

方块脉冲函数用于双线性系统的分析和辨识

郑 兵 徐宁寿

(工业自动化系)

摘 要

本文利用方块脉冲函数的特点,对双线性系统的分析及辨识问题进行了讨论,得出了一套便于应用的递推算法。与用沃尔什函数辨识双线性系统的方法相比,文中所得的结果更为简洁、明了,且子区间的分段数可任意选取,故可节省计算机内存和机时,减少舍入误差,并且递推算法有助于实现实时在线辨识。

Analysis and Identification of Bilinear Systems via Block-Pulse Functions

Zheng Bing Xu Ning-shou

Abstract

Problems of analysis and identification of bilinear systems via block-pulse functions are discussed, and recursive algorithms convenient for computer are presented. Compared with walsh function approaches, the results are much simpler in form. In this method, any positive integer could be chosen as the number of sub-intervals. Consequently, much computing time and storage could be saved and round off error reduced. The recursive algorithm developed also makes it possible to identify the parameters of bilinear systems on-line.

本文于1982年6月28日收到。

一. 引言

对于双线性系统的辨识问题, 文献[1]、[2]曾采用沃尔什函数导出了适于计算机计算的结果, 但其缺点是:

(1) 解答的形式不够简洁, 应用时尙须求解隐含待求矩阵、向量的线性代数方程。

(2) 沃尔什函数情况下, 子区间数目只能选取 2、4、8、..., 这也给实际应用带来不便。

本文利用方块脉冲函数, 对双线性系统的分析和辨识问题进行了研究, 得出了形式十分简洁的结果, 特别是给出了适合于计算机上应用的递推算法。

二. 方块脉冲函数的运算性质

方块脉冲函数的运算性质可见文献[3]、[4], 一些对本文有用的性质简述如下:

1) 脱关性

$$\Pi_k(t) \cdot \Pi_j(t) = \begin{cases} \Pi_k(t), & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (1)$$

2) 正交性

$$\int_0^T \Pi_k(t) \cdot \Pi_j(t) dt = \begin{cases} T/m, & k=j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (2)$$

3) 积分运算性质

$$\int_0^t \Pi_k(t') dt' = \frac{T}{2m} \Pi_k(t) + \frac{T}{m} \sum_{l=k+1}^m \Pi_l(t) \quad (3)$$

若定义

$$\Pi_{(m)}(t) \triangleq [\Pi_1(t), \Pi_2(t), \dots, \Pi_m(t)]^t \quad (4)$$

上标 t 代表转置则有

$$\int_0^t \Pi_{(m)}(t') dt' = \frac{T}{2m} \mathbf{P}_m \Pi_{(m)}(t) \quad (5)$$

式中 \mathbf{P}_m 为 $m \times m$ 方阵, 其逆存在, 即

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ & 1 & & \vdots \\ & & & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{m \times m} \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} u_i(t) &\cong \sum_{k=1}^m u_{ik} \Pi_k(t), & i=1, 2, \dots, r \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$u_k = [u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{rk}], \quad k=1, 2, \dots, m \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n} &\cong \sum_{k=1}^m A_k \Pi_k(t) \end{aligned} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{ij}(t) &\cong \sum_{k=1}^m a_{ijk} \Pi_k(t) & i, j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$A_k = [a_{ijk}]_{n \times n} \quad k=1, 2, \dots, m \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B(t) = [b_{ij}(t)]_{n \times r} &\cong \sum_{k=1}^m B_k \Pi_k(t) \end{aligned} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_{ij}(t) &= \sum_{k=1}^m b_{ijk} \Pi_k(t), & i=1, 2, \dots, n; \\ & & j=1, 2, \dots, r \end{aligned} \right. \quad (22)$$

$$B_k = [b_{ijk}]_{n \times r} \quad k=1, 2, \dots, m \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned} N_d(t) = [n_{ijsd}(t)]_{n \times r} &\cong \sum_{k=1}^m N_{dk} \Pi_k(t) \end{aligned} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} n_{ijsd}(t) &\cong \sum_{k=1}^m n_{ijsdk} \Pi_k(t), & i, j=1, 2, \dots, n; & d=1, 2, \dots, r \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$N_{dk} = [n_{ijsdk}]_{n \times r} \quad k=1, 2, \dots, m \quad (26)$$

将式 (11) 从 0 至 t 积分, 得出

$$X(t) - X_0 = \int_0^t [A(t)X(t) + \sum_{d=1}^r N_d(t)X(t)u_d(t) + B(t)u(t)] dt \quad (27)$$

代式 (11), (15), (18), (21) 和 (24) 入 (27), 并利用方块脉冲函数的脱关性及积分运算性质, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m [X_k - X_0] \Pi_k(t) &= \sum_{k=1}^m [A_k X_k + \sum_{d=1}^r N_{dk} X_k u_{dk} + B_k u_k] \\ &\cdot \left[\frac{T}{2m} \Pi_k(t) + \sum_{l=k+1}^m \frac{T}{m} \Pi_l(t) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

比较上式两边对应项系数, 则有

$$\left\{ \begin{aligned} X_1 - X_0 &= \frac{T}{2m} A_1 X_1 + \frac{T}{2m} \sum_{d=1}^r N_{d1} X_1 u_{d1} + \frac{T}{2m} B_1 u_1 \\ X_k - X_{k-1} &= \frac{T}{2m} [A_k X_k + A_{k-1} X_{k-1} + B_k u_k + B_{k-1} u_{k-1} \\ &+ \sum_{d=1}^r N_{dk} X_k u_{dk} + N_{d, k-1} u_{d, k-1}], \quad k=2, 3, \dots, m \end{aligned} \right. \quad (29)$$

解出 X_k , 即得如下递推关系

$$\begin{cases} X_1 = \left[\frac{2m}{T} I_n - A_1 - \sum_{d=1}^r N_{d1} u_{d1} \right]^{-1} \cdot \left[\frac{2m}{T} X_0 + B_1 u_1 \right] \\ X_k = \left[\frac{2m}{T} I_n - A_k - \sum_{d=1}^r N_{dk} u_{dk} \right]^{-1} \cdot \left[\left(\frac{2m}{T} I_n + A_{k-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{d=1}^r N_{d, k-1} u_{d, k-1} \right) X_{k-1} + B_k u_k + B_{k-1} u_{k-1} \right], k=2, 3, \dots, m \end{cases} \quad (30)$$

例 1. 双线性时变系统的方程为

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + n(t)x(t)u(t) + b(t)u(t), \quad x(0) = 0$$

其中 $a(t) = -t$, $n(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]$, $b(t) = 1$, $u(t) = \exp\left[-\frac{1}{2}(1-t)^2\right]$.

求 $x(t)$ 在区间 $[0, 3)$ 中的分段恒定解答。

解: 按给定条件知 $T=3$ 。取 $m=6$ 并利用式 (30) 可求得 $x(t)$ 的分段恒定解答如图 1 所示。图中给出了 $x(t)$ 的精确解 $t \exp\left[-\frac{1}{2}(t-1)^2\right]$, 以便比较。

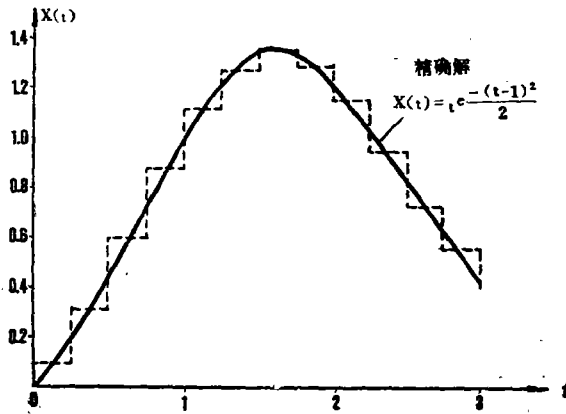


图 1 双线性时变系统状态方程的方块脉冲函数逼近法所得的近似解

四、双线性系统的参数估计

(1) 定常参数情况

先考察系统参数为时不变的情况。此时, $A_1 = A_2 = \dots = A_m$, $B_1 = B_2 = \dots = B_m$, $N_{d1} = N_{d2} = \dots = N_{dm}$, 重新排列式 (28), 有

$$[X_m - X_{m_0}] \Pi_{(m)} = \frac{T}{2m} \left[AX_m + \sum_{d=1}^r N_d X_m^{(u_d)} + BU_m \right] P_m \Pi_m(t) \quad (31)$$

这里

$$X_m = [X_1 : X_2 : \dots : X_m] \quad (32)$$

$$X_{m_0} = [X_0 : X_0 : \dots : X_0] \quad (33)$$

$$X_m^{(u_d)} = [X_1 \cdot u_{d1} : X_2 \cdot u_{d2} : \dots : X_m \cdot u_{dm}], \quad d=1, 2, \dots, r \quad (34)$$

$$U_m = [u_1 : u_2 : \dots : u_m] \quad (35)$$

令(31)式等式两边对应项相等, 应有

$$X_m^* = \theta_m G_m \quad (36)$$

这里 θ_m 为待辨识双线性系统的参数矩阵。

$$\theta_m = [A : N_1 : \dots : N_r : B]_{(r+1) \times (r+1)} \quad (37)$$

$$G_m = \begin{pmatrix} X_m \\ \dots \\ X_m^{(u_1)} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ X_m^{(u_r)} \\ \dots \\ U_m \end{pmatrix} = [g_1 : g_2 : \dots : g_m]_{(r+1) \times (r+1) \times m} \quad (38)$$

$$X_m^* = \frac{2m}{T} [X_m - X_{m0}] P_m^{-1} = [X_{ij}^*]_{(r+1) \times (r+1)} \quad (39)$$

根据最小二乘法, 可得出 θ_m 的估计值 $\hat{\theta}_m$

$$\hat{\theta}_m = X_m^* W_m G_m^t [G_m W_m G_m^t]^{-1} \quad (40)$$

其中 W_m 为加权矩阵

$$W_m = \begin{pmatrix} \alpha^{m-1} & & & \\ & \alpha^{m-2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha \\ & & & & 1 \end{pmatrix}_{m \times m}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (41)$$

若 $x(t)$, $u(t)$ 中各元素在区间 $[0, T)$ 外仍然是绝对可积的, 则当取得了第 $m+1$ 个子区间的新数据后, 基于前 $m+1$ 个子区间上的输入、输出数据的估计值应为

$$\hat{\theta}_{m+1} = X_{m+1}^* W_{m+1} G_{m+1}^t [G_{m+1} W_{m+1} G_{m+1}^t]^{-1} \quad (42)$$

其中

$$X_{m+1}^* = [X_m^* : X_{m+1}^*] \quad (43)$$

$$X_{m+1}^* = \frac{2m}{T} [X_{m-1} - X_{m+1,0}] \quad p_{m+1}^* = \frac{2m}{T} [X_{m+1} - X_m] - X_m^* \quad (44)$$

p_{m+1}^* 为 P_{m+1}^{-1} 的最后一列, 即 $p_{m+1}^* = [(-1)^{m+1}2, (-1)^m2, 2, -2, 1]^t$.

$$G_{m+1} = [G_m : g_{m+1}] \quad (45)$$

$$\mathbf{g}_{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{m+1} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{X}_{m+1} \mathbf{u}_{1, m+1} \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{X}_{m+1} \mathbf{u}_{r, m+1} \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{u}_{m+1} \end{pmatrix} \quad (46)$$

令 $\mathbf{S}_m = [\mathbf{G}_m \mathbf{W}_m \mathbf{G}_m^t]^{-1}$ (47)

$\mathbf{S}_{m+1} = [\mathbf{G}_{m+1} \mathbf{W}_{m+1} \mathbf{G}_{m+1}^t]^{-1}$ (48)

则可得出

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{m+1} &= [(\mathbf{G}_m : \mathbf{g}_{m+1}) \mathbf{W}_{m+1} (\mathbf{G}_m : \mathbf{g}_{m+1})^t]^{-1} \\ &= [\alpha \mathbf{G}_m \mathbf{W}_m \mathbf{G}_m^t + \mathbf{g}_{m+1} \mathbf{g}_{m+1}^t]^{-1} \\ &= [\alpha \mathbf{S}_m^{-1} + \mathbf{g}_{m+1} \mathbf{g}_{m+1}^t]^{-1} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{m+1}^* \mathbf{W}_{m+1} \mathbf{G}_{m+1}^t &= [\mathbf{X}_m^* : \mathbf{X}_{m+1}^*] \mathbf{W}_{m+1} [\mathbf{G}_m : \mathbf{g}_{m+1}]^t \\ &= \alpha \mathbf{X}_m^* \mathbf{W}_m \mathbf{G}_m^t + \mathbf{X}_{m+1}^* \mathbf{g}_{m+1}^t \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{m+1} &= \mathbf{X}_{m+1}^* \mathbf{W}_{m+1} \mathbf{G}_{m+1}^t \mathbf{S}_{m+1} \\ &= [\alpha \mathbf{X}_m^* \mathbf{W}_m \mathbf{G}_m^t + \mathbf{X}_{m+1}^* \mathbf{g}_{m+1}^t] \cdot [\alpha \mathbf{S}_m^{-1} \mathbf{g} + \mathbf{g}_{m+1} \mathbf{g}_{m+1}^t]^{-1} \\ &= \hat{\boldsymbol{\theta}}_m + \frac{\mathbf{X}_{m+1}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}_m \mathbf{g}_{m+1}}{\alpha + \mathbf{g}_{m+1}^t \mathbf{S}_m \mathbf{g}_{m+1}} \mathbf{g}_{m+1}^t \mathbf{S}_m \end{aligned} \quad (51)$$

将 (40) — (51) 各式中的下标用 k 代替, 则可得出估计双线性系统参数的递推算法如下:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k + \mathbf{Y}_{k+1} (\mathbf{X}_{k+1}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k \mathbf{g}_{k+1}) \mathbf{g}_{k+1}^t \mathbf{S}_k \quad (52)$$

$$\mathbf{Y}_{k+1} = 1 / (\alpha + \mathbf{g}_{k+1}^t \mathbf{S}_k \mathbf{g}_{k+1}) \quad (53)$$

$$\mathbf{S}_{k+1} = \frac{1}{\alpha} [\mathbf{S}_k - \mathbf{Y}_{k+1} \mathbf{S}_k \mathbf{g}_{k+1} \mathbf{g}_{k+1}^t \mathbf{S}_k] \quad (54)$$

其中 $\mathbf{X}_{k+1}^* = \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^*$, $\mathbf{X}_0^* = \mathbf{X}_0$ (55)

$$\mathbf{g}_{k+1} = [\mathbf{X}_{k+1}^t : \mathbf{X}_{k+1}^t \mathbf{u}_{1, k+1} : \dots\dots : \mathbf{X}_{k+1}^t \mathbf{u}_{r, k+1} : \mathbf{u}_{k+1}^t]^t \quad (56)$$

在实际运用此递推公式时, 可简单地令 $\boldsymbol{\theta}_0 = 0$, $\mathbf{S}_0 = c^2 \mathbf{1}$. (c 为充份大的正数)。可以证明, 经过一定次数的迭代运算, 就可得到满意的估计量。

(2) 时变参数情况

在参数为时变的情况下, 问题要稍微复杂些。由式 (28) 可知, 每个待估计的时变参数将衍生出 m 个待估计的参数。随着划分的子区间数目的增加, 待估计的参数也成比例地增加。为保证参数估计结果的唯一性, 必须增加测试信号。用 $u_l(t)$ 代表测试信号 ($l=1, 2,$

……, $q; q \geq [(r+1)n+r]$, $x_i(t)$ 为系统对输入 $u_i(t)$ 的响应, 则由式 (29) 可得出

$$\begin{cases} X_{l1} - X_{l0} = \frac{T}{2m} \left[A_1 X_{l1} + \sum_{d=1}^r N_{d1} X_{l1} u_{ld1} + B_1 u_{l1} \right], \\ X_{lk} - X_{l,k-1} = \frac{T}{2m} \left[A_k X_{lk} + A_{k-1} X_{l,k-1} + B_k u_{lk} + B_{k-1} u_{l,k-1} + \right. \\ \left. + \sum_{d=1}^r (N_{dk} X_{lk} u_{ldk} + N_{d,k-1} X_{l,k-1} u_{ld,k-1}) \right] \end{cases} \quad (57)$$

$$k=1, 2, \dots, m; l=1, 2, \dots, q$$

若令

$$Y_k = \frac{2m}{T} [X_{1k} - X_{1,k-1} : X_{2k} - X_{2,k-1} : \dots : X_{qk} - X_{q,k-1}], \quad k=1, 2, \dots, m \quad (58)$$

$$\theta_k = [A_k : N_{1k} : \dots : N_{rk} : B_k], \quad k=1, 2, \dots, m, \quad (59)$$

$$D_k = \begin{pmatrix} X_{1k} & : & X_{2k} & : & \dots & : & X_{qk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{11} \cdot u_{11k} & : & X_{21} \cdot u_{21k} & : & \dots & : & X_{q1} u_{q1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & : & \vdots & : & \vdots & : & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{11} \cdot u_{1rk} & : & X_{21} \cdot u_{2rk} & : & \dots & : & X_{q1} u_{qrk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{1k} & : & u_{2k} & : & \dots & : & u_{qk} \end{pmatrix} \quad k=1, 2, \dots, m \quad (60)$$

$[r+1)n+r] \times q$

则有

$$\begin{cases} Y_1 = \theta_1 D_1 \\ Y_k = \theta_k D_k + \theta_{k-1} D_{k-1}, \quad k=2, 3, \dots, m \end{cases} \quad (61)$$

根据最小二乘法, 则可求出 θ_k 的估计值:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = Y_1 D_1^t (D_1 D_1^t)^{-1} \\ \hat{\theta}_k = (Y_k - \hat{\theta}_{k-1} D_{k-1}) D_k^t (D_k D_k^t)^{-1}, \quad k=2, 3, \dots, m \end{cases} \quad (62)$$

式 (60) 即为估计双线性时变系统参数的递推算法。

当系统参数随时间变化较慢时, 式 (52)、(53) 和 (54) 仍可用来估计系统的参数。为了使得到的结果更加有效, 可以适当减小遗忘因子 α , 以加强包含有参数随时间变化信息的新数据的作用。

例 2. 一双线性系统的方程为

$$\dot{x}(t) = ax(t) + nx(t)u(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0$$

其中 $a = -2$, $n = 2$, $b = 3$, $u(t) = \exp(-0.5t)$, $x_0 = 2$ 。使用 4 阶龙格—库塔方法产生一组输出数据, 并以此输出数据为依据, 使用本文给出的递推算法, 求得系统参数估计值如表 1 所列。

表 1

$\frac{T}{m}$	K	\hat{a}	\hat{n}	\hat{b}
0.125	1	0.5961	0.5780	0.2660
	2	-1.6399	1.4392	3.4056
	3	-2.0006	1.9999	2.9951
	4	-2.0002	1.9993	2.9958
	5	-1.9997	1.9982	2.9969
	6	-2.0006	2.0030	2.9861
	7	-1.9988	1.9951	3.0031
	8	-1.9989	1.9952	3.0029
0.25	1	0.5321	0.5008	0.2162
	2	-1.9697	1.9394	3.0399
	3	-1.9986	1.9931	2.9870
	4	-1.9685	1.9544	2.9637
	5	-1.9922	1.9864	2.9783
	6	-1.9961	1.9751	3.0322
	7	-1.9963	1.9747	3.0346
	8	-1.9962	1.9749	3.0335
真 值		-2.00	2.00	3.00

在此例中, $g_k = [x_k, x_k u_k, u_k]^t$, $\hat{\theta} = [\hat{a}, \hat{n}, \hat{b}]^t$, $a=1$.

例 3. 一多项式系统的方程为

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx^2(t)u(t) + cx(t)u^2(t) + du(t), \quad x(0) = x_0.$$

其中 $a=-1$, $b=0.5$, $c=0.3$, $d=1.5$, $u(t) = \exp(-0.5t)$, $x_0=0$. 使用与例 2 相同的算法, 得到系统参数估计值如表 2 所列.

表 2

$\frac{T}{m}$	K	\hat{a}	\hat{b}	\hat{c}	\hat{d}
0.125	1	0.1273	0.0108	0.1197	1.4164
	2	-0.3711	-0.1388	-0.2659	1.4949
	3	-0.3576	-0.0844	-0.3041	1.4965
	4	-0.9988	0.4981	0.4991	1.4988
	5	-0.9988	0.4981	0.2993	1.4988
	6	-0.9977	0.4963	0.2963	1.4985
	7	-0.9988	0.4979	0.2996	1.4987
	8	-0.9997	0.4993	0.2996	1.4988
0.25	1	0.2264	0.0346	0.2006	1.3109
	2	-0.3731	-0.2586	-0.1492	1.4757
	3	-0.3731	-0.2585	-0.1495	1.4757
	4	-0.9984	0.4964	0.2986	1.4952
	5	-0.9989	0.4970	0.2991	1.4952
	6	-0.9988	0.4969	0.2990	1.4952
	7	-0.9987	0.4968	0.2981	1.4950
	8	-0.9982	0.4963	0.3012	1.4935
真 值		-1.00	0.50	0.30	1.50

从此例可以看出, 本文所给出算法的应用范围, 不仅仅限于双线性系统, 而且可以推广到一大类结构为多项式型的非线性系统中去。但要注意的是, 由于已不是双线性系统, 所以 g_m 的内容要相应地做些变化。在此例中, 应有

$$g_m = [x_m, x_m^2 u_m, x_m u_m^2, u_m]^t, \quad \hat{\theta} = [\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}]^t$$

例 4. 一双线性时变系统的方程为

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + n(t)x(t)u(t) + b(t)u(t), \quad x(0) = x_0.$$

其中 $a(t) = -e^{-0.3t}$, $n(t) = 2t$, $b(t) = 1.5e^{-0.3t}$ 。采用本文给出的算法, 需要估计 $3m$ 个参数。为此使用四个不同的输入信号: e^{-2t} ($x_0 = 0.2$), $2t$ ($x_0 = 0.1$), te^{-t} ($x_0 = 4.1$) 及 $1/(0.5+t)$ ($x_0 = 2.6$)。所得到的系统参数的方块脉冲函数近似值如图 2 所示。

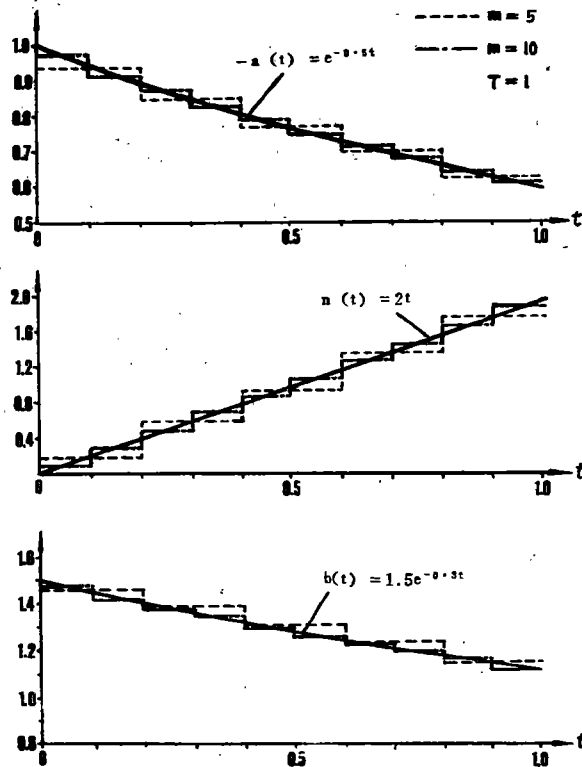


图 2 用方块脉冲函数方法估计双线性时变系统参数所得的近似解

例 5. 考察由微分方程

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + x(t)u(t) + 3u(t), \quad x(0) = x_0.$$

描述的双线性系统, 其中 $x_0 = 5$, $u(t) = 2 \exp(2(t-0.5))$ 。输入和输出分别带有观测噪声 $\eta(t)$ 和 $\xi(t)$ 。这里 $\eta(t)$ 和 $\xi(t)$ 为独立零均值白噪声, 其方差分别为 r 和 q 。使用本文给出的算法, 得出参数估计值如表 3。这里 $m = 20$, $T = 1$ 。

表 3

方 差	参 数 估 计 值		
	\hat{a}	\hat{n}	\hat{b}
$r=0.0167$ $q=0.0083$	-2.0243	1.0668	2.8078
$r=0.0083$ $q=0.0033$	-2.0001	1.0329	2.8749
真 值	-2.00	1.00	3.00

五、结 论

通过本文分析可知, 方块脉冲函数具有比沃尔什函数更为简便、直观的特点和优良的运算性质, 这对于求解双线性系统状态方程和估计双线性系统参数非常有用, 可使所导出的结果易于化成简洁的递推算法, 因而应用起来很方便, 并有助于实现实时在线参数估计及减少舍入误差。此外, 由于子区间分段数可选取任意整数, 这也有利于节省内存和机时。

参 考 文 献

- [1] V.R.Karanam, *et al.*, Bilinear system identification by walsh functions, 1978, IEEE Trans. autom. Control, Vol AC-23, №4, 709-713.
- [2] K.V.Rao, *et al.*, On bilinear system identification by walsh functions, 1976. Proc, 4th IFAC Symposium, Identification and system parameter estimation, Tbilisi, USSR, 1749-1758.
- [3] N.S.Hsu and B.Cheng, Analysis and optimal control via block-pulse functions, 1981. Int. J. Control, Vol.33, №6, 1107-1122.
- [4] 徐宁寿、郑兵, 方块脉冲函数用于线性时变系统的分析和最优控制, 自动化学报, 第8卷, 第1期, 55-67.