关于周期性结构多层光学膜系的计算

激光研究室 姚煜球

【摘 要】本文引用矩阵多项式的 *Sylvester* 定理和 *Cheyshev* 多项式简化周期性结构的多层光学膜系的计算。

普遍 n 层膜系的特性矩阵为：

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = \left[\prod_{r=1}^{n} \begin{pmatrix} \cos\delta_r & j\dfrac{1}{\eta_r}\sin\delta_r \\ j\eta_r\sin\delta_r & \cos\delta_r \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

此式见于许多关于薄膜光学的书。例如 [1], [2]。式中相移（相厚度）$\delta_r = \dfrac{2N_r d_r \cos\theta_r}{\lambda}$。

第 r 层膜的光导纳 $N_r = \left(\epsilon_r\mu_r - j\dfrac{4\pi\sigma_r\mu_r}{\omega}\right)^{1/2}$。

当电导率 $\sigma_r = 0$ 时，$N_r = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ = 折射率 n_r。

第 r 层膜中的折射角 θ_r 可用 *Snell* 折射定律 $\sin\theta_r = \dfrac{N_0}{N_r}\sin\theta_0$ 求得，其中 θ_0 为膜系的入射角。

普遍光纳 η_r，当电场 $\vec{E}$ 垂直于入射面时为 $N_r\cos\theta_r$；当 $\vec{E}$ 平行于入射面时为 $\dfrac{N_r}{\cos\theta_r}$。

正入射时，$\theta_0 = \theta_r = 0$，$\eta_r = N_r$，对于无损耗介质，有 $\eta_r = n_r$。

由式 (1) 算出 B 和 C，则膜系的

$$\text{透射率}\ T = \frac{4\eta_{n+1}\eta_0}{(\eta_0 B + C)(\eta_0 B + C)^*} \tag{2}$$

$$\text{反射率}\ R = \left(\frac{\eta_0 - Y}{\eta_0 + Y}\right)\left(\frac{\eta_0 - Y}{\eta_0 + Y}\right)^* \tag{3}$$

其中 $Y = \dfrac{C}{B}$

对于多层膜，计算矩阵连乘积 $\prod_{r=1}^{n}\begin{pmatrix} \cos\delta_r & j\dfrac{1}{\eta_r}\sin\delta_r \\ j\sin\delta_r & \cos\delta_r \end{pmatrix}$ 是相当复杂的过程。但当膜层结构为周期性时（例如 $abab\cdots ab$，高反射膜系通常采用周期性结构）。此时利用 *Sylvester* 定理，将使运算大为简化。

（1）偶数层周期性结构的多层膜系：

（$abab\cdots ab$）设层数为 n

$$\text{则}\quad \prod_{r=1}^{n}\begin{pmatrix}\cos\delta_r & j\frac{1}{\eta_r}\sin\delta_r\\ j\eta_r\sin\eta_r & \cos\delta_r\end{pmatrix}=[[a][b]]^m\equiv A^m$$

其中矩阵 $A=[a][b]$；$m=\frac{n}{2}$

Sylvester's 定理：若 $k\times k$ 矩阵 A 的 k 个本征值 λ_1，λ_2，$\cdots\lambda_k$ 相异，而 $P(A)$ 为矩阵 A 的任意多项式，则 $P(A)=\sum_{r=1}^{k}\left\{P(\lambda_r)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{k}\left(\frac{A-\lambda_s I}{\lambda_r-\lambda_s}\right)\right\}$。

式中 I 为单位矩阵[3]。对于特殊情况 $P(A)=A^m$ 有：

$$A^m=\sum_{r=1}^{k}\left\{\lambda_r^m\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{k}\left(\frac{A-\lambda_s I}{\lambda_r-\lambda s}\right)\right\}\tag{4}$$

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ 则特征方程

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix}=(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0$$

即 $\lambda^2-(a_{11}+a_{12})\lambda+a_{11}a_{13}-a_{21}a_{22}=0$

而 $|A|=|a||b|=1$ 因此有：$\lambda^2-(a_{11}+a_{12})\lambda+1=0$

解得

$$\lambda_{1,2}=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\pm j\sqrt{1-\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2}\equiv e^{\pm j\phi}$$

$$=\cos\phi\pm j\sin\phi\tag{5}$$

（其中 $\frac{a_{11}+a_{22}}{2}<1$，故 λ_1，λ_2 为复数）。

由（4）：

$$A^m=\sum_{r=1}^{2}\left\{\lambda_r^m\prod_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{2}\left(\frac{A-\lambda_s I}{\lambda_r-\lambda_s}\right)\right\}$$

$$=\lambda_1^m\frac{A-\lambda_2 I}{\lambda_1-\lambda_2}+\lambda_2^m\frac{A-\lambda_1 I}{\lambda_2-\lambda_1}$$

$$=\frac{A(\lambda_1^m-\lambda_2^m)\ \ \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{m-1}-\lambda_2^{m-2})I}{\lambda_1-\lambda_2}$$

由（5）：

$$\lambda_1-\lambda_2=2j\sin\phi$$

$$\lambda_1^m-\lambda_2^m=2\sinh(jm\phi)=2j\sin(m\phi)$$

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{m-1}-\lambda_2^{m-1})=\lambda_1^{m-1}-\lambda_2^{m-2}=2j\sin[(m-1)\phi]$$

于是：

$$A^m=\frac{1}{2j\sin\phi}[(2j\sin m\phi)A-(2j\sin(m-1)\phi)I]$$

令　　　　$\omega=\cos\phi$，则由(5)有：$\omega=\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})$

而　　　　$$A^m=\frac{\sin(m\cos^{-1}\omega)}{\sin(\cos^{-1}\omega)}A-\frac{\sin[(m-1)\cos^{-1}\omega]}{\sin(\cos^{-1}\omega)}I$$

$$\equiv S_{m-1}(\omega)A-S_{m-2}(\omega)I \tag{6}$$

其中　　　$$S_m(\omega)\equiv\frac{\sin[(m+1)\cos^{-1}\omega]}{\sin(\cos^{-1}\omega)} \tag{7}$$

为 m 阶第二类 *Chebyshev* 多项式[4]。

由定义式(7)有：

$$S_{m+1}(\omega)=\frac{\sin[(m+2)\phi]}{\sin\phi}=\frac{\sin(m+1)\phi\cos\phi+\cos(m+1)\phi\sin\phi}{\sin\phi}$$

$$=\omega S_m(\omega)+\frac{1}{2}[S_{m+1}(\omega)-S_{m-1}(\omega)]$$

即：　　　$$S_{m+1}(\omega)=2\omega S_m(\omega)-S_{m-1}(\omega) \tag{8}$$

由(7)有：　　$S_0(\omega)=1$，　$S_1(\omega)=2\cos\phi=2\omega$

因此，只须算出矩阵 A 和 $S_{m-1}(\omega)$，$S_{m-2}(\omega)$（利用递推公式(8)）即可得(6)式的 A^m。

(2) 奇数层周期性结构的多层膜系：

为使膜层与基片的界面不产生半波损失，通常多层高反射膜采用奇数层 $HLHL\cdots HLH$ 结构。写作（$abab\cdots aba$），设层数为 $2m+1$。

则　$$\prod_{r=1}^{2m+1}\begin{pmatrix}\cos\delta_r & j\frac{1}{\eta_r}\sin\delta_r\\ j\eta_r\sin\delta_r & \cos\delta_r\end{pmatrix}=[[a][b]]^m[a]=A^m[a]$$

$$=A^m[a][b][b]^{-1}=A^{m+1}[b]^{-1}$$

$$=\{S_m(\omega)A-S_{m-1}(\omega)I\}[b]^{-1}$$

$$=S_m(\omega)[a][b][b]^{-1}-S_{m-1}(\omega)I[b]^{-1}$$

$$=S_m(\omega)[a]-S_{m-1}(\omega)[b]^{-1} \tag{9}$$

容易求得 $[b]$ 的逆矩阵 $[b]^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\delta_b & -\frac{j}{\eta_b}\sin\delta_b\\ -j\eta_b\sin\delta_b & \cos\delta_b\end{pmatrix}$

利用(6)或(9)式比直接用(1)式简便得多。

参 考 文 献

1. Optics of Thin Films, A.Vasicek, North Holland Amsterdam, 1960.
2. Thin—Film Optical Filtars, H.A.Macleod, Adam Hilger Ltd. London, 1969.
3. Mathematics in Physics and Engineering, J.Irving and N.Mullineux, Academic Press Inc. London, 1959.
4. Theory and Design of Broadband Matching Networks, W.K.Chen, Pergamon Press, 1976.