关于 Taylor 定理的余项

曹承宾 寿玉亭
(北京建筑工程学院数学教研室，北京，100044)

摘 要 讨论了利用微分中值定理“中间点”的渐近性，改进 Taylor 公式的问题；证明了在 $f(x_0+h)$ 的 Taylor 公式中，用中间点 ξ 的渐近值 x_0+Ah 替换余项中的 ξ，可以得到一个推广的 Taylor 公式，而且推广后公式的余项中的中间点 η 也有渐近性．同时，证明了“中间点”渐近性的递推性，给出了一个更一般的结果(定理二)．

关键词 渐近性，中间点，中值定理
分类号 O 13

文献讨论了 Taylor 定理中间点渐近性的递归性，本文希望把这种讨论深入下去．

定理 (Taylor) 设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上有 n 阶导数，则在 (x_0, x_0+h) 内至少存在一点 ξ，使下式成立，

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)h^i+f^{(n)}(\xi)h^n \tag{1}$$

在文献 [2], [3] 中给出下面“中间点”渐近性定理的证明．

定理(中间点渐近性定理) 设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+h]$ 上有 $n+p$ 阶连续导数，且

$$f^{(n+j)}(x_0)=0 \quad (1\leqslant j<p),\ f^{(n+p)}(x_0)\neq 0$$

记

$$A_0=\frac{1}{(C_{n+p}^{p})^{\frac{1}{p}}}$$

则由(1)式确定的中间点 ξ，有

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\xi-x_0}{h}=\frac{1}{\sqrt[p]{C_{n+p}^{p}}}=A_0$$

本文现在要讨论的问题是很自然提出的，即，如果用 ξ 的近似值 x_0+A_0h 代换(1)式右端中的 ξ，(1)式右端将变为

$$Q_0(h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+A_0h)h^n$$ 这时是否存在一个类似于 Taylor 公式余项的式子 $R_n(h)$，使

收稿日期: 1997—05—07

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{n-1}h^{n-1}+$$

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+A_0h)h^n+R_n(h)=Q_0(h)+R_n(h)$$

成立？姑且称这种方法得到的式子为“推广”的Taylor公式，那么这种改进后的Taylor公式的“中间点”还有渐近性吗？

定理1[1,2]　设$f(x)$在$[x_0,\ x_0+h]$上有$n+p+2$阶连续导数，且

$$f^{(n+j)}(x_0)=0\quad(1\leqslant j<p)$$

记

$$Q_0(h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\cdots+$$

$$\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+A_0h)h^n$$

则　1) 在$(x_0,\ x_0+h)$内至少存在一点η，使下式成立

$$f(x_0+h)=Q_0(h)+\frac{M_{p+1}}{(n+p+1)!}f^{(n+p+1)}(\eta)h^n \tag{2}$$

这里 $M_{p+1}=1-[(n+p+1)/(p+1)]A_0$.

2) 若$f^{(n+p+2)}(x_0)\neq 0$，记

$$A_{p+1}=\frac{1-\dfrac{(n+p+1)(n+p+2)}{(p+1)(p+2)}A_0^2}{(n+p+2)\left(1-\dfrac{n+p+1}{p+1}A_0\right)}$$

“中间点”η满足

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\eta-x_0}{h}=A_{p+1}$$

证明　1) 利用余项为积分形式的Taylor公式，将$Q_0(h)$及$f(x_0+h)$分别成为

$$Q_0(h)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i+\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_0)+0+\cdots+0+$$

$$\frac{f^{(n+p)}(x_0)}{p!}(A_0h)^p+\frac{1}{p!}\int_{x_0}^{x_0+A_0h}f^{(n+p+1)}(t)(x_0+A_0h-t)^p\,\mathrm{d}t]$$

$$f(x_0+h)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i+0+\cdots 0+\frac{1}{(n+p)!}f^{(n+p)}(x_0)h^{n+p}+$$

$$\frac{1}{(n+p)!}\int_{x_0}^{x_0+h}f^{(n+p+1)}(t)(x_0+h-t)^{n+p}\,\mathrm{d}t$$

由于

$$A_0^p=C_{n+p}^p=\frac{(n+p)!}{n!p!}$$

故有

$$\frac{h^{n+p}f^{(n+p)}(x_0)}{n!p!}A_0^p=\frac{h^{n+p}}{(n+p)!}f^{(n+p)}(x_0)$$

因此

$$f(x_0+h)-Q_0(h)=\frac{1}{(n+p)!}\int_{x_0}^{x_0+h}f^{(n+p+1)}(t)(x_0+h-t)^{p+n}\mathrm{d}t-$$

$$\frac{h^n}{n!p!}\int_{x_0}^{x_0+A_0h}f^{(n+p+1)}(t)(x_0+A_0h-t)^p\mathrm{d}t$$

令 $t=x_0+\mathrm{sh}$，对上面积分进行变量替换，则

$$f(x_0+h)-Q_0(h)=\frac{h^{n+p+1}}{(n+p)!}\int_0^1 f^{(n+p+1)}(x_0+sh)(1-s)^{n+p}\mathrm{d}s-$$

$$\frac{h^{n+p+1}}{n!p!}\int_0^{A_0}f^{(n+p+1)}(x_0+sh)(A_0-s)^p\mathrm{d}s=h^{n+p+1}\int_0^1 f^{(n+p+1)}(x_0+sh)l_0(s)\mathrm{d}s$$

其中

$$l_0(s)=\begin{cases}\dfrac{(1-s)^{n+p}}{(n+p)!}, & \text{当 } A_0\leqslant s\leqslant 1\\[2ex] \dfrac{(1-s)^{n+p}}{(n+p)!}-\dfrac{1}{n!p!}(A_0-s)^p, & \text{当 } 0\leqslant s\leqslant A_0\end{cases}$$

后面将证明 $l_0(s)$在$[0,1]$上是不变号的连续函数，因此由第一积分中值定理，存在η(其中η在x_0与x_0+h之间)，有

$$f(x_0+h)-Q_0(h)=h^{n+p+1}f^{(n+p+1)}(\eta)\int_0^1 l_0(s)\mathrm{d}s=$$

$$h^{n+p+1}f^{(n+p+1)}(\eta)\left[\int_0^{A_0}l_0(s)\mathrm{d}s+\int_{A_0}^1 l_0(s)\mathrm{d}s\right]=$$

$$h^{n+p+1}f^{(n+p+1)}(\eta)\left[\left(\frac{-(1-s)^{n+p+1}}{(n+p+1)!}-\frac{1}{n!(p+1)!}(A_0-s)^{p+1}\right)\Bigg|_0^{A_0}+\right.$$

$$\left.\frac{-(1-s)^{n+p+1}}{(n+p+1)!}\Bigg|_{A_0}^1\right]=h^{n+p+1}f^{(n+p+1)}(\eta)\left(\frac{1}{(n+p+1)!}-\frac{A_0^{p+1}}{n!(n+p)!}\right)=$$

$$\frac{1}{(n+p+1)!}h^{n+p+1}f^{(n+p+1)}(\eta)\left(1-\frac{n+p+1}{p+1}A_0\right)=$$

$$\frac{M_{p+1}}{(n+p+1)!}f^{(n+p+1)}(\eta)h^{n+p+1}$$

现证明，在$[0,1]$上 $l_0(s)\geqslant 0$，显然在$[A_0,1]$上 $l_0(s)\geqslant 0$. 在$[0,A_0]$上

$$l_0(s)=\frac{(1-s)^{n+p}}{(n+p)!}-\frac{1}{n!p!}(A_0-s)^p=\frac{1}{(n+p)!}\left[(1-s)^{n+p}-C_{n+p}^p(A_0-s)^p\right]$$

因此只要证明 $(1-s)^{n+p}-C_{n+p}^p(A_0s)^p\geqslant 0$，即证明 $\widetilde{l_0}(s)=(1-s)^{\frac{n+p}{p}}-\dfrac{A_0-s}{A_0}\geqslant 0$,

便可推知 $l_0(s)\geqslant 0$. 由于

$$\widetilde{l_0}'(s)=-\frac{n+p}{p}(1-s)^{\frac{n}{p}}+\frac{1}{A_0},\ \widetilde{l_0}''(s)=\frac{n+p}{p}\frac{n}{p}(1-s)^{\frac{n}{p}-1}\geqslant 0$$

故知$\widetilde{l_0}'(s)$在$[0,A_0]$上非降. 注意到自然数$p\geqslant 2$时，$\dfrac{n+p-1}{p-1}>\dfrac{n+p}{p}$

因此$(\dfrac{n+p}{p})\cdot(\dfrac{n+p-1}{p-1})\cdots(\dfrac{n+1}{1})>(\dfrac{n+p}{p})^p$，即有 $\dfrac{1}{A_0}>\dfrac{n+p}{p}$，所以

$$\widetilde{l_0}'(o)=\frac{1}{A_0}-\frac{n+p}{p}>0\ .$$

由$\widetilde{l_0}'(s)$的非降性，可知在$[0,A_0]$上$\widetilde{l_0}'(s)>0$，故知$\widetilde{l_0}(s)$在$[0,A_0]$上单调增加. 易验证$\widetilde{l_0}(o)=0$，所以在$[0,A_0]$上$\widetilde{l_0}(s)\geqslant 0$，这样$l_0(s)$在$[0,1]$上恒非负，(2)式得证.

2) 由 Taylor 公式，有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i+0+\cdots+0+$$
$$\frac{f^{(n+p)}(x_0)}{(n+p)!}h^{n+p}+\frac{f^{(n+p+1)}(x_0)}{(n+p+1)!}h^{n+p+1}+\frac{f^{(n+p+2)}(\sigma_1)}{(n+p+2)!}h^{n+p+2}$$

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+A_0h)=\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_0)+0+\cdots+0+\frac{f^{(n+p)}(x_0)}{p!}(A_0h)^p+$$
$$\frac{f^{(n+p+1)}(x_0)}{(p+1)}(A_0h)^{p+1}+\frac{f^{(n+p+2)}(x_0)}{(p+2)!}(A_0h)^{p+2}+o(h^{p+2})]$$

及

$$\frac{h^{n+p+1}}{(n+p+1)}(1-\frac{P+n+1}{P+1}A_0)f^{(n+p+1)}(\eta)=$$
$$\frac{h^{n+p+1}}{(n+p+1)!}(1-\frac{n+p+1}{p+1}A_0)[f^{(n+p+1)}(x_0)+(\eta-x_0)f^{(n+p+2)}(\sigma_2)]$$

这里 $x_0<\sigma_1<x_0+h$，$x_0<\sigma_2<\eta<x_0+h$. 将上面 3 个式子代入(2)式，利用恒等式

$$\frac{h^n}{n!}(A_0h)^p=\frac{h^{n+p}}{(n+p)!}$$

及

$$\frac{A_0^{p+1}}{n!(p+1)!}+\frac{1-\dfrac{n+p+1}{p+1}A_0}{(n+p+1)!}=\frac{1}{(n+p+1)!}$$

消去式中含 h^{n+p}及 h^{n+p+1}的项，整理得

$$\frac{h^{n+p+2}}{(n+p+2)!}f^{(n+p+2)}(\sigma_1)=o(h^{n+p+2})+\frac{h^{n+p+2}}{n!(p+2)!}A_0^{p+2}f^{(n+p+2)}(x_0)+$$
$$\frac{f^{(n+p+2)}(\sigma_2)}{(n+p+1)!}(1-\frac{n+p+1}{p+1}A_0)(\eta-x_0)h^{n+p+1}$$

由$f^{(n+p+2)}(x)$的连续性及$f^{(n+p+2)}(x_0)\neq 0$，故有

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\eta-x_0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\dfrac{f^{(n+p+2)}(\sigma_1)}{(n+p+2)!}-\dfrac{A_0^{p+2}}{n!\,(p+2)!}f^{(n+p+1)}(x_0)+o(1)}{\dfrac{1}{(n+p+1)!}\left(1-\dfrac{n+p+1}{p+1}A_0\right)f^{(n+p+2)}(\sigma_2)}=$$

$$\frac{1-\dfrac{(n+p+1)(n+p+2)}{(p+1)(p+2)}A_0^2}{(n+p+2)\left(1-\dfrac{n+p+1}{p+1}A_0\right)}=A_{p+1}$$

证毕

定理 1 确实证明了，在 Taylor 公式(1)中，用中间点ξ的渐近值 x_0+A_0h 替换余项中的ξ，可以得到$f(x_0+h)$的一个较好的近似式，改进了 Taylor 公式，而且改进后的 Taylor 公式的“中间点”η 也有渐近性．按此思路，再将η 的渐近值 x_0+hA_{p+1}替换改进的 Taylor 公式的中间点η，…，循环往复，会出现一个令人满意的结果吗？这正是定理 2 要讨论的问题．

为了使定理 2 的讨论清晰、简明，先给出几个引理．

首先要解决的是，$f(x_0+h)$的 k 阶近似式 $Q_k(h)$中的各系数 M_j, A_j 应满足什么条件？

引理 1 设$f(x)$在 $[x_0, x_0+h]$上有 $n+p+2k+1$ 阶连续导数，且

$$f^{(n+j)}(x_0)=0\ (0\leqslant j<p),\ f^{(n+p+i)}(x_0)\neq 0\ (i=1,2,\cdots,2k+1)$$

若

$$f(x_0+h)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i+\frac{M_0}{n!}f^{(n)}(x_0+A_0h)h^n+$$

$$\sum_{j=1}^{k+1}\frac{M_{p+2j-1}}{(n+p+2j-1)!}f^{(n+p+2j-1)}(x_0+A_{p+2j-1}h)h^{n+p+2j-1}+o(h^{n+p+2k+1})\qquad(*)$$

则常数 M_0, A_0, A_{p+2j-1}, M_{p+2j-1} $(j=1,2,\cdots,k+1)$满足下列各等式

$$\frac{M_0}{n!}=\frac{1}{n!}$$

$$\frac{M_0A_0^p}{n!p!}=\frac{1}{(n+p)!}$$

$$\frac{M_0A_0^{p+1}}{n!\,(p+1)!}+\frac{M_{p+1}}{(n+p+1)!}=\frac{1}{(n+p+1)!}$$

$$\frac{M_0A_0^{p+2}}{n!\,(p+2)}+\frac{M_{p+1}A_{p+1}}{(n+p+1)!1!}=\frac{1}{(n+p+2)!}$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$\frac{M_0A_0^{p+2k-1}}{n!\,(p+2k-1)!}+\frac{M_{p+1}A_{p+1}^{2k-2}}{(n+p+1)!\,(2k-2)!}+\frac{M_{p+3}A_{p+3}^{2k-4}}{(n+p+3)!\,(2k-4)!}+\cdots+$$

$$\frac{M_{p+2k-3}A_{p+2k-3}^{2}}{(n+p+2k-3)!\,2!}+\frac{M_{p+2k-1}}{(n+p+2k-1)!}=\frac{1}{(n+p+2k-1)!} \tag{4}$$

$$\frac{M_0A_0^{p+2k}}{n!\,(p+2k)!}+\frac{M_{p+1}A_{p+1}^{2k-1}}{(n+p+1)!\,(2k-1)!}+\frac{M_{p+3}A_{p+3}^{2k-3}}{(n+p+3)!\,(2k-3)!}+\cdots+$$

$$\frac{M_{p+2k-3}A_{p+2k-3}^{3}}{(n+p+2k-3)!\,3!}+\frac{M_{p+2k-1}A_{p+2k-1}}{(n+p+2k-1)!\,1!}=\frac{1}{(n+p+2k)!} \tag{5}$$

$$\frac{M_0A_0^{p+2k+1}}{n!\,(p+2k+1)!}+\frac{M_{p+1}A_{p+1}^{2k}}{(n+p+1)!\,(2k)!}+\frac{M_{p+3}A_{p+3}^{2k-2}}{(n+p+3)!\,(2k-2)!}+$$

$$\frac{M_{p+5}A_{p+5}^{2k-4}}{(n+p+5)!\,(2k-4)!}+\cdots+\frac{M_{p+2k-1}A_{p+2k-1}^{2}}{(n+p+2k-1)!\,2!}+\frac{M_{p+2k+1}}{(n+p+2k+1\,!}=$$

$$\frac{1}{(n+p+2k+1)} \tag{6}$$

证明　将$f(x_0+h)$, $f^{(n)}(x_0+A_0h)$以及$f^{(n+p+2j-1)}(x_0+A_{p+2j-1}h)$ $(j=1, 2, \cdots, k+1)$在$x=x_0$点展成最高阶为$n+p+2k+1$阶的Taylor公式(Peano余项)，将它们代入到引理1中的$(*)$式中，合并同次幂的项，比较各含$h^j(j=1, 2, \cdots, 2k+1)$的各项系数，由Taylor多项式系数的唯一性，可得上述各等式.

请注意，引理1的逆定理也成立.

引理2　设$f(x)$在$[x_0, x_0+h]$上有$n+p+2k$阶连续导数，且

$$f^{(n+j)}(x_0)=0\ (1\leqslant j<p),\ f^{(n+p+2k)}(x_0)\neq 0$$

若存在$\zeta\in(x_0, x_0+h)$使

$$f(x_0+h)=Q_{k-1}(h)+\frac{M_{p+2k-1}f^{(n+p+2k-1)}}{(n+p+2k-1)!}h^{n+p+2k-1} \tag{7}$$

成立，其中M_i, A_i是由引理1中(4)～(6)等式确定，则

$$\lim_{h\to n^+}\frac{\xi-x_0}{h}=A_{p+2k-1} \tag{8}$$

证明　写出有关函数的Taylor展开式：

$$\frac{M_0}{n!}f^{(n)}(x_0+A_0h)=\frac{M_0}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)+\sum_{i=0}^{2k}f^{(n+p+i)}(x_0)\frac{(A_0h)^{p+i}}{(p+i)!}+o(h^{p+2k})\right]$$

$$\frac{M_{p+2j-1}f^{(n+p+2j-1)}(x_0+A_{p+2j-1}h)}{(n+p+2j-1)!}=\frac{M_{p+2j-1}}{(n+p+2j-1)!}\Big[f^{(n+p+2j-1)}(x_0)+$$

$$\sum_{i=1}^{2(k-j)+1}\frac{f^{(n+p+2j-1+i)}(x_0)}{i!}(A_{p+2j-1}h)^i+o(h^{2(k-j)+1})\Big]\quad(j=1, 2, \cdots, k-1)$$

以及

$$\frac{M_{p+2k-1}}{(n+p+2k-1)!} f^{(n+p+2k-1)}(\zeta) =$$

$$\frac{M_{p+2k-1}}{(n+p+2k-1)!} [f^{(n+p+2k-1)}(x_0) + (\zeta - x_0) f^{(n+p+2k)}(\sigma_2)]$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i + \sum_{i=0}^{2k-1} \frac{f^{(n+p+i)}(x_0)}{(n+p+i)!} h^{n+p+i} + \frac{f^{(n+p+2k)}(\sigma_1)}{(n+p+2k)!} h^{n+p+2k}$$

将上述各式代入到(7)式中的$f(x_0+h)$, $f^{(n+p+2k-1)}(\zeta)$以及

$$Q_{k-1}(h) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) h^i + \frac{M_0}{n!} f^{(n)}(x_0 + A_0 h) h^n + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{M_{p+2j-1} f^{(n+p+2j-1)}(x_0 + A_{p+2j-1} h)}{(n+p+2j-1)!} h^{n+p+2j-1}$$

中. 注意到引理 1 中给出的各等式，合并同类项，化简得

$$\frac{f^{(n+p+2k)}(\sigma_1)}{(n+p+2k)!} h^{n+p+2k} = o(h^{n+p+2k}) + f^{(n+p+2k)}(x_0) h^{n+p+2k} [\frac{M_0 A_0^{p+2k}}{n!(p+2k)!} + \frac{M_{p+1} A_{p+1}^{2k-1}}{(n+p+1)!(2k-1)!} + \frac{M_{p+3} A_{p+3}^{2k-3}}{(n+p+3)!(2k-3)!} + \cdots + \frac{M_{p+2k-3} A_{p+2k-3}}{(n+p+2k-3)!3!}] + \frac{M_{p+2k-1} f^{(n+p+2k)}(\sigma_2)}{(n+p+2k-1)!} (\zeta - x_0) h^{n+p+2k-1}$$

故有

$$\frac{\zeta - x_0}{h} = \{ o(1) + \frac{f^{(n+p+2k)}(\sigma_1)}{(n+p+2k)!} - [\frac{M_0 A_0^{p+2k}}{n!(p+2k)!} + \frac{M_{p+1} A_{p+1}^{2k-1}}{(n+p+1)!(2k+1)!} + \frac{M_{p+3} A_{p+3}^{2k-3}}{(n+p+3)!(2k-3)!} + \cdots + \frac{M_{p+2k-3} A_{p+2k-3}^{3}}{(n+p+2k-3)!3!}] f^{(n+p+2k)}(x_0) \} \Big/ [\frac{M_{p+2k-1}}{(n+p+2k-1)!} f^{(n+p+2k)}(\sigma_2)]$$

由$f^{(n+p+2k)}(x_0)$的连续性，以及$f^{(n+p+2k)}(x_0) \neq 0$，并注意到引理 1 中的(5)式，对上式求极限，可得

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\zeta - x_0}{h} = A_{p+2k-1}$$ 证毕

引理 3 设 M_i, A_j是由引理 1 结论中各等式确定的常数，令

$$l_k(s)=\frac{(1-s)_+^{n+p+2k}}{(n+p+2k)!}-\frac{M_0(A_0-s)_+^{p+2k}}{n!(p+2k)!}-\frac{M_{p+1}(A_{p+1}-s)_+^{p+2k-1}}{(n+p+1)!(2k-1)!}-$$
$$\frac{M_{p+3}(A_{p+3}-s)_+^{2k-3}}{(n+p+3)!(2k-3)!}-\cdots-\frac{M_{p+2k-3}(A_{p+2k-3}-s)_+^3}{(n+p+2k-3)!3!}-\frac{M_{p+2k-1}(A_{p+2k-1}-s)_+}{(n+p+2k-1)!1!}$$

这里函数

$$\varphi(s)=(E-s)_+^t=\begin{cases}(E-s)^t, & 当\ s\leqslant E\\ 0, & 当\ s>E\end{cases}$$

则 $l_k(s)$连续且$l_k(s)\geqslant 0$(当$x\geqslant 0$时)

证明 $l_k(s)$的连续性是显然的.

用数学归纳法证明$l_k(s)$的非负性.

当$k=0$时

$$l_k(s)=\frac{(1-s)_+^{n+p}}{(n+p)!}-\frac{(A_0-s)_+^p}{n!p!}\ .$$

由定理1中关于$l_o(s)$在[0, 1]上非负性的证明，易知$s\geqslant 0$时，$l_o(s)\geqslant 0$.

现在假设，当$s\geqslant 0$时$l_{k-1}(s)\geqslant 0$，要证明当$s\geqslant 0$时$l_k(s)\geqslant 0$.

首先注意到，当$k\geqslant 1$时，函数$l_k(s)$在$s\neq A_{p+2k-1}$处处二阶可导，且$l_k''(s)=l_{k-1}(s)$. 由归纳假设知，当$s\geqslant 0$时$l_{k-1}(s)\geqslant 0$，从而函数

$$l_k'(s)=\frac{-(1-s)_+^{n+p+2k-1}}{(n+p+2k-1)!}+\frac{M_0(A_0-s)_+^{p+2k-1}}{n!(p+2k-1)!}+\frac{M_{p+1}(A_{p+1}-s)_+^{2k-2}}{(n+p+1)!(2k-2)!}+$$
$$\frac{M_{p+3}(A_{p+3}-s)_+^{2k-4}}{(n+p+3)!(2k-4)!}+\cdots+\frac{M_{p+2k-3}(A_{p+2k-3}-s)_+^2}{(n+p+2k-3)!2!}+$$
$$\frac{M_{p+2k-1}}{(n+p+2k-1)!}\ \frac{(A_{p+2k-1}-s)_+}{(A_{p+2k-1}-s)}$$

在$s\geqslant 0$的每个连续区间内均是非降的. 记

$$A=\max\{1,\ A_0,\ A_{p+1},\ A_{p+3},\ \cdots,\ A_{p+2k-3},\ 1+A_{p+2k-1}\}$$

则函数$l_k'(s)$在区间$(0,\ A_{p+2k-1})$及$(A_{p+2k-1},\ A)$均非降，在$s=A_{p+2k-1}$间断，在$[A,+\infty)$ $l_k'(s)\equiv 0$. 由(4)式以及关于函数$(E-s)_+^t$的约定，易验证$l_k'(o)=0$，$l_k'(A)=0$. 由$l_k'(s)$的非降性，可推知. 当$s\in(0,\ A_{p+2k-1})$时$l_k'(s)\geqslant 0$，当$s\in(A_{p+2k-1},\ A)$时$l_k'(s)\leqslant 0$. 进而知函数$l_k(s)$在$[0,\ A_{p+2k-1}]$是非降的，$l_k(s)$在$[A_{p+2k-1},\ A]$是非增的. 再由(5)式及$(E-s)_+^t$的约定，有$l_k(o)=0$，$l_k(A)=0$，从而$l_k(s)$在$[o,\ A]$内恒 大于等于0，又显然当$s>A$时$l_k(s)\equiv 0$. 所以当$s\geqslant 0$时$l_k(s)\geqslant 0$. 证毕

现在给出本文的主要定理. 设M_i，A_j满足(4)～(6)等各式，记

$$Q_k(h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i+\frac{M_0f^{(n)}(x_0+A_0h)}{n!}h^n+$$
$$\sum_{j=1}^{k}\frac{M_{p+2j-1}}{(n+p+2j-1)!}f^{(n+p+2j-1)}(x_0+A_{p+2j-1}h)h^{n+p+2j-1}$$

定理2　设$f(x)$在$[x_0, x_0+h]$有$n+p+2k+1$阶连续导数，且$f^{(n+j)}(x_0)=0$ $(1\leqslant j<p)$，则

1）在(x_0, x_0+h)内至少存在一点η，使下式成立

$$f(x_0+h)=Q_k(h)+\frac{M_{p+2k+1}}{(n+p+2k+1)!}f^{(n+p+2k+1)}(\eta)h^{n+p+2k+1} \tag{9}$$

2）若在$[x_0, x_0+h]$上$f(x)$有$n+p+2k+2$阶连续导数，且$f^{(n+p+2k+2)}(x_0)\neq 0$，这时由(9)式确定的$\eta$满足

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\eta-x_0}{h}=A_{p+2k+1}$$

3）$Q_k(h)$中的常数$M_0=1$,　$A_0=1/[(C_{n+p}^p)^{1/p}]$.

$o<M_{p+2i-1}<1$, $o<A_{p+2i-1}<1$ $(i=1, 2, 3, \cdots, k+1)$.

证明　1）将(9)式左边$f(x_0+h)$展成$n+p+2k$阶Taylor公式(积分余项)

$$f(x_0+h)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i+\sum_{i=0}^{2k}\frac{f^{(n+p+i)}(x_0)}{(n+p+i)!}h^{n+p+i}+$$
$$\frac{1}{(n+p+2k)!}\int_{x_0}^{x_0+h}f^{(n+p+2k+1)}(t)(x_0+h-t)^{n+p+2k}\mathrm{d}t$$

再将(9)式右边的$f^{(n)}(x_0+A_0h)$展成$p+2k$阶Taylor公式，将$f^{(n+p+2j-1)}(x_0+A_{p+2j-1}h)$展成$2k-2j+1$阶Taylor公式(均为积分余项)

$$f^{(n)}(x_0+A_0h)=f^{(n)}(x_0)+\sum_{i=0}^{2k}\frac{f^{(n+p+i)}(x_0)}{(p+i)!}(A_0h)^{p+i}+$$
$$\frac{1}{(p+2k)!}\int_{x_0}^{x_0+hA_0}f^{(n+p+2k+1)}(t)(x_0+A_0h-t)^{p+2k}\mathrm{d}t$$

$$f^{(n+p+2j-1)}(x_0+A_{p+2j-1}h)=f^{(n+p+2j-1)}(x_0)+f^{(n+p+2j)}(x_0)(A_{p+2j-1}h)^1+$$

$$\frac{1}{2!}f^{(n+p+2j-1)}(x_0)(A_{p+2j-1}h)^2+\cdots+\frac{f^{(n+p+2k)}(x_0)}{(2k-2j+1)!}(A_{p+2j-1}h)^{2k-2j+1}+$$

$$\int_{x_0}^{x_0+A_{p+2j-1}h}\frac{f^{(n+p+2k+1)}(t)}{(2k-2j+1)!}(x_0+A_{p+2j-1}-t)^{2k-2j+1}\mathrm{d}t$$

把上述各式代入到$f(x_0+h)-Q_k(s)$的相应各函数中，利用引理1结论中的各等式关系，必可以消去不含积分式的各项，得到

$$f(x_0+h)-Q_k(h)=\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{f^{(n+p+2k+1)}(t)}{(n+p+2k)!}(x_0+h-t)^{n+p+2k}\mathrm{d}t-$$

$$\frac{M_0h^n}{n!(p+2k)!}\int_{x_0}^{x_0+A_0h}f^{(n+p+2k+1)}(t)(x_0+A_0h-t)^{p+2k}\mathrm{d}t-$$

$$\sum_{j=1}^{k} h^{n+p+2j-1}\int_{x_0}^{x_0+A_{p+2j-1}}\frac{M_{p+2j-1}f^{(n+p+2k+1)}(t)}{(n+p+2j-1)!(2k-2j+1)!}(x_0+A_{p+2j-1}h-t)^{2k-2j+1}\mathrm{d}t$$

对上面各式进行积分变量替换，令 $t=x_0+sh$，得

$$f(x_0+h)-Q_k(h)=h^{n+p+2k+1}\Big[\int_0^1\frac{f^{(n+p+2k+1)}(x_0+sh)}{(n+p+2k)!}(1-s)^{n+p+2k}\mathrm{d}s-$$

$$\int_0^{A_0}\frac{M_0f^{(n+p+2k+1)}(x_0+sh)}{n!(P+2k)!}(A_0-s)^{p+2k}\mathrm{d}s-$$

$$\sum_{j=1}^{k}\int_0^{A_{p+2j-1}}\frac{M_{p+2j-1}f^{(n+p+k+1)}(x_0+sh)}{(n+p+2j-1)!(2k-2j+1)!}(A_{p+2j-1}-s)^{2k-2j+1}\mathrm{d}s\Big]=$$

$$h^{n+p+2k+1}\int_0^1 f^{(n+p+2k+1)}(x_0+sh)\,l_k(s)\,\mathrm{d}s$$

其中 $l_k(s)$为引理 3 中所给，且已证 $l_k(s)\geqslant 0$ (当 $s\geqslant 0$ 时). 故由第一积分中值定理知，存在 $\eta\in(x_0,\ x_0+h)$，使下式成立

$$f(x_0+h)-Q_k(h)=h^{n+p+2k+1}f^{(n+p+2k+1)}(\eta)\int_0^1 l_k(s)\,\mathrm{d}s$$

而

$$\int_0^1 l_k(s)\,\mathrm{d}s=\frac{-(1-s)^{n+p+2k+1}}{(n+p+2k)!(n+p+2k+1)}\Big|_0^1+\frac{M_0(A_0-s)^{p+2k+1}}{n!(p+2k+1)!}\Big|_0^{A_0}+$$

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{M_{p+2j-1}(A_{p+2j-1}-s)^{2k-2j+2}}{(n+p+2j-1!(2k-2j+2)!}\Big|_0^{A_{p+2j-1}}=$$

$$\frac{1}{(n+p+2k+1)!}-\frac{M_0A_0^{p+2k+1}}{n!(p+2k+1)!}-\sum_{j=1}^{k}\frac{M_{p+2j-1}A_{p+2j-1}^{2k-2j+2}}{(n+p+2j-1)!(2k-2j+2)!}$$

由引 1 中的(6)式知

$$\int_0^1 l_k(s)\,\mathrm{d}s=\frac{M_{p+2k+1}}{(n+p+2k+1)!}\qquad(10)$$

因此有

$$f(x_0+h)=Q_k(h)+\frac{h^{n+p+2k+1}}{(n+p+2k+1)!}M_{p+2k+1}f^{(n+p+2k+1)}(\eta)$$ 证毕

2) 由于增加了假设 $f^{(n+p+2k+2)}(x_0)\neq 0$，妨照引理 2 的证明，可证明之.

3) 显然 $M_0=1$，$A_0=1/[(C_{n+p}^{p})^{1/p}]$. 先证明对一切的正整数 j，总有 $0\leqslant A_{p+2j-1}\leqslant 1$ 成立. 考虑函数 $f(x)=x^{n+p}e^x$，它在 $[0,\ h]$上有 $n+p+2k+1$ 阶连续导数，$f^{(n+j)}(0)=0\ (1\leqslant j<p)$，$f^{(n+p+2k+1)}(0)\neq 0$. 由本定理中的 1)，可以写出 $f(x)=x^{n+p}e^x$的广义 Taylor 公式(9)，再由本定理 2)知

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\eta-o}{h}=A_{p+2k+1}$$

由于$\eta \in (0, h)$，故$0 \leqslant A_{p+2k+1} \leqslant 1$.

再证明$A_{p+2j-1} \neq 0$且$A_{p+2j-1} \neq 1$. 现用反证法，设$A_{p+2j-1} = 1$，由引理(3)的证明过程知，$l_j'(s)$在$[0, 1]$非降而且连续. 又因为显然有$l_j'(0) = 0$, $l_j'(1) = 0$，从而推知$l_j'(s)$在$[0, 1]$上恒为0. 由于$l_j''(s) = l_{j-1}(s)$ $(s \neq A_{p+2j-3})$故知$l_{j-1}(s) \equiv 0$ $(s \in [0, 1], s \neq A_{p+2j-3})$. 继续求导，必有$l_0(s) \equiv 0$ $(s \in [0, 1], s \neq A_{p+2j-1}, j = 1, 2, \cdots)$. 但$l_0(s) \geqslant 0$，且仅在$s = 0$, $s = 1$时$l_0(s) = 0$成立，矛盾之. 故$A_{p+2j-1} \neq 1$. 类似的道理可以证明，$A_{p+2j-1} \neq 0$.

最后证明$0 < M_{p+2j-1} < 1$ $(j = 1, 2, \cdots, k+1)$. 由前面讨论知，当$s \in [0, 1]$时$l_j(s) \geqslant 0$且$l_j(s) \not\equiv 0$，在$[0, 1]$上连续. 因此

$$\int_0^1 l_j(s)\,\mathrm{d}s > 0$$

由(10)式有

$$M_{p+2j-1} = (n+p+2j-1)!\int_0^1 l_j(s)\,\mathrm{d}s > 0$$

再根据引理1中各等式，例如(4)，(6)式，并注意到，A_j, M_i均大于0, 故必有

$$M_{p+2j-1} < 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, k+1)$$

证毕

参 考 文 献

1 Esteban I Poffald. The Remainder in Taylor's Formula. Amer Math. Monthly, 1990, 97: 205～210

2 张文梵. 关于微分中值定理的一个注记. 数学的实践与认识. 1988(1): 86～87

3 Bernard Jacobson. On the Mean Value Theorem for Integrals. Amer Math Monthly, 1982, 89: 300～301

The Remainder in Taylor's Formula

Cao Chengbin Shou Yuting

(Beijing Institute of Civil Engineering and Architecture, Beijing, 100044)

Abstract The way to utilize the progressive feature of the intermediate point of differential mean-value theorem to improve Taylor's formula is discussed. It is proved that an extended Taylor's formula can be obtained by using the progressive value of the intermediate point ξ, $x_0 + Ah$, as a substitute for ξ in the remainder in Taylor's formula of $f(x_0 + h)$. And it is also proved that the intermediate point η in the remainder of the extended formula is of progression. Besides the recursion feature of the intermediate point progression is proved, and a more general result is given.

Keywords asymptotic behavior, intermediate point, meanvalue theorem