铌酸锂单模换能片切割方向的计算

俞宽新，徐介平

（应用物理系）

摘　　要

为了使铌酸锂换能器激发单一模式的机械波，晶片的切割方向必须限制在某些确定的数值上。本文将通过求解压电增劲 Christoffel 方程，从理论上确定这些方向并计算相应方向上的波速和机电耦合系数。

The Determination of the Cutting Directions of Single Mode $LiNbO_3$ Piezoelectric Slices

Yu Kuan-xin and Xu Jie-ping

Abstract

In order to excite single mode mechanical waves from $LiNbO_3$ piezoelectric slices, the cutting directions of these slices must be restricted to certain definite values. In this article, we will theoretically determine these single mode directions by solving the piezoelectrically stiffened Christoffel equations and calculate the corresponding wave velocities and electromechanical coupling constants.

一、前　　言

当前广泛用于声光器件上的压电换能器材料主要是铌酸锂晶体。由于声光器件在工作时须要有确定的超声波模式，例如鉬酸铅器件要求沿 C 轴传布的纵波，氧化碲器件要求沿[110]方向传播且沿[110]方向振动的切变波。此外，计算换能器带宽的 Mason 等效电路也是适用于换能片只激光单一模式的情况。因此，确定单模换能片的切割方向是个重要的问题。一般所选用的铌酸锂晶片切割方向有 Z 切、X 切、$Y36°$切、$Y163°$ 切等等。但是，在理论上如何计算这些单模切向，却未见有专文论述，只是在文献[1]中给出选择这些方向的原则：

（1）由压电效应而激发的超声波必须是比较纯的模式，最好只有一个模式，或纵模、或

本文于1982年11月14日收到。

切变模。如果同时激发二个模式的话，就要求其中一个模式的机电耦合系数较大，而另一个模式的机电耦合系数尽量地接近于零。

(2) 对于激发纵模的换能器来讲，质点振动方向应基本上与纵波传播方向，即晶片的法线方向一致。即使有误差，也不得超过几度。

(3) 对于激发切变模的换能器来讲，质点振动方向应基本上在晶片本身的平面内。即使有误差，也不得超过几度。

本文将在三种旋转坐标系中解压电增劲 Christoffel 方程，并且按照上述选择切向的原则，系统地从理论上求出铌酸锂晶体的单模切割方向，并计算在相应方向上的超声波传播速度和机电耦合系数。

二、计　算

在压电材料中，机械波是由下列压电增劲 Christoffel 方程的本征模解给出的[2][8]：

$$\begin{cases} \rho V^2 u_j = l_{jI}\overline{C}_{IL} l_{Lm} u_m & (1) \\ \overline{C}_{IL} = C^E_{IL} + \dfrac{(e_{Ir} l_r)(l_p e_{pL})}{l_p \epsilon^s_{pq} l_q} & (2) \end{cases}$$

机电耦合系数的定义为

$$k^2_{IL} = \frac{\overline{C}_{IL} - C^E_{IL}}{\overline{C}_{IL}} = \frac{(e_{Ir} l_r)(l_p e_{pL})}{\overline{C}_{IL}(l_p \epsilon^s_{pq} l_q)} \tag{3}$$

铌酸锂属 $3m$ 晶类，其密度 $\rho = 4700 kg/m^3$，劲度系数、压电系数、介电常数矩阵分别为[8]

$$C^E_{IL} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \dfrac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20.3 & 5.3 & 7.5 & 0.9 & 0 & 0 \\ 5.3 & 20.3 & 7.5 & -0.9 & 0 & 0 \\ 7.5 & 7.5 & 24.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & -0.9 & 0 & 6.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9 & 7.5 \end{pmatrix} \times 10^{10} N/m^2 \tag{4}$$

$$e_{Ir} = \begin{pmatrix} 0 & -e_{22} & e_{13} \\ 0 & e_{22} & e_{13} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{42} & 0 \\ e_{42} & 0 & 0 \\ -e_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2.5 & 0.2 \\ 0 & 2.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1.3 \\ 0 & 3.7 & 0 \\ 3.7 & 0 & 0 \\ -2.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times c/m^2 \tag{5}$$

$$\epsilon^s_{pq} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.89 & 0 & 0 \\ 0 & 3.89 & 0 \\ 0 & 0 & 2.57 \end{pmatrix} \times 10^{-10} F/m \tag{6}$$

我们将分别讨论沿X、Y、Z三个坐标轴的旋转坐标系中压电增劲Christoffel方程的解。新坐标系里方程的形式将变成

$$\rho V^2 u'_j=\left[l'_{jI}c^{E\prime}_{IL}l'_{Lm}+\frac{l'_{jI}(e'_{Ir}l'_r)(l'_p e'_{pL})l'_{Lm}}{l'_p\epsilon^{s\prime}_{pq}l'_q}\right]u'_j \tag{7}$$

其中矩阵l'_{jI}，l'_r等都是新坐标系统中的超声波传播矩阵。矩阵$c^{E\prime}_{IL}$，e'_{Ir}，$\epsilon^{s\prime}_{pq}$的计算方法为

$$\begin{cases} c^{E\prime}_{IL}=[M][c^{E}_{IL}][\widetilde{M}] \\ e'_{Ir}=[M][e_{Ir}][\widetilde{a}] \\ \epsilon^{s\prime}_{pq}=[a][\epsilon^{s}_{pq}][\widetilde{a}] \end{cases} \tag{6}$$

其中$[a]$和$[M]$是坐标变换的变换矩阵。从方程（7）中，我们可以看出，晶片由压电效应激发几个模式将取决于矩阵

$$l'_{jI}c^{E\prime}_{IL}l'_{Lm} \tag{9}$$

$$l'_{jI}(e'_{Ir}l'_r)(l'_p e'_{pL})l'_{Lm} \tag{10}$$

$$l'_p\epsilon^{s\prime}_{pq}l'_q \tag{11}$$

的计算结果，尤其是式（10）将起更大的作用。

（一） 旋 转 X 切

将坐标系统绕Z轴转过θ角，使晶片平面垂直于新坐标轴X'。我们称此切割方向为旋转X切，它的几何示意图见图1。旋转X切的坐标变换矩阵为

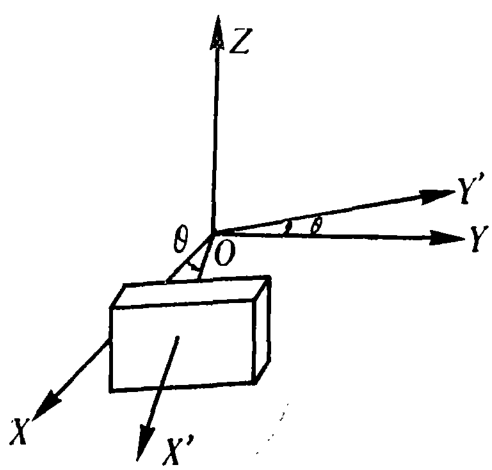

图 1

$$[a]=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$[M]=\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{13}$$

由于超声波是沿X'轴传播的，故传播矩阵为

$$\begin{cases} l'_r=(1,\ 0,\ 0) \\ l'_{j1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{14}$$

利用式（8）可以分别计算出矩阵（9)(10)(11）的结果为

$$l'_{j1}c^{E'}_{IL}l'_{Lm}=\begin{pmatrix} c'_{11} & 0 & c'_{16} \\ 0 & c'_{66} & c'_{65} \\ c'_{51} & c'_{65} & c'_{55} \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$l'_{j1}(e'_{1r}l'_r)(l'_p\ e'_{PL})l'_{Lm}=\begin{pmatrix} e'^2_{11} & e'_{11}e'_{61} & e'_{11}e'_{51} \\ e'_{61}e'_{11} & e'^2_{61} & e'_{61}e'_{51} \\ e'_{51}e'_{11} & e'_{51}e'_{61} & e'^2_{51} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$l'_p\epsilon^{s'}_{pq}l'_q=\epsilon'_{11}=\epsilon_{11} \tag{17}$$

其中：

$$\begin{cases} c'_{11}=c_{11} \\ c'_{15}=c_{14}\sin 3\theta \\ c'_{66}=c_{66} \\ c'_{65}=c_{14}\cos 3\theta \\ c'_{51}=c_{14}\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\ c'_{55}=c_{44} \\ e'_{11}=-e_{22}\sin 3\theta \\ e'_{51}=e_{42} \\ e'_{61}=-e_{22}\cos 3\theta \end{cases} \tag{16}$$

从式（16）可以看出，为了获得单一的纵模，必要条件是$e'_{51}=e'_{61}=0$；而为了获得单一的切变模，必要条件是$e'_{11}=e'_{51}=0$或者$e'_{11}=e'_{61}=0$。这三种情况都解不出θ角来。这就说明，在旋转X切的情况里，无论θ取什么数值都不可能获得单一模式。现考虑二个模式，从式（16）可以看出其必要条件分别为$e'_{11}=0$，$e'_{61}=0$或$e'_{51}=0$。但$e'_{51}=e_{42}\neq 0$，解不出θ角。由$e'_{11}=-e_{22}\sin 3\theta=0$可以得到$\theta=0$，$\theta=60°$，$\theta=120°$。而由$e'_{61}=-e_{22}\cos 3\theta=0$可以得到$\theta=30°$，$\theta=90°$。当$\theta$分别取上述五个数值时，换能片到底是否激发二个与压电效应有关的模式，所得结果是否符合切向选择的原则，需要分别对这五个θ值求

解压电增劲 Christoffel 方程。

1. $\theta=0$，即X切。

将 $\theta=0$ 代入式（18）中，算出诸量后，再代回式（7），便可得到此时的压电增劲 Christoffel 方程的形式为

$$\lambda\begin{pmatrix}u_{x'}\\u_{y'}\\u_{z'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & 0 & 0\\0 & c_{66}+\dfrac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}} & c_{14}-\dfrac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}}\\0 & c_{14}-\dfrac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}} & c_{44}+\dfrac{e_{42}^2}{\epsilon_{11}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{x'}\\u_{y'}\\u_{z'}\end{pmatrix} \tag{19}$$

式中 $\lambda=\rho V^2$。很明显，λ 的第一个本征值与压电效应无关。因此，我们只须要在$Y'Z'$平面内解此方程即可。此时的压电增劲 Christoffel 方程的形式为

$$\lambda\begin{pmatrix}u_{y'}\\u_{z'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{c}_{y'y'} & \bar{c}_{y'z'}\\\bar{c}_{z'y'} & \bar{c}_{z'z'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{y'}\\u_{z'}\end{pmatrix} \tag{20}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{c}_{y'y'}=c_{66}+\dfrac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}}\\\bar{c}_{z'z'}=c_{44}+\dfrac{e_{42}^2}{\epsilon_{11}}\\\bar{c}_{y'z'}=\bar{c}_{z'y'}=c_{14}-\dfrac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}}\end{cases} \tag{21}$$

方程（20）的矩阵中四个元素都不为 0，因此它的二个本征模偏振方向不会沿Y'或 Z'轴。为了求出此二个本征模式的偏振方向来，须要将这个矩阵对角化。为此，我们可以令$Y'Z'$坐标平面再转过 φ 角，利用熟知的平面坐标的变换规则，就能得到方程在新的坐标平面$Y''Z''$内的形式为

$$\lambda\begin{pmatrix}u_{y''}\\u_{z''}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{c}_{y''y''} & \bar{c}_{y''z''}\\\bar{c}_{z''y''} & \bar{c}_{z''z''}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{y''}\\u_{z''}\end{pmatrix} \tag{22}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{c}_{y''y''}=\bar{c}_{y'y'}\cos^2\varphi+\bar{c}_{z'z'}\sin^2\varphi+\bar{c}_{y'z'}\sin2\varphi\\\bar{c}_{z''z''}=\bar{c}_{y'y'}\sin^2\varphi+\bar{c}_{z'z'}\cos^2\varphi-\bar{c}_{y'z'}\sin2\varphi\\\bar{c}_{y''z''}=\bar{c}_{z''y''}=\bar{c}_{y'z'}\cos2\varphi+\left(\dfrac{\bar{c}_{z'z'}-\bar{c}_{y'y'}}{2}\right)\sin2\varphi\end{cases} \tag{23}$$

要让矩阵对角化，必须有 $\bar{c}_{y''z''}=\bar{c}_{z''y''}=0$。将式(4)、(15)、(6)的数据代入式（23），便可求出 $\varphi=41^\circ2'$。此时方程（22）的二个本征值分别为

$$\lambda_{y''}=\bar{c}_{y''y''}=7.8208\times10^{10}N/m^2$$

$$\lambda_{z''}=\bar{c}_{z''z''}=10.8052\times10^{10}N/m^2$$

因而，相应的二个本征模波速分别等于

$$V_{y''}=\sqrt{\overline{c}_{y''y''}/\rho}=4079\ m/s$$
$$V_{z''}=\sqrt{\overline{c}_{z''z''}/\rho}=4796\ m/s$$

按式（3），这二个本征模式的机电耦合系数为

$$\begin{cases} k_{y''}^2=\dfrac{\overline{c}_{y''y''}-c_{y''y''}}{\overline{c}_{y''y''}} \\ k_{z''}^2=\dfrac{\overline{c}_{z''z''}-c_{z''z''}}{\overline{c}_{z''z''}} \end{cases} \tag{24}$$

其中的 $c_{y''y''}$ 与 $c_{z''z''}$ 按下式计算：

$$\begin{cases} c_{y''y''}=c_{y'y'}\cos^2\varphi+c_{z'z'}\sin^2\varphi+c_{y'z'}\sin 2\varphi \\ c_{z''z''}=c_{y'y'}\sin^2\varphi+c_{z'z'}\cos^2\varphi-c_{y'z'}\sin 2\varphi \end{cases} \tag{25}$$

由式（21），其中 $c_{y'y'}=c_{66}$，$c_{z'z'}=c_{44}$，$c_{y'z'}=c_{14}$。将数据以及 $\varphi=41°2'$ 代入式（25）和（24）中，分别求出这二个本征模的机电耦合系数为

$$k_{y''}=0.0984$$
$$k_{z''}=0.6837$$

由方程（22）可以看出，当 $\lambda=\lambda_{y''}$ 时，$u_{y''}\doteq 0$，也就是相应的本征模沿 Y'' 轴振动。当 $\lambda=\lambda_{z''}$ 时，$u_{z''}\doteq 0$，也就是相应的本征模沿 Z'' 轴模动。而 Y'' 轴与 Z'' 轴都与 X' 轴垂直，故这二个本征模都是切变波，且振动方向都在晶片平面内。但是沿 Z'' 轴振动的模式 k 值较大，而沿 Y'' 轴振动的模式 k 接近于零。显然，对于 X 切来讲，所得结果符合切向选择的原则，是个可用的切向。可以认为，X 切激发切变波，波速 4796m/s、k 值 0.6837、偏振方向在晶片平面内，且与 Z' 轴即与 Z 轴夹角为 41°2′。

2. $\theta=60°$，即 $X60°$ 切。

按相同的计算方法，我们可以得到新坐标系内压电增劲 Christoffel 方程形式为

$$\lambda\begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{66}+\dfrac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}} & -c_{14}+\dfrac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}} \\ 0 & -c_{14}+\dfrac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}} & c_{44}+\dfrac{e_{42}^2}{\epsilon_{11}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \\ u_{z'} \end{pmatrix} \tag{26}$$

经过与 $\theta=0$ 时相同的运算步骤后，我们可以得到如下结果：在 $Y'Z'$ 平面内解方程（26）时，须将坐标平面再转 $\varphi=48°58'$，就可使方程中的矩阵对角化，由此得到二个本征模的波速及 k 值为

$$V_{y''}=4796\ m/s,\quad k_{y''}=0.6837$$
$$V_{z''}=4079\ m/s,\quad k_{z''}=0.0984$$

因此，对于 $X60°$ 切来说，与 X 切的情况基本相同，可获一切变波，波速和 k 值与 X 切的一样。只是偏振方向沿 Y'' 轴，或者说与 Z' 轴，即 Z 轴的夹角为 $-(90°-48°58')=-41°2'$。并且偏振方向同样地也是在晶片平面内。

3. $\theta=120°$，即 $X120°$ 切。

计算后发现，此时的压电增劲 Christoffel 方程的形式与 $\theta=0$ 时的形式完全一样。自

然解的过程及其结果也就完全一样，不须赘述。

4. $\theta=30°$，即$Y30°$切。

此时压电增劲Christoffel方程（7）的形式为

$$\lambda\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}+\frac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}} & 0 & c_{14}-\frac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}}\\0 & c_{66} & 0\\c_{14}-\frac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}} & 0 & c_{44}+\frac{e_{42}^2}{\epsilon_{11}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix} \tag{27}$$

对此，我们可在$Z'X'$平面内解此方程，即解方程

$$\lambda\begin{pmatrix}u_z'\\u_x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{c}_{z'z'} & \bar{c}_{z'x'}\\\bar{c}_{x'z'} & \bar{c}_{x'x'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_z'\\u_x'\end{pmatrix} \tag{28}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{c}_{z'z'}=c_{44}+\dfrac{e_{42}^2}{\epsilon_{11}}\\\bar{c}_{x'x'}=c_{11}+\dfrac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}}\\\bar{c}_{z'x'}=\bar{c}_{x'z'}=c_{14}-\dfrac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}}\end{cases} \tag{29}$$

为使方程（28）中矩阵对角化，将$Z'X'$平面再转$\varphi=6°42.5'$，并可求出二个本征模的波速和k值。结果是，沿Z''轴振动的模式：$k_z''=0.561$，沿X''轴振动的模式：$k_x''=0.3145$。可见，这二个模式的机电耦合系数相差不大。另外，沿Z''轴振动的模式，其偏振方向与Z'夹角是$6°42.5'$，也就是与X'轴成$83°17.5'$，而波的传播方向沿X'轴。这说明该模式只是个近似切变波，偏振方向偏离晶片平面达$6°42.5'$。同样，沿X''轴振动的模式，其偏振方向与X'轴夹角也是$6°42.5'$，它也只是个近似纵波，偏振方向偏离晶片法线多达$6°42.5'$。因此，$X30°$切的这二个模式不符合切向选择的原则，不能采用。

5. $\theta=90$，即$X90°$切，实质上也就是Y切。

此时方程(7)的形式为

$$\lambda\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}+\frac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}} & 0 & -c_{14}+\frac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}}\\0 & c_{66} & 0\\-c_{14}+\frac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}} & 0 & c_{44}+\frac{e_{42}^2}{\epsilon_{11}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix} \tag{30}$$

计算结果表明，与$\theta=30°$时的情况基本上相同，二个模式的k值差别不大，且偏振方向分别偏离各自的理想偏振方向达$6°42.5'$。故该切向也不可采用。

（二） 旋 转 Y 切

将坐标系绕X轴转θ角，使晶片平面垂直于Y'轴，我们称此方向为旋转Y切。它的几

何示意图见图2，坐标变换矩阵为

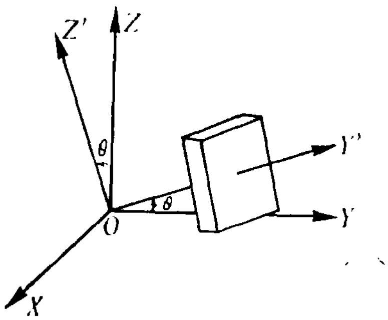

图 2

$$(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$[M]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{32}$$

超声波沿Y'轴传播，故传播矩阵为

$$\begin{cases} l'_r=(0\ 1\ 0) \\ l'_{jI}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{33}$$

矩阵（9)(10)(11）的计算结果分别为

$$l'_{jI}c'^{E}_{IL}l'_{Lm}=\begin{pmatrix} c'_{66} & 0 & 0 \\ 0 & c'_{22} & c'_{24} \\ 0 & c'_{24} & c'_{44} \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$l'_{jI}(e'_{Ir}l'_r)(l'_pe'_{pL})l'_{Lm}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e'^2_{22} & e'_{22}e'_{42} \\ 0 & e'_{22}e'_{42} & e'^2_{42} \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$l'_p\epsilon'^{s}_{pq}l'_q=\epsilon'_{22}=\epsilon_{11}\cos^2\theta+\epsilon_{33}\sin^2\theta \tag{36}$$

其中：

$$\begin{cases} c'_{66}=c_{44}\sin^2\theta+c_{66}\cos^2\theta+c_{14}\sin 2\theta \\ c'_{22}=c_{11}\cos^4\theta+c_{33}\sin^4\theta+\left(\frac{c_{13}}{2}+c_{44}\right)\sin^2 2\theta-4c_{14}\sin\theta\cos^3\theta \\ c'_{44}=\left(\frac{c_{11}}{4}+\frac{c_{33}}{4}-\frac{c_{13}}{2}\right)\sin^2 2\theta+c_{44}\cos^2 2\theta+\frac{c_{14}}{2}\sin 4\theta \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}c'_{24}&=\left(\frac{c_{33}}{2}\sin^2\theta-\frac{c_{11}}{2}\cos^2\theta\right)\sin 2\theta+\left(\frac{c_{13}}{2}+c_{44}\right)\sin 4\theta+c_{14}\cos^2\theta(3\sin^2\theta\\&\qquad-\cos^2\theta)\\e'_{22}&=e_{22}\cos^3\theta+(2e_{42}+e_{13})\cos^2\theta\sin\theta+e_{33}\sin^3\theta\\e'_{42}&=-\cos\theta[(2e_{42}+e_{13}-e_{33})\sin^2\theta+e_{22}\sin\theta\cos\theta-e_{42}]\end{aligned}\right.\tag{37}$$

从以上计算结果可以清楚地看出，对于旋转Y切来说，θ无论取什么数值，压电增劲Christoffel方程都最多只有二个与压电效应有关的本征模，并且只须在$Y'Z'$坐标平面内解方程：

$$\lambda\begin{pmatrix}u_y'\\u_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c'_{22}+\dfrac{e'^2_{22}}{\epsilon'_{22}} & c'_{24}+\dfrac{e'_{22}e'_{42}}{\epsilon'_{22}}\\ c'_{24}+\dfrac{e'_{22}e'_{42}}{\epsilon'_{22}} & c'_{44}+\dfrac{e'^2_{42}}{\epsilon'_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_y'\\u_z'\end{pmatrix}\tag{38}$$

即可。为了使二个本征模的k值相差得更大些，其中一个模式的k值更接近零，我们可以预料到，θ的取值将在分别使$e'_{42}=0$和$e'_{22}=0$的附近。由$e'_{42}=0$可解出$\theta=90°$、$\theta\doteq38.85°$和$\theta\doteq119.5°$，由$e'_{22}=0$可以解出$\theta\doteq162.1°$。我们分别讨论如下：

1. $\theta=90°$，即$Y90°$切，实际就是Z切。

将$\theta=90°$分别代入式（36)(37）中，式（38）便可变成：

$$\lambda\begin{pmatrix}u_y'\\u_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{33}+\dfrac{e^2_{33}}{\epsilon_{33}} & 0\\ 0 & c_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_y'\\u_z'\end{pmatrix}\tag{39}$$

由于方程中的矩阵已经是对角化了的，故不必再旋转$Y'Z'$坐标平面了。沿Z'轴振动的模式实际上与压电效应无关，故对于$Y90°$切来说，换能片实际上只激发一个模式，它是沿Y'轴振动的，与波的传播方向又完全一致，故它是纯纵模。可算出波速等于$V_y'=7316m/s$，机电耦合系数则等于

$$k_y'=\sqrt{\frac{e^2_{33}/\epsilon_{33}}{c_{33}+e^2_{33}/\epsilon_{33}}}=0.16$$

2. θ取其它数值

当θ取除$90°$以外的其它数值时，一般说来，方程（38）矩阵中的四个元素都不为零。为了求出在一定的旋转Y切方向时，晶片激发的本征模偏振方向，我们仍须将$Y'Z'$坐标平面再旋转φ角，并使矩阵对角化。然后，按照在旋转X切中所叙述的计算方法，对于各给定θ角度求出φ值，二个本征模的波速及k值。我们分别计算了$\theta=38.85°$、$\theta=119.5°$、$\theta=162.15°$附近的一些整数值的情况，结果列在表1中。

按照选择切向的原则，应使二个模式中之一的k值尽量接近零。故在上表中，θ取值的三段范围内，使弱模k值达最小时的θ角分别是：$\theta=36°$、$\theta=122°$、$\theta=163°$。

① $Y36°$切：强模沿Y''轴振动，而Y''轴偏离Y'轴$3°43.5'$，故为纵模。

② $Y122°$切：强模沿Z''轴振动，而Z''轴与Z'轴夹角为$86°4'$，即与Y'轴夹角为$3°56'$，故也为纵模。

③ $Y163°$切：强模沿Y''轴振动，而Y''轴与Y'轴夹角是$88°19'$，这说明此模式是切变波。

表 1

θ	35°	36°	37°	38°	120°	121°	122°	123°	161°	162°	163°	164°
φ	3.875°	3.725°	3.575°	3.45°	86.27°	86.167°	86.067°	85.959°	87.325°	87.817°	88.315°	88.35°
k_y''	0.4874	0.4847	0.4816	0.4783	0.024	0.012	0.0001	0.0137	0.5994	0.6063	0.6123	0.6174
k_z''	0.013	0.0036	0.021	0.037	0.2582	0.2612	0.2641	0.2667	0.039	0.0168	0.0009	0.0168
V_y'' (m/s)	7340	7339.9	7338.9	7337	3969	3976	3982	3989	4504	4516	4528	4537
V_z'' (m/s)	4002	4000	3999	3998	7214	7208	7202	7195	6720	6712	6707	6703

上述三个切向所激发的机械波模式，其偏振方向都稍偏离了理想的偏振方向，但由于偏离角不大，故它们还是可以使用的。

（三） 旋 转 Z 切

将坐标轴绕Y轴转 θ 角，使晶片平面垂直于 Z' 轴。我们称这一切割方向为旋转 Z 切。其几何示意见图3，

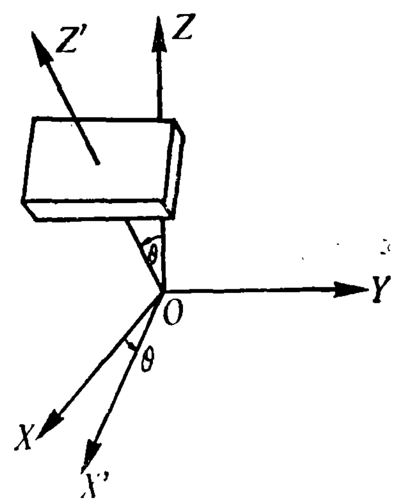

图 3

其坐标变换矩阵为

$$[a]=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$[M]=\begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 & \sin^2\theta & 0 & -\sin 2\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & 0 & \cos^2\theta & 0 & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 & -\frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{41}$$

超声波沿 Z' 轴传播，故传播矩阵为

$$
\begin{cases}
l'_r=(0\ 0\ 1) \\
l'_{jI}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{42}
$$

矩阵（9)、(10)、(11）的计算结果分别等于

$$
l'_{jI}c^{E'}_{IL}l'_{Lm}=\begin{pmatrix} c'_{55} & c'_{54} & c'_{53} \\ c'_{45} & c'_{44} & c'_{43} \\ c'_{35} & c'_{34} & c'_{33} \end{pmatrix}
\tag{43}
$$

$$
l'_{jI}(e'_{Ir}l'_r)(l'_pe'_{pL})l'_{Lm}=\begin{pmatrix} e'^2_{53} & e'_{53}e'_{43} & e'_{53}e'_{33} \\ e'_{43}e'_{53} & e'^2_{43} & e'_{43}e'_{33} \\ e'_{33}e'_{53} & e'_{33}e'_{43} & e'^2_{33} \end{pmatrix}
\tag{44}
$$

$$
l'_p\epsilon^{s'}_{pq}l'_q=\epsilon'_{33}=\epsilon_{11}\sin^2\theta+\epsilon_{33}\cos^2\theta
\tag{45}
$$

其中：

$$
\begin{cases}
c'_{33}=c_{11}\sin^4\theta+c_{33}\cos^4\theta+\left(c_{44}+\dfrac{c_{13}}{2}\right)\sin^2 2\theta \\
c'_{34}=3c_{14}\sin^2\theta\cos\theta \\
c'_{35}=c_{11}\sin^3\theta\cos\theta-c_{33}\sin\theta\cos^3\theta+\left(\dfrac{c_{13}}{4}+\dfrac{c_{44}}{2}\right)\sin4\theta \\
c'_{43}=(c_{14}+2c_{44})\sin^2\theta\cos\theta \\
c'_{44}=c_{44}\cos^2\theta+c_{66}\sin^2\theta \\
c'_{45}=3c_{14}\sin\theta\cos^2\theta-c_{14}\sin\theta \\
c'_{53}=(c_{13}-c_{33}+2c_{44})\sin\theta\cos^3\theta+(c_{11}-c_{13}-2c_{44})\sin^3\theta\cos\theta \\
c'_{54}=3c_{14}\sin\theta\cos^2\theta-c_{14}\sin\theta \\
c'_{55}=\left(\dfrac{c_{11}}{4}+\dfrac{c_{33}}{4}-\dfrac{c_{13}}{2}\right)\sin^2 2\theta+c_{44}\cos^2 2\theta \\
e'_{33}=\cos\theta\left[e_{33}\cos^2\theta+(2e_{42}+e_{13})\sin^2\theta\right] \\
e'_{43}=-e_{22}\sin^2\theta \\
e'_{53}=\sin\theta\left[e_{42}\cos2\theta+(e_{13}-e_{33})\cos^2\theta\right]
\end{cases}
\tag{46}
$$

从以上计算结果可以看出，为了获得单一的纵模所须满足的必要条件是 $e'_{43}=e'_{53}=0$；为获得单一切变波的必要条件为 $e'_{53}=e'_{33}=0$ 或 $e'_{43}=e'_{33}=0$。对于第一个条件，可解得 $\theta=0$，对于后二个条件求不出实 θ 根。获得二个模式的必要条件分别为 $e'_{33}=0$、$e'_{43}=0$、$e'_{53}=0$，这三个条件给出 θ 的新的解为 $\theta=90°$ 及 $\theta=39.97°$。但是，当 $\theta=0$ 时是否就激发一个模式，$\theta=90°$ 及 $\theta=39.97°$ 时是否就激发二个模式，还要将 θ 的数值分别代入式(45)、(46)中，写出压电增劲 Christoffel 方程后才可确定。下边分别就这三个 θ 取值加以讨论。

1. $\theta=0$，即 Z 切。

压电增劲 Christoffel 方程的形式为

$$\lambda\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{44}&0&0\\0&c_{44}&0\\0&0&c_{33}+\dfrac{e_{33}^2}{\epsilon_{33}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix}\tag{47}$$

与压电效应有关的只有一个解，即沿 Z' 振动的模式，由于超声波也沿 Z' 传播，故这是一个纯纵模。其波速和 k 值都可分别求出为

$$V_z'=7316\ m/s,\quad k_z=0.164$$

很明显，这里计算的结果与 $Y90°$ 切的结果完全一致。

2. $\theta=90°$，实 $Z90°$ 切，实际上就是 X 切。

压电增劲 Christoffel 方程形式为

$$\lambda\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{44}+\dfrac{e_{42}^2}{\epsilon_{11}}&-c_{14}+\dfrac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}}&0\\-c_{14}+\dfrac{e_{22}e_{42}}{\epsilon_{11}}&c_{66}+\dfrac{e_{22}^2}{\epsilon_{11}}&0\\0&0&c_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix}$$

在 $X'Y'$ 平面内解此方程，为求偏振方向，再将 $X'Y'$ 平面坐标系转 $\varphi=41°2'$，矩阵便对角化了，从而求出二个本征模的波速及 k 值分别为

$$V_x''=4796\ m/s,\qquad k_x''=0.6837,$$
$$V_y''=4079\ m/s,\qquad k_y''=0.0984。$$

其中强模沿 X'' 轴振动。因 X'' 与 Y'' 轴垂直于 Z'，即偏振方向在与传播方向垂直的晶片平面内，故为切变波。并且偏振方向与 X' 轴即 Z 轴之间的夹角是 $\varphi=41°2'$。同样，这一结果和 X 切的结果完全一致。

3. $\theta=39.97°$

此时压电增劲 Christoffel 方程为

$$\lambda\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{55}'&c_{54}'&c_{53}'\\c_{45}'&c_{44}'+\dfrac{e_{43}'^2}{\epsilon_{33}'}&c_{43}'+\dfrac{e_{43}'e_{33}'}{\epsilon_{33}'}\\c_{35}'&c_{34}'+\dfrac{e_{43}'e_{33}'}{\epsilon_{33}'}&c_{33}'+\dfrac{e_{33}'^2}{\epsilon_{33}'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x'\\u_y'\\u_z'\end{pmatrix}$$

计算结果表明，矩阵中九个元素都不为 0。这说明，实际上换能片并不是只激发二个模式，而是激发三个与压电效应有关的模式，这肯定是无法采用的。

三、　结　论

以上我们系统地计算了各种可以采用的铌酸锂晶片的单模切割方向，并算出模式偏振方向、传播速度和机电耦合系数。最后把所得结果汇集在表 2 上。由表中的数据看出：X 切、$X60°$ 切、$X120°$ 切的结果基本上是相同的，故实际应用中可只采用 X 切。另外，$Y36°$ 切与 $Y122°$ 切都是获得纵波的，但由于后者的 k 值远小于前者，在实用中可采用 $Y36°$ 切。因此，

我们从理论上得到了铌酸锂单模晶片切向的四个数值，即纵波的 Z 切、$Y36°$ 切与切变波的 X 切、$Y163°$ 切，与实际使用的切向完全一致。这四个切向的示意图见图 4。

表 2

切割方向	模性质	波速 (m/s)	偏振方向	机电耦合系数
X 切	切变波	4796	在晶片平面内，与 Z 轴成 41°2′	0.6837
$X60°$ 切	切变波	4796	在晶片平面内与 Z 轴成 −41°2′	0.6837
$X120°$ 切	切变波	4796	在晶片平面内与 Z 轴成 41°2′	0.6837
$Y36°$ 切	纵 波	7340	与晶片法线成 3°43.5′	0.4847
$Y122°$ 切	纵 波	7202	与晶片法线成 3°56′	0.2641
$Y163°$ 切	切变波	4528	与晶片平面成 1°41′	0.6123
Z 切	纯纵波	7316	沿晶片法线方向	0.164

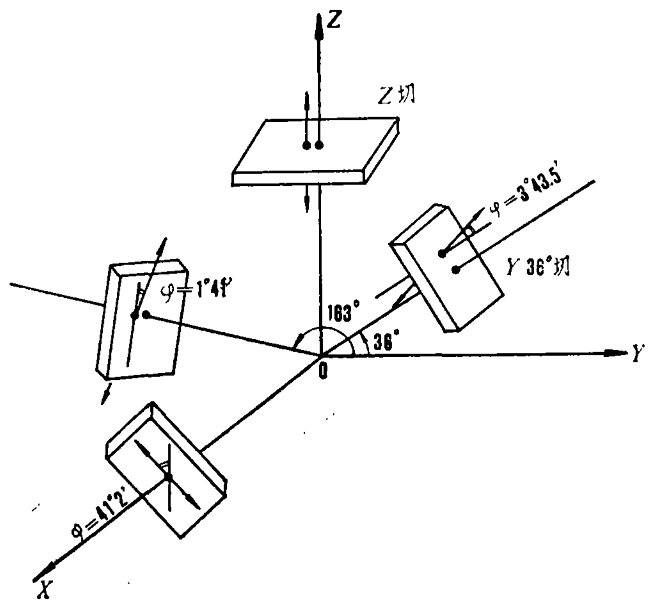

图 4

参 考 文 献

[1] A.H.Meitzler: in Ultrasonic Transolucer Materials, O.E.Mattiat ed., ch. 3, (Plenum Press, 1971).

[2] 徐介平，厚度驱动模式压电换能器 Mason 等效电路的推导，北京工业大学学报 1979.1.

[3] B.A.Auld, Acoustic Fields And Waves In Solids, Vol. I, (John Wiley and Sons, 1973.7.