm

### 3 结论

1) 在摆线锥齿轮的非线性振动研究中, 曲面积分与局部有限元联合求解方法可以得到足够精确的计算结果, 不需要对接触曲面的网格进行高度细化, 这突破了传统有限元方法在复杂系统中不能充分发挥作用的局限性, 为开展摆线锥齿轮这类复杂系统非线性振动特性的研究提出了一种有效的方法。

2) 仿真结果表明: 与普通标准齿轮相比较, 虽然摆线锥齿轮有更大的重合度等特点, 但时变啮合刚度、齿侧间隙等非线性因素同样会引起摆线锥齿轮系统的强非线性特性以及频响的跳跃现象。

### 参考文献:

- [1] 晏砺堂, 李其汉. 盘形锥齿轮的横向振动特性[J]. 航空动力学报, 1955, 3(2): 23-27.  
YAN Li-tang, LI Qi-han. Analysis of lateral vibration of a bevel gear[J]. Journal of Aerospace Power, 1955, 3(2):

23-27. (in Chinese)

- [2] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学(振动、冲击、噪声)[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 291-318.  
[3] GOSELIN C, CLOUTIER L, NGUYEN Q D. A general formulation for the calculation of the load sharing and transmission error under load of spiral bevel and hypoid gears[J]. Mech Mach Theory, 1995, 3: 433-450.  
[4] 王三民, 沈允文, 董海军. 含间隙和时变啮合刚度的弧齿锥齿轮传动系统非线性振动特性研究[J]. 机械工程学报, 2003, 39(2): 28-32.  
WANG San-min, SHEN Yun-wen, DONG Hai-jun. Nonlinear dynamical characteristics of a spiral bevel gear system with backlash and time-varying stiffness [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(2): 28-32. (in Chinese)  
[5] OZGUVEN H N. A non-linear mathematical model for dynamic analysis of spur gears including shaft and bearing dynamics[J]. Journal of Sound Vibration, 1991, 145(2): 239-260.  
[6] VIJAYAKAR S M. A combined surface integral and finite element solution for a three-dimension contact problem [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1991, 31(1): 524-546.  
[7] LASSAD W, TAHAR F, MOHAMED H. Nonlinear dynamics of a two-stage gear system with mesh stiffness fluctuation, bearing flexibility and backlash [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(5): 1058-1069.  
[8] LIU G, PARKER R G. Dynamic modeling and analysis of tooth profile modification for multimesh [J]. Gear Vibration. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(3): 1-13.

(责任编辑 张 蕾)