

直接求解变分问题的方块脉冲函数法

徐 宁 寿

(电气自动化教研室)

摘 要

本文利用方块脉冲函数的优良运算性质, 导出了一种简便有效地直接求解变分问题的新方法, 它既与现有多种直接方法各有相似之处, 又具有某些独特的优点。

A Direct Method for Solving Variational Problems via Block-Pulse Functions

Xu Ning-Shou

Abstract

A new direct method for rapidly and effectively solving variational problems is developed by using the elegant operational properties of the block-pulse functions. Compared with existing direct methods, the new method has both something in common and distinctive merits.

一、引 言

众所周知, 求解泛函

$$J[x(t)] = \int_0^T F[t, x(t), \dot{x}(t)] dt \quad (1.1)$$

极值曲线的正规方法, 是通过求解欧拉方程

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0 \quad (1.2)$$

进行的。但实际上, 这样得到的微分方程只是在一些比较特殊的情况下才容易积分。于是,

本文于 1983 年 6 月 4 日收到。

很早就出现了许多求解变分问题的直接方法,例如一般熟知的欧拉有限差分法、里兹法^[1]等。1975年又有人提出了采用沃尔什函数的直接方法^[2]。

本文综合以上各种方法的某些特点,利用方块脉冲函数的优良运算性质,导出一种比较简便有效的直接求解变分问题的新方法,其基本思路是:

- 1) 将容许函数近似展开成有限项系数待求的方块脉冲函数级数。
- 2) 将泛函和边界条件都化成以容许函数的方块脉冲函数系数为自变量的多元函数形式。
- 3) 把边界条件看作泛出求极值问题的约束条件,按拉格伦日乘子法构造辅助函数,进而推出泛函极值存在的必要条件。
- 4) 求解表述以上必要条件的代数方程,便得到极值曲线的方块脉冲函数系数值。

二、方块脉冲函数的定义和运算性质

方块脉冲函数的概念最早是由哈尔莫斯明确提出^[3],但其在工程上的应用,直到近年来才为人们所重视^[4~11]。现将本文中必须用到的有关定义和运算性质简介于下。

图1a中示有在 $[0, T]$ 区间中包含有 m 个分量的方块脉冲函数族,其表达式为

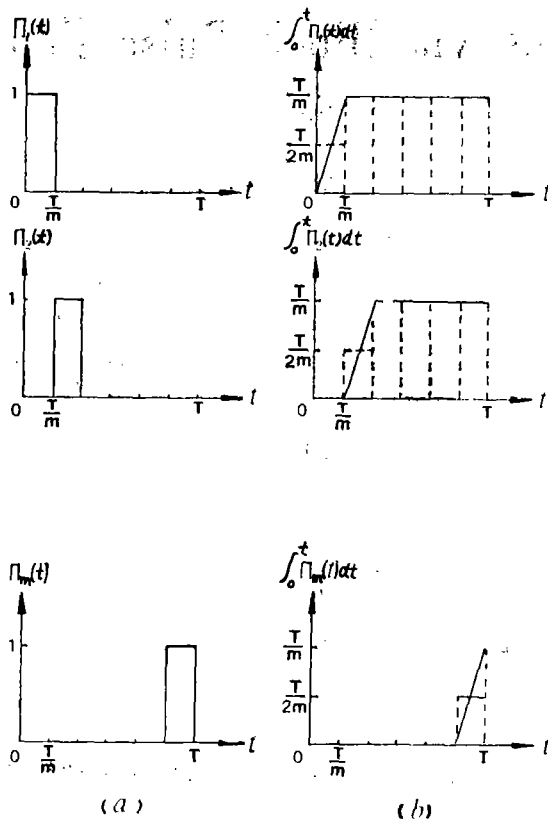


图1 定义在区间 $[0, T]$ 上的、由 m 个分量组成的方块脉冲函数族(a)及其积分(b)

$$\Pi_k(t) = \begin{cases} 1, & (k-1)T/m \leq t < kT/m \\ 0, & \text{其他处} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$k = 1, 2, \dots, m$$

式中 m 为子区间个数, 可取为任意整数。

方块脉冲函数具有如下脱关性:

$$\Pi_k(t)\Pi_j(t) = \begin{cases} \Pi_k(t), & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2.2)$$

由此容易导出正交性:

$$\int_0^T \Pi_k(t)\Pi_j(t)dt = \begin{cases} T/m, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

利用这种正交性不难证明, 任何在区间 $[0, T]$ 上绝对可积的函数 $X(t)$ 都可用方块脉冲函数近似表示为

$$X(t) \cong \sum_{K=1}^m X_K \Pi_K(t) \quad (2.4)$$

式中 X_K 为 $X(t)$ 的第 k 个方块脉冲函数分量的系数

$$X_K = \frac{m}{T} \int_0^T X(t) \Pi_K(t) dt$$

$$= \frac{m}{T} \int_{(K-1)T/m}^{KT/m} X(t) dt, \quad k=1, 2, \dots, m \quad (2.5)$$

可以看出, X_K 实际上是 $X(t)$ 在第 k 个子区间 $[(k-1)T/m, kT/m]$ 上的积分平均值。当 T/m 选得很小时, 近似地有

$$X_K \cong \frac{1}{2} \{ X[(k-1)T/m] + X(kT/m) \}, \quad k=1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

图 2 即为函数 $X(t)$ 用方块脉冲函数近似表示时的一般情况示意。

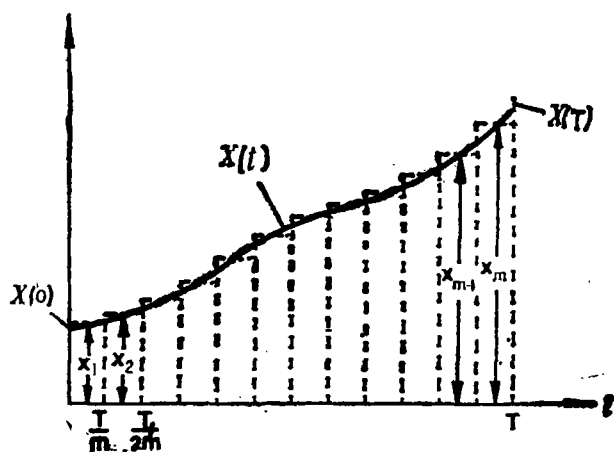


图 2 用方块脉冲函数近似表示在区间 $[0, T]$ 上绝对可积的函数 $X(t)$

设

$$\Pi_{(m)}(t) = [\Pi_1(t), \Pi_2(t), \dots, \Pi_m(t)]^T \quad (2.7)$$

$$X = [X_1, X_2, \dots, X_m]^T \quad (2.8)$$

分别为 m 维方块脉冲函数向量和 $X(t)$ 的方块脉冲函数系数向量 (上标 T 表示转置), 则 (2.4) 式可改写成二向量的内积形式:

$$X(t) \cong X^T \Pi_{(m)}(t) = \Pi_{(m)}^T(t) X \quad (2.9)$$

容易推知, 当 $X(t) = C$ (常数) 时, 有

$$\mathbf{X}^T = C[1, 1, \dots, 1]_{1 \times m}$$

而当 $X(t) = t$ 时有

$$\mathbf{X}^T = \frac{1}{2m}[1, 3, \dots, 2m-1]_{1 \times m} \quad (2.11)$$

由图 1b 不难看出, 若将方块脉冲函数的积分函数族 $\int_0^t \Pi_k(t') dt', k=1, 2, \dots, m$, 仍用方块脉冲函数本身近似展开, 则可得出方块脉冲函数的如下积分运算性质:

$$\begin{aligned} \int_0^t \Pi_k(t') dt' &\cong \frac{T}{2m} \Pi_k(t) + \frac{T}{m} \sum_{l=K+1}^m \Pi_l(t) \\ \int_0^t \Pi_{(m)}(t') dt' &\cong P_m \Pi_{(m)}(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

式中 P_m 为 $m \times m$ 方阵, 称作方块脉冲函数的积分运算矩阵, 其逆存在, 即

$$P_m = \frac{T}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & & & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}_{m \times m}, \quad P_m^{-1} = \frac{m}{T} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & \dots & (-1)^{m-1} 4 \\ & 4 & -4 & \dots & 4 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 4 & -4 \\ & & & & 2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

此外, 由脱关性还可推知

$$\Pi_{(m)}(t) \Pi_{(m)}^T(t) = \text{diag}[\Pi_1(t), \Pi_2(t), \dots, \Pi_m(t)] \quad (2.15)$$

式中 $\text{diag}[\cdot]$ 表示对角阵。进一步又可得到

$$\int_0^T \Pi_{(m)}(t') \Pi_{(m)}^T(t') dt' = \frac{T}{m} I_m \quad (2.16)$$

式中 I_m 为 $m \times m$ 单位阵。

如果 $X(t)$ 的导函数 $\dot{X}(t)$ 在区间 $[0, T]$ 上也是绝对可积的, 即可近似地展开为

$$\dot{X}(t) \cong \sum_{K=1}^m d_K \Pi_K(t) = \mathbf{d}^T \Pi_{(m)}(t) = \Pi_{(m)}^T(t) \mathbf{d} \quad (2.17)$$

$$\text{式中 } \mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_m]^T \quad (2.18)$$

为 $\dot{X}(t)$ 的方块脉冲函数系数向量, 则易推知

$$\begin{aligned} X(t) &\cong \int_0^t \dot{X}(t') dt' + X(0) \cong \mathbf{d}^T \int_0^t \Pi_{(m)}(t') dt' + X(0) \\ &\cong \mathbf{d}^T P_m \Pi_{(m)}(t) + X(0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

再与 (2.9) 式比较, 可得

$$\mathbf{X}^T = \mathbf{d}^T P_m + X(0)[1, 1, \dots, 1]_{1 \times m} \quad (2.20)$$

此外, 还可推出

$$\begin{aligned} X(T) - X(0) &= \int_0^T \dot{X}(t') dt' \cong \left[\int_0^T \Pi_{(m)}^T(t') dt' \right] \mathbf{d} \\ &= \frac{T}{m} [1, 1, \dots, 1]_{1 \times m} \mathbf{d} = \frac{T}{m} \sum_{K=1}^m d_K \end{aligned} \quad (2.21)$$

设 $\dot{X}(t)$ 在区间 $[0, T]$ 内还是连续且可微的 (或至少在端点 $t=0$ 和 $t=T$ 附近如此)。则当 T/m 取得很小时, 由于在 $t=0$ 点附近曲线 $\dot{X}(t)$ 可用过 $t=0$ 点的切线近似代替, 从而可列出 (参见图 3)

$$\frac{\dot{X}(T/m) - \dot{X}(0)}{T} \cong \frac{\dot{X}(2T/m) - \dot{X}(0)}{2T}$$

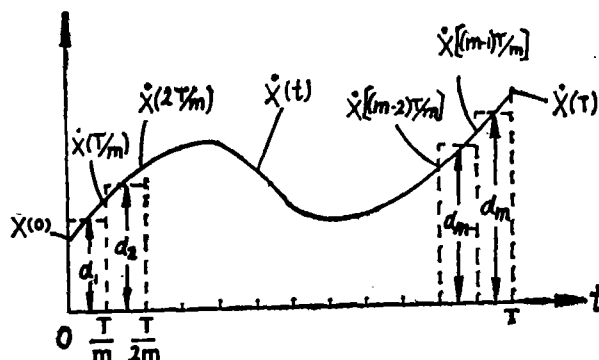


图 3 $\dot{X}(t)$ 连续可微时, 其边界值 $\dot{X}(0)$ 和 $\dot{X}(T)$ 与方块脉冲函数系数 d_1, d_2 与 d_{m-1}, d_m 间的近似关系分析

而按 (2.6) 式有

$$d_1 \cong \frac{1}{2} [\dot{X}(0) + \dot{X}(T/m)]$$

$$d_2 \cong \frac{1}{2} [\dot{X}(T/m) + \dot{X}(2T/m)]$$

于是从以上三式中消去 $\dot{X}(T/m)$ 和 $\dot{X}(2T/m)$ 便可得到

$$3d_1 - d_2 \cong 2\dot{X}(0) \quad (2.23)$$

类似地在 $X=T$ 点附近也可得到

$$3d_m - d_{m-1} \cong 2\dot{X}(T) \quad (2.24)$$

上两式可改写成向量形式:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_0^T \mathbf{d} \cong 2\dot{X}(0) \end{cases} \quad (2.25a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_0^T = [3, -1, 0, \dots, 0]_{1 \times m} \end{cases} \quad (2.25b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_T^T \mathbf{d} \cong 2\dot{X}(T) \end{cases} \quad (2.26a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_T^T = [0, \dots, 0, -1, 3]_{1 \times m} \end{cases} \quad (2.26b)$$

三、求解变分问题的具体步骤说明

1. 与采用沃尔什函数的直接方法相似, 本方法不是从 (1.1) 式中的容许函数 $X(t)$ 本身, 而是从它的导函数 $\dot{X}(t)$ 出发进行推求。具体来说, 就是先把 $\dot{X}(t)$ 近似展成 (2.17) 式所示系数 d_K , $K=1, 2, \dots, m$ 均为待求的方块脉冲函数级数, 再将 $X(t)$ 表示成 (2.19)

式。

至于(1.1)式中其他项,因为都是独立变量的已知函数,可以参照(2.4)和(2.5)两式近似展开成系数确定的方块脉冲函数级数。

2. 将以上所得 $\dot{X}(t)$ 、 $X(t)$ 和 t 的已知函数的方块脉冲函数近似展开式一併代入(1.1)式中,并利用(2.16)式,便可将泛函 $J[X(t)]$ 改写成如下一般形式

$$J[X(t)] \cong \phi[d_1, d_2, \dots, d_m] = \phi(\mathbf{d}) \quad (3.1)$$

再以所给定的边界值 $X(0)$ 、 $X(T)$ 、 $\dot{X}(0)$ 或 $\dot{X}(T)$ 代入(2.21)、(2.25)或(2.26)式中,可列出具有如下一般形式的代数方程式:

$$\varphi_i(d_1, d_2, \dots, d_m) = \varphi_i(\mathbf{d}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

式中 n 为边界条件所确定的方程式个数。

于是,对泛函 $J[X(t)]$ 求极值曲线 $X^*(t)$ 的问题,便转化为在约束条件(3.2)式下对(3.1)式所示包含 m 个变量的多元函数 $\phi(\mathbf{d})$ 求极值点 $\mathbf{d} = \mathbf{d}^*$ 的问题。

3. 为了找到能使 $\phi(\mathbf{d})$ 取极值的 $\mathbf{d}^* = [d_1^*, d_2^*, \dots, d_m^*]^T$,可采用拉格伦日乘子 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 构造辅助函数

$$\phi^*(\mathbf{d}, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \phi(\mathbf{d}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(\mathbf{d}) \quad (3.3)$$

于是, $\phi(\mathbf{d})$ 在 $\mathbf{d} = \mathbf{d}^*$ 点取极值的必要条件,即为

$$\left. \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d} = \mathbf{d}^*} = 0 \quad (3.4a)$$

$$\left. \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda_i} \right|_{\mathbf{d} = \mathbf{d}^*} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4b)$$

4. 由(3.4)式中解出 $\mathbf{d}^* = [d_1^*, d_2^*, \dots, d_m^*]^T$,再代入(2.19)式中,即得极值曲线 $X^*(t)$ 的方块脉冲函数近似解。

四、计算示例

下面以两个古典变分问题为例,具体演示方块脉冲函数法直接求解的计算步骤。

例 1: 求下列泛函

$$J[X(t)] = \int_0^1 [\dot{X}^2(t) + t\dot{X}(t)] dt \quad (4.1)$$

的极值曲线 $X^*(t)$ 。设边界条件为

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 1/4 \quad (4.1)$$

为采用方块脉冲函数法直接求解,取 $T = 1$, $m = 4$,并设

$$\dot{X}(t) \cong [d_1, d_2, d_3, d_4] \begin{Bmatrix} \Pi_1(t) \\ \vdots \\ \Pi_4(t) \end{Bmatrix} \mathbf{d}^T \Pi_{(4)}(t) = \Pi_{(4)}^T(t) \mathbf{d} \quad (4.3)$$

按(2.11)式,变量可表为

$$\begin{cases} t \cong \frac{1}{8} [1, 3, 5, 7] \Pi_{(4)}(t) = t^T \Pi_{(4)}(t) = \Pi_{(4)}^T(t) t & (4.4a) \\ t = \frac{1}{8} [1, 3, 5, 7]^T & (4.4b) \end{cases}$$

将 (4.3)、(4.4) 式代入 (4.1) 式中, 得

$$\begin{aligned} J[X(t)] &\cong \phi(d) = \int_0^1 \left[d^T \Pi_{(4)}(t) \Pi_{(4)}^T(t) d + d^T \Pi_{(4)}(t) \Pi_{(4)}^T(t) t \right] dt \\ &= d^T \left[\int_0^1 \Pi_{(4)}(t) \Pi_{(4)}^T(t) dt \right] d + d^T \left[\int_0^1 \Pi_{(4)}(t) \Pi_{(4)}^T(t) dt \right] t \\ &\dots\dots\dots (4.5) \end{aligned}$$

再利用 (2.16) 式, 可得

$$\phi(d) = \frac{1}{4} [d^T d + d^T t] \quad (4.6)$$

将边界条件 (4.2) 式代入 (2.21) 式, 可得

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 d_k = \frac{1}{4}$$

$$\text{或} \quad [1, 1, 1, 1] d - 1 = 0 \quad (4.7)$$

利用拉格朗日乘子 λ 构造辅助函数

$$\phi^*(d, \lambda) = \phi(d) + \lambda([1, 1, 1, 1] d - 1) \quad (4.8)$$

则 $\phi(d)$ 在 $d = d^*$ 点取极值的必要条件是

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi^*}{\partial d} \Big|_{d=d^*} = 0 = \frac{1}{2} d^* + \frac{1}{4} t + \lambda [1, 1, 1, 1]^T & (4.9a) \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda} \Big|_{d=d^*} = 0 = [1, 1, 1, 1] d^* - 1 & (4.9b) \end{cases}$$

或

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} I_4 & \begin{matrix} \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} \\ \dots\dots\dots & \begin{matrix} \vdots \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^* \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ -1/4 t \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

再利用分块矩阵求逆公式, 容易得出

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \\ &\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 2: 在分析图 5a 所示处于完全隔热状态下的无限长实芯板块中的热传导情况时, 遇到如下泛函求极值问题^[12]:

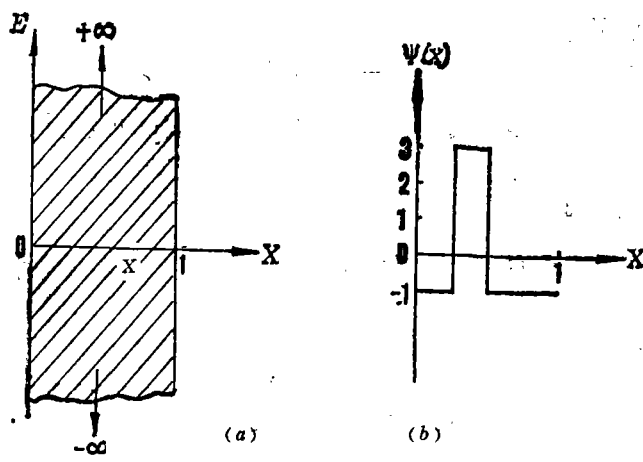


图 5 在完全隔热状态下无限大实芯板块中的热传导问题

$$J[Y(X)] = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \dot{Y}(X) - Y(X) \psi(X) \right] dx = \int_0^1 F(X, y, \dot{Y}) dx \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

式中 X 为沿板块厚度方向上的空间坐标, $Y(X)$ 为 X 处的温度, $\psi(X)$ 比例于 X 处单位体积内的发热率。若 $\psi(X)$ 取负值, 则表明在相应的 X 处, 热量不是产生出来的, 而是被吸收掉的。

板块既处在与外界完全隔热状态下, 从其内部某个区域中产生出来的热量, 必定会在其他区域中被吸收掉。因此, $\psi(X)$ 应当满足

$$\int_0^1 \psi(X) dX = 0 \quad (4.15)$$

现设 $\psi(X)$ 的分布为 (图 5b)

$$\psi(X) = \begin{cases} 3, & \frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \\ -1, & 0 \leq X < \frac{1}{4} \text{ 及 } \frac{1}{2} \leq X \leq 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

同样, 由于板块被完全隔热, 在两个端面 ($X=0$ 和 $X=1$ 处) 上的温度梯度值均应为零, 即

$$\dot{Y}(0) = 0, \quad \dot{Y}(1) = 0 \quad (4.17)$$

至少 $Y(0)$ 和 $Y(1)$ 则不作具体规定。因此, 这是一种两个端点均可变动的泛函极值问题。为采用方块脉冲函数法直接求解, 取 $T=1$, $m=8$, 则参照 (2.17) 和 (2.19) 二式有

$$\dot{Y}(X) \cong \mathbf{d}^T \Pi_{(8)}(X) \quad (4.18)$$

$$Y(X) \cong \mathbf{d}^T P_8 \Pi_{(8)}(X) + Y(0) \quad (4.19)$$

而 $\psi(X)$ 可表示为

$$\psi(X) = \psi^T \Pi_{(8)}(X) \quad (4.20a)$$

$$\psi^T = [-1, -1, 3, 3, -1, -1, -1, -1]^T \quad (4.20b)$$

于是, 将 (4.18) ~ (4.20) 诸式代入 (4.14) 式, 并利用 (2.16)、(4.15) 二式可得

$$\begin{aligned} J[Y(X)] &\cong \phi(\mathbf{d}) \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \Pi_{(8)}(X) \Pi_{(8)}^T(X) \mathbf{d} - \mathbf{d}^T P_8 \Pi_{(8)}(X) \Pi_{(8)}^T(X) \psi - Y(0) \psi(X) \right] dX \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T P_8 \psi \end{aligned} \quad (4.21)$$

再将边界条件 (4.17) 式代入 (2.25) 和 (2.26) 式, 得

$$\mathbf{b}_0^T \mathbf{d} \cong 2 \dot{Y}(0) = 0 \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{b}_1^T \mathbf{d} \cong 2 \dot{Y}(1) = 0 \quad (4.22b)$$

采用拉格伦日乘子 λ_1 和 λ_2 , 作辅助函数

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathbf{d}, \lambda_1, \lambda_2) &= \phi(\mathbf{d}) + \lambda_1 \mathbf{b}_0^T \mathbf{d} + \lambda_2 \mathbf{b}_1^T \mathbf{d} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{d} - \mathbf{d}^T P_8 \psi + \lambda_1 \mathbf{b}_0^T \mathbf{d} + \lambda_2 \mathbf{b}_1^T \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.23)$$

于是, $\phi(\mathbf{d})$ 在 $\mathbf{d} = \mathbf{d}^*$ 点取极值的必要条件为

$$\left. \frac{\partial \phi^*}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d} = \mathbf{d}^*} = 0 = \mathbf{d}^* - P_8 \psi + \lambda_1 \mathbf{b}_0 + \lambda_2 \mathbf{b}_1 \quad (4.24a)$$

$$\left. \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda_1} \right|_{\mathbf{d} = \mathbf{d}^*} = 0 = \mathbf{b}_0^T \mathbf{d}^* \quad (4.24b)$$

$$\left. \frac{\partial \phi^*}{\partial \lambda_2} \right|_{\mathbf{d} = \mathbf{d}^*} = 0 = \mathbf{b}_1^T \mathbf{d}^* \quad (4.24c)$$

或

$$\begin{pmatrix} I_8 & \vdots & \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b}_0^T & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_1^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}^* \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_8 \psi \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}^* \\ \dots \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_8 & \mathbf{b}_0 & \mathbf{b}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{b}_0^T & 0 & 0 \\ \mathbf{b}_1^T & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_8 \Psi \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_8 - \frac{1}{10}[\mathbf{b}_0 : \mathbf{b}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^T \\ \dots \\ \mathbf{b}_1^T \end{bmatrix} & \frac{1}{10}[\mathbf{b}_0 : \mathbf{b}_1] \\ \dots & \dots \\ * & * & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_8 \Psi \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{d}^* = \left(I_8 - \frac{1}{10} [\mathbf{b}_0 : \mathbf{b}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^\top \\ \vdots \\ \mathbf{b}_1^\top \end{bmatrix} \right) P_8 \Psi = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & \cdots & & & & & 0 \\ 0.3 & 0.9 & \cdots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & I_4 & & & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & & & & & & 0.9 & 0.3 \\ & & & & & & 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \frac{1}{8}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 1 & \cdots \cdots \cdots 1 \\ & \diagdown & \vdots \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & 1 \\ & & \vdots \\ & & \frac{1}{2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right)$$

$$Y^*(X) - Y(0) = \begin{cases} \frac{1}{2}X^2, & 0 < X < \frac{1}{4} \\ X - \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{8}, & \frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{8} - X + \frac{1}{2}X^2, & \frac{1}{2} < X < 1 \end{cases} \quad (4.29)$$

图6上示有极值曲线 $Y^*(X)$ 的精确解(粗实线)、方块脉冲函数法近似解(虚线)及沃尔什函数法^[2]近似解(点线)之间的对比情况。不难看出,在最小均方误差意义下,方块脉冲函数法结果也要比沃尔什函数法准确得多。

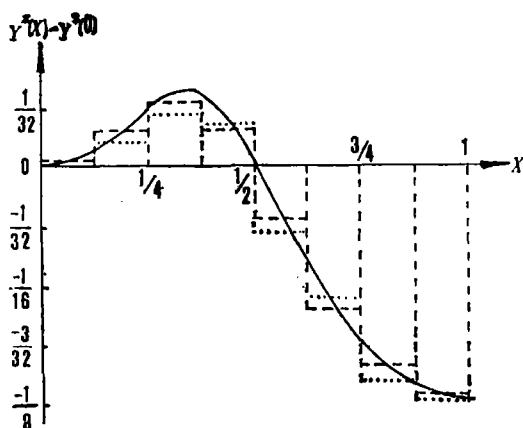


图6 例2极值曲线的精确解与方块脉冲函数法和沃尔什函数法近似解的对比

五、结 束 语

与现有多种求解变分问题的直接方法相比,本文所提出的方块脉冲函数法有以下相似点和优点:

1) 在采用有限项级数近似表示容许函数方面,本方法与采用幂级数和付里叶级数的里兹法相似,但更为简明和直观得多。

2) 在首先从容许函数的导函数入手,采用阶梯状波形逼近的作法上,本方法与沃尔什函数法相同。但由于方块脉冲函数的运算性质更为简洁清晰(如积分运算矩阵的形式更简单),具体计算上更感方便。

3) 方块脉冲函数具有脱关性,容许函数的方块脉冲函数系数直接表示出容许函数在相应于区间上的平均取值,这使本方法与对容许函数作离散化处理的欧拉有限差分法十分相似。同时,这也使本方法在边界条件的利用和近似等效表示方面,有可能比沃尔什函数法更恰当和确切,因而所得极值曲线的近似解也往往更准确些(如文中两例所示)。

因此,方块脉冲函数法是直接求解变分问题的一种简便的有效的新方法。这种方法可以推广到依赖于多个函数的泛函极值问题上。此外,若利用文献^[5]中定义的多维方块脉冲函数,本方法还可以再推广到依赖于多元函数的泛函极值问题上去。

参 考 文 献

- [1] “数学手册”编写组:《数学手册》,人民教育出版社,1979。
- [2] Chen, C.F. and Hsiao, C.H.: Walsh series direct method for solving variational problems, J. Franklin Inst., Vol. 300, No. 4, p. 265, 1975。

- [3] Harmuth, H.F.: Application of Walsh functions in communication, IEEE Spectrum, Vol. 6, p. 82, 1969.
- [4] Sannuti, B.E.: Analysis and synthesis of dynamic systems via block-pulse functions, Proc. IEEE, Vol. 124, p. 569, 1977.
- [5] Roo, G.P., and Srinivasan, T.: Multidimensional block-pulse functions and their use in study of distributed parameter systems, Int. J. Systems Sci., Vol. 11, p. 689, 1980.
- [6] Kwong, G.P., and Chen, C.F.: Linear feedback system identification via block-pulse functions, Int. J. Systems Sci., Vol. 12, p. 635, 1981.
- [7] 徐宁寿：借用方块脉冲函数分析周期阶梯波形，中国电子学会文集——信息论与沃尔什函数，1980年6月，226—231页
- [8] 徐宁寿：方块脉冲函数用于隐极式电机气隙磁场和绕组电感的分析计算，《微电机》，1982年，第2期，1—13页
- [9] 徐宁寿，郑兵：方块脉冲函数用于线性时变系统的分析和最优控制，《自动化学报》，1982年，第1期，55—67页
- [10] Cheng, B., and Hsu, N. S.: Analysis and parameter estimation of bilinear systems via block-pulse functions, Int. J. Control, Vol. 36, No. 1, p. 53, 1982.
- [11] Hsu, N. S. and Cheng, B.: Identification of non-linear distributed systems via block-pulse functions, Int. J. Control Vol. 36, No. 2, p. 281, 1982.
- [12] Schechter, R.S.: The variational method in engineering, Mc Graw-Hill, 1967.