

$\mathbb{R}^n$ 的分形曲线的维数迹*

缪克英

(北京工业大学计算机学院, 100044)

摘要 证明了: 若 T 是 $\mathbb{R}$ 的 s 维良好定义的子集, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t) = (t, t^2, \dots, t^n)$, 则 T 在 f 下的象的维数迹为 $P(f(T)) = R(1/s, 2/s, \dots, n/s)$.

关键词 维数迹, Hausdorff 维数, 良好子集

分类号 O 174.12

维数迹 (dimension print) 提出了具有不同性质的, 非常有趣的 Hausdorff 维数的变更, $\mathbb{R}^2$ 中的直线和适当选择的 Cantor 集的卡氏积都具有 Hausdorff 维数 1, 但它们具有非常不同的特征. Roger^[1] 提出的维数迹可用于区分这样的集合.

Roger 在^[2]中 (定理 1) 证明了: 若 T 是 $\mathbb{R}$ 的 S 维良好定义 (well-determined) 的子集, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(t) = (t, t^2, t^3)$, 则 $f(T)$ 的维数迹为 $P(f(T)) = R(1/s, 2/s, 3/s)$.

本文推广了此定理: 若 T 是 $\mathbb{R}$ 的 S 维良好定义的子集, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f(t) = (t, t^2, \dots, t^n)$, 则 $f(T)$ 的维数迹为 $P(f(T)) = R(1/s, 2/s, \dots, n/s)$.

1 预备知识

维数迹的定义与 Hausdorff 维数的定义非常相似, 但覆盖类 $\mathcal{B}$ 用的是 $\mathbb{R}^n$ 的开长方体 (盒子), 其边不一定与坐标平面平行. 任意属于 $\mathcal{B}$ 的盒子 B , 用 $l_1(B) \geq l_2(B) \geq \dots \geq l_n(B)$ 表示 B 的边长.

设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ 为非负向量 (即 $\alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq n$), 任意 $\delta > 0$, 如下定义外测度 μ_δ^α :

$$\mu_\delta^\alpha(S) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} L^\alpha(B_i) : \{B_i\} \subseteq \mathcal{B}, S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, |B_i| < \delta \right\}$$

S 是 $\mathbb{R}^n$ 的任意子集, $|B|$ 表示 B 的直径, $L^\alpha(B) = l_1^{\alpha_1}(B) l_2^{\alpha_2}(B) \cdots l_n^{\alpha_n}(B)$.

定义外测度 μ^α : 任意 $\mathbb{R}^n$ 的子集 S .

$$\mu^\alpha(S) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta^\alpha(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mu_\delta^\alpha(S)$$

注: 当 $\alpha = (s, 0, \dots, 0)$ 时, μ^α 就是 s 维 Hausdorff 测度.

收稿日期: 1995-03-21

*北京市自然科学基金和国家自然科学基金资助项目

$\mathbf{R}^n$ 的子集 S 的维数迹, $P(S)$, 定义为满足: $\mu^s(S) > 0$ 的 $\mathbf{R}^n$ 的非负向量 α 的集合, $P(S) \subseteq \mathbf{R}^n$.

应用测度的标准性质, 易见维数迹具有:

单调性 若 $S_1 \subseteq S_2$, 则 $P(S_1) \subseteq P(S_2)$;

可数稳定性 $P(\sum_{i=1}^{\infty} S_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$.

设 $0 < s \leq 1$, T 是 $\mathbf{R}$ 的 Borel 子集, 如果下述条件满足, 我们称 T 是 S 维良好定义的子集: (a) T 上存在一个 Borel 测度 τ , 使 $\tau(T) > 0$, 且存在常数 C , 使对任意区间 I ,

$$\tau(T \cap I) \leq C|I|^s, \quad (|I| \text{ 表示 } I \text{ 的长度})$$

(b) 存在常数 D , 对于任意大的整数 N , T 可被 N 个长度至多为 $D/N^{1/s}$ 的区间覆盖.

引理 1: ^[1](a) 如果 B 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个盒子, 则存在 $\mathbf{R}^n$ 的包含 B 的一个椭球 E , 其主轴长分别为 $a_1(E) \geq a_2(E) \geq \cdots \geq a_n(E)$, 使

$$a_i(E) = \sqrt{n} l_i(B), \quad 1 \leq i \leq n$$

(b) 如果 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个椭球, 则存在 $\mathbf{R}^n$ 的包含 E 的盒子 B , 使

$$l_i(E) = a_i(E), \quad 1 \leq i \leq n$$

引理 2: ^[1] 设 E 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个椭球, T 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个非奇异线性变换, $\|T\|$ 表示范数, 则:

$$a_i(TE) \leq \|T\| a_i(E), \quad 1 \leq i \leq n$$

$$a_i(E) \leq \|T^{-1}\| a_i(TE), \quad 1 \leq i \leq n$$

记 $R(r_1, r_2, \cdots, r_n) = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) | r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \cdots + r_n\alpha_n \leq 1, \alpha \text{ 非负量} \}$

引理 3: ^[2] 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的 Borel 子集, $0 < r_1 \leq r_2 \leq \cdots, \leq r_n$ 为常数.

(a) 若存在 S 的一个 Borel 测度 λ , 使 $\lambda(S) > 0$, 存在常数 C , 使对任意 $\mathbf{R}^n$ 的盒子 B ,

$$\lambda(S \cap B) \leq C(l_i(B))^{1/r_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

则 $P(S) \supseteq R(r_1, r_2, \cdots, r_n)$.

(b) 若存在常数 D , 对于任意大整数 N , S 可被 $\mathbf{R}^n$ 的 N 个盒子覆盖, 满足

$$l_i(B) \leq D/N^{r_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

则 $P(S) \subseteq R(r, r, \cdots, r)$.

2 定理及其证明

定理: 设 T 为 $\mathbf{R}$ 的 S 维良好定义的 Borel 子集, 映射 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n, f(t) = (t, t^2, \cdots, t^n)$, 则 T 在 f 下的象的维数迹为 $P(f(T)) = R(1/s, 2/s, \cdots, n/s)$.

推论: $\mathbf{R}^n$ 的参数曲线 $\{(t, t^2, \cdots, t^n) | \infty < t < \infty\}$ 的维数迹为 $R(1, 2, \cdots, n)$.

推论证明: 结论显然是定理在 $T = \mathbf{R}$ 时的特殊情况.

定理证明: 因为 $f(T) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(T \cap [i, i+1])$, 由维数迹的可数稳定性, 可假设 T 为区间 $[0, 1]$ 的子集.

$$\begin{aligned} f[0, \tau] &= \{(t, t^2, \dots, t^n) | 0 \leq t \leq \tau\} \\ &= \{(\tau s, \tau^2 s^2, \dots, \tau^n s^n) | 0 \leq s \leq 1\} \end{aligned}$$

因此, $f[0, \tau]$ 可看成 $f[0, 1]$ 在下述线性变换下的象:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (\tau x_1, \tau^2 x_2, \dots, \tau^n x_n)$$

从而 $f[0, \tau]$ 包含在主轴为 $2\tau R, 2\tau^2 R, \dots, 2\tau^n R$ 的椭球内, 且 $f[0, \tau]$ 的凸覆盖包含一个主轴为 $2\tau r, 2\tau^2 r, \dots, 2\tau^n r$ 的椭球.

假设 $0 \leq t_0 < t_0 + \tau \leq 1$, 考虑 $f[t_0, t_0 + \tau] = \{(t, t^2, \dots, t^n) | t_0 \leq t \leq t_0 + \tau\}$, 记 $t = t_0 + s$, 则 $f[t_0, t_0 + \tau]$ 可表成参数形式:

$$\begin{aligned} &(t_0, t_0^2, t_0^3, \dots, t_0^n) + (1, C_2^1 t_0, C_3^1 t_0^2, \dots, C_n^1 t_0^{n-1})s + \\ &(0, 1, C_3^2 t_0, \dots, C_n^2 t_0^{n-2})s^2 + \dots + (0, 0, 0, \dots, 0, 1)s^n \end{aligned}$$

因此, 除相差一个变换外, $f[t_0, t_0 + \tau]$ 可看成 $f[0, \tau]$ 在下述线性变换下的象:

$$L: (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) A$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & C_2^1 t_0 & C_3^1 t_0^2 & \dots & C_n^1 t_0^{n-1} \\ 0 & 1 & C_3^2 t_0 & \dots & C_n^2 t_0^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 是非奇异的, A^{-1} 存在.

因为 $0 \leq t_0 < 1$, 由上述公式, 存在常数 M 使线性变换的范数 $\|L\| \leq M, \|L^{-1}\| \leq M$.

由引理 2, $f[t_0, t_0 + \tau]$ 包含在一个外椭球内 E_o 内, 其主轴满足:

$$a_i(E_o) \leq 2R\tau^i M, \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

由 $f[t_0, t_0 + \tau]$ 的一凸覆盖包含一个内椭球 E_I , 其主轴满足:

$$a_i(E_I) \geq 2r\tau^i M^{-1}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2)$$

因为 T 为 $[0, 1]$ 的 S 维良好定义的 Borel 子集, 则

(a) T 上有一 Borel 测度 τ , 使 $\tau(T) > 0$, 且存在常数 C , 使对 $[0, 1]$ 的任意子区间 I , 有 $\tau(T \cap I) \leq C|I|^S$.

(b) 存在常数 D , 对任意的整数 N , T 可被 N 个长度至多为 $D/N^{1/S}$ 的区间覆盖.

映射 f 从 $[0, 1]$ 到 $f[0, 1]$ 为单射, 所以存在 $f(T)$ 的一个 Borel 测度 σ , 对任意 $f(T)$ 的 Borel 子集 S , $\sigma(S) = \tau(f^{-1}(S))$.

考虑覆盖部分 $f(T)$ 的椭球 E , 因为 E 的边界由二次方程决定, $f[0, 1]$ 穿进和穿出 E 的次数不超过 $2n$ 次, 因此 E 含有至多 n 段 $f[0, 1]$ 的连通弧, 其中至少有一段弧与 $f(T)$ 相交的测度不少于 $\sigma(f(T) \cap E)/n$, 因此存在 $[0, 1]$ 的子区间 $I = [t_0, t_0 + \tau]$, 且 $f(I) \subseteq f[0, 1] \cap E$, 使

$$\sigma(f(T) \cap E) \leq n\tau(I \cap T) \leq nC|I|^S \quad (3)$$

由 (2), E 包含一个椭球 E_I , 其主轴满足

$$a_i(E_I) \gg \tau^i = |I|^i, \quad 1 \leq i \leq n$$

(这里 “ $\gg$ ” 指相差常数外, “ $\geq$ ” 成立.)

也即

$$|I| \ll (a_i(E_i))^{1/i} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4)$$

由引理 1(a), $\mathbb{R}^n$ 的任意盒子 B 可被满足下列条件的椭球 E 覆盖:

$$a_i(E) \leq \sqrt{n} l_i(B), \quad 1 \leq i \leq n$$

因此, $\mathbb{R}^n$ 的任意盒子 B 有: (由 (3) 和 (4))

$$\sigma(f(T) \cap B) \ll (l_i(B))^{s/i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

由引理 3(a)

$$P(f(T)) \supseteq R(1/s, 2/s, \dots, n/s)$$

另一方面, 对任意的整数 N , 由 (b), T 可被 N 个长度不超过 $D/N^{1/s}$ 的区间覆盖, 由 (1), $f(T)$ 可被 N 个椭球 E 覆盖, 其主轴满足:

$$a_i(E) \ll D^i / N^{i/s}, \quad 1 \leq i \leq n$$

由引理 1(b), $f(T)$ 可被 N 个盒子覆盖, 其边长满足:

$$l_i(B) \ll D^i / N^{i/s}, \quad 1 \leq i \leq n$$

由引理 3(b)

$$P(f(T)) \subseteq R(1/s, 2/s, \dots, n/s)$$

从而

$$P(f(T)) = R(1/s, 2/s, \dots, n/s)$$

由此完成了定理的证明.

参 考 文 献

- 1 Roger C A. Dimension Print. Mathematika. 1988. 35: 1 ~ 27
- 2 Roger C A. Dimension Print of Fractal Sets. Mathematika, 1994, 41: 68 ~ 94
- 3 Falconer K J. The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press, 1985
- 4 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco, 1981
- 5 Peitgen H-O, Richter P H. The Beauty of fractals. Springer, Berlin, 1986
- 6 谢和平等. 分形几何数学基础与应用. 重庆出版社, 1981

Dimension Print of Fractal Curve in $\mathbb{R}^n$

Miao Keying

(Computer Institute, Beijing Polytechnic University, 100044)

Abstract In this paper, the following theorem is proved: let T be a Borel set in $\mathbb{R}$ of well-determined dimension s , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = (t, t^2, \dots, t^n)$, then the dimension print of the images of T under f is $P(f(T)) = R(1/s, 2/s, \dots, n/s)$.

Keywords dimension print, hausdorff dimension, well-determined set