参数微分法在耗散动力学问题求解中的应用

胡建兰，张汉林
（北京工业大学 应用数理学院，北京 100022）

摘 要：利用高阶微分法求解一类耗散占优的流体波动问题控制方程，得到了与定性分析结论相符的近似解析解．

关键词：耗散；参数微分法；近似解
中图分类号：P 353.38；P 182 **文献标识码**：A **文章编号**：0254-0037(2002)01-0080-02

1 问题的提出

文献[1]就色散占优的流体波动方程 $u_t+(n+2)(n+1)u^n u_x+u_{xxx}=\mu(K(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tx},\cdots))_x$，$|\mu|\ll 1$ 提出了参数微分法近似求解；这里 K 为 $u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tx},\cdots$ 的多项式．

作者研究了如式(1)耗散占优情况下的一类非线性摄动问题

$$u_t+(n+2)(n+1)u^n u_x-u_{xx}=\mu(K(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tx},\cdots))_x,\ |\mu|\ll 1 \tag{1}$$

这里：K 同样为 $u,u_t,u_x,u_{xx},u_{tx},\cdots$ 多项式．它是描述许多动力学问题的模型，因而引起了许多数学和物理工作者对它的关注[2-12]．特别地，当 $n=1,K=u_{xxx}$ 时，式(1)化为 Kuramoto 模型[2]．利用文献[1]中给出的参数微分法，作者得到了该问题的近似的解析解，并以 MKdV-Burgers 方程($K=u_{xx}$时)耗散占优为例，求出了它与定性分析结论相符的近似解析解．

2 近似解的导出

考虑方程(1)的行波解 $u=u(\xi),\xi=x-\lambda t$，对式(1)积分并取积分常数为0可得

$$-\lambda u-u'+(n+2)u^{n+1}+\mu K=0 \tag{2}$$

考虑式(2)的近似解 $u=u_0+\mu u_1$，这里 u_0、u_1 分别为微分方程

$$u_0'=-\lambda u_0+(n+2)u_0^n \tag{3}$$

及

$$u_1'+\lambda u_1-(n+2)(n+1)u_0^n u_1=K(u_0) \tag{4}$$

的有界解．易知方程(3)的解可表为 $\int\{1/[(n+2)u_0^{n+1}-\lambda u_0]\}\,du_0=\xi-B$，从而

$$u_0=\{\lambda/[2(n+2)]-\lambda/[2(n+2)]\tanh[n\lambda(\xi-B)/2]\}^{1/n}$$

对方程(4)，可设它的解为 $u_1=u_{1s}+u_{1g}$，其中 u_{1s}、u_{1g} 分别为

$$u_1'+\lambda u_1-(n+2)(n+1)u_0^n u_1=0 \tag{5}$$

和

$$u_1'+\lambda u_1-(n+2)(n+1)u_0^n u_1=K(u_0) \tag{6}$$

的一般解和特解．

设 $u_{1g}=C(\partial u_0/\partial B)$，则

$$u_{1g}'=C(\partial u_0/\partial B)_\xi'=C[\partial(u_{0,\xi}')/\partial B]=C\{\partial[(n+2)u_0^{n+1}-\lambda u_0]/\partial B\}=$$

收稿日期：2001-10-25．
作者简介：胡建兰(1966-)，女，讲师．

$$C[(n+2)(n+1)u_0^n-\lambda](\partial u_0/\partial B)=[(n+2)(n+1)u_0^n-\lambda]u_{1g}$$

即 u_{1g} 是方程(5)的一般解．为求式(6)的特解，利用常数变易法，令 $u_{1s}=f(\xi)(\partial u_0/\partial B)$，则

$$u_{1s}'=f'(\partial u_0/\partial B)+f(\partial u_0/\partial B)_\xi'=f'(\partial u_0/\partial B)+f[(n+2)(n+1)u_0^n-\lambda](\partial u_0/\partial B)$$

代入式(6)得

$$f_\xi'=K(u_0)/(\partial u_0/\partial B)=-K(u_0)/u'_{0,\xi},\ f(\xi)=-\int^\xi[K(u_0)/u'_{0,\xi}]\mathrm{d}\xi \tag{7}$$

综上所述，方程(1)有如下近似解

$$u=u_0+\mu u_{1s}+\mu u_{1g}=u_0+\mu\{C-\int^\xi[K(u_0)/u'_{0,\xi}]\mathrm{d}\xi\}(\partial u_0/\partial B) \tag{8}$$

至此，完成了方程(1)的近似求解．

下面以 MKdV-Burgers 方程($K=u_{xx}$时)耗散占优为例求它的近似解，即对于方程 $u_t+(n+2)(n+1)u^nu_x-u_{xxx}=\mu u_{xx}$，$|\mu|\ll 1$ 求解．此时，由式(7)知

$$f_\xi'=u_{0,\xi\xi}/(\partial u_0/\partial B)=-u_{0,\xi\xi}/u'_{0,\xi},\quad f(\xi)=-\ln|u_{0,\xi}|$$

按式(8)知近似解析解为

$$u=u_0+\mu u_{1s}+\mu u_{1g}=$$

$$u_0+\mu C(\lambda/2)u_0(1+\tanh y)-\mu(\lambda/2)u_0(1+\tanh y)\ln[(\lambda/2)u_0(1+\tanh y)] \tag{9}$$

此解具有与 Burgers 方程一样的激波解位型．并且当 $|u|\to 0$ 时，式(9)表示的解一致收敛到 Burgers 方程的解，这与定性分析所得的结论是相符的．

参考文献：

[1] 胡建兰．参数微分近似求解一类流体波动问题[J]．北京工业大学学报，2000，26(2)：85-89．

[2] NOZAKI K. Hirota's method and the singular manifold expansion[J]. J Phys Soc Jpn，1987，56：3052-3054．

[3] 曾克英，高歌．Burgers-KdV 混合型方程行波解的定性分析[J]．中国科学：A辑，1987(1)：64-73．

[4] 高歌．湍流的耗散及弥散相互作用[J]．中国科学：A辑，1985(5)：457-465．

[5] CANOSA J，GAZDAG J. The Korteweg-de Vires-Burgers equation[J]. J Comput Phys，1977，23：393-403．

[6] JEFFREY A，XU S. Exact solutions to the Korteweg-de Vries-Burgers equation[J]. Wave Motion，1989(11)：559-564．

[7] FENG X S. Rapidly decreasing solutions of the KdV hierarchy[J]. Math Nachr，1994(1)：83-93．

[8] 熊树林．KdV-Burgers 方程的一类解析解[J]．科学通报，1989(1)：26-29．

[9] 刘式适，刘式达．湍流的 KdV-Burgers 方程模型[J]．中国科学：A辑，1991(9)：938-946．

[10] 刘式适，刘式达．湍流的粘性和频散效应[J]．大气科学，1992(16)：205-215．

[11] 冯学尚，吕建永．色散与耗散对 Alfven 孤立波的影响[J]．空间科学学报，1996(4)：17-22．

[12] LIU S K，LIU S D. Heteroclinic orbit on the KdV-Burgers equation and Fisher equation[J]. Commun Theor Phys，1991(16)：497-500．

Application of Parameter Differentiation Method to Solving Dissipative Dynamics Problems

HU Jian-lan，ZHANG Han-lin

(College of Applied Science，Beijing Polytechnic University，Beijing 100022，China)

Abstract: The parameter differentiation method is used to solve a class of dissipative nonlinear differential equations governing wave phenomena in fluid mechanics，and is obtained an approximate solution which is consistent to the conclusion of qualitative analysis．

Key words: dissipation；parameter differentiation method；approximate solution