关于二维驻定方程组解的全局稳定性

梁在中　　周大琼

（应用数学系微分方程教研室）

摘　　要

本文讨论了几个特殊的二维驻定方程组解的全局渐近稳定性问题。

On the stability in the Large of the solution of Two-Dimensional Autonomous System

Liang Zai—zhong　　Zhou Da—qiong

Abstract

In this paper, the problem about asymptotic stability in the large of the solution of several particular two—dimensional autonomous systems is discussed.

E. A. Барбашин[1] 曾讨论组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-\varphi(y)-g(y)f(x) \end{cases}$$

的平凡解的全局渐近稳定性问题，而谷超豪[2]和张炳根[3]分别对组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f_1(x)+f_2(x)y \\ \dfrac{dy}{dt}=f_3(x)+f_4(x)y \end{cases}$$

本文于 1980 年 7 月 4 日收到

及

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(x)+g_2(y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=f_3(x)+g_4(y)\end{cases}$$

讨论过这一问题。本文将讨论以下几个更为一般的二维驻定方程组解的全局稳定性问题。

$$(1)\qquad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(x)+f_2(x)g_2(y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=f_3(x)+f_4(x)g_2(y)\end{cases}$$

$$(2)\qquad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(x)+f_2(x)g_2(y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=f_3(x)+f_4(x)g_4(y)\end{cases}$$

$$(3)\qquad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(x)y+f_2(x)g_2(y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=f_3(x)y+f_4(x)g_2(y)\end{cases}$$

$$(4)\qquad\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f_1(x)g_1(y)+f_2(x)g_2(y)\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=f_3(x)g_3(y)+f_4(x)g_4(y)\end{cases}$$

为此，先将几个用到的定义与结果援引如下。

设已给驻定方程组：

$$(E)\qquad \frac{dx_i}{dt}=X_i\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

其中

$$X_i\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\ \epsilon C^1[-\infty<x_i<+\infty],\ (i=1,2,\cdots,n)$$

且

$$X_i\ (0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=0\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

定义 1 若组 (E) 的零解在ляпунов意义下稳定[4]，而其他的任意解 $x_i(t)$ 具有性质：

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t)=0\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots n)$$

则称组 (E) 的零解是全局渐近稳定的。

定义 2 若函数 V (x_1, x_2, $\cdots$, x_n) 是定正的，且

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\infty,\quad \left(\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

则称函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为定正无限大。

对组 (E) 的零解的全局渐近稳定性问题，Е. А. Барбашин[1] 曾得如下结果：

引理 1 若存在无限大的定正函数$V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$及点集M，使其沿组（E）的导数$\frac{dV}{dt}$具有如下性质：

$$\frac{dV}{dt}<0, \qquad \text{当点}\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \notin M$$

$$\frac{dV}{dt}\leqq 0, \qquad \text{当点}\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in M$$

且点集M具有这样的性质：在M与$V(x_1, x_2, \cdots, x_n)=C\neq 0$的任何交集中不含组（$E$）的正半轨道（原点除外），则组（$E$）的零解 $x_i=0$ （$i=1, 2, \cdots, n$）全局渐近稳定。

引理 2 若存在无限大的定正函数V（$x_1, x_2, \cdots, x_n$），使其沿组（E）的导数$\frac{dV}{dt}$定负，则组(E)的零解 $x_i=0$ ($i=1, 2, \cdots n$) 全局渐近稳定。

下面我们根据 E. A. Барбашин 的上述结果，研究组（1）、（2）、（3）和（4）的零解的全局渐近稳定性问题。我们证明以下定理成立。

定理 1 设组（1）中之 $f_i(x)\in C[-\infty<x<+\infty]$, $(i=1, 2, 3, 4)$； $g_2(y)\in C[-\infty<y<+\infty]$，且 $f_1(o)=f_3(o)=0$， $g_2(o)=0$。$f_i(x)\neq 0$，
$(-\infty<x<+\infty)$，$(i=2, 4)$。

令
$$h_j(x)=\frac{f_j(x)}{x}, \quad (x\neq 0,\ j=1,\ 2)$$

若：(1°) $h_1(x)f_4(x)-h_2(x)f_3(x)>0$， $(x\neq 0)$

(2°) $h_1(x)+h_2(x)\left[\int_0^x \frac{f_4(\tau)}{f_2(\tau)}d\tau+g_2(y)-y\right]<0$，$(x\neq 0)$

(3°) $\int_0^{\pm\infty}\frac{f_1(\tau)f_4(\tau)-f_2(\tau)f_3(\tau)}{[f_2(\tau)]^2}d\tau=+\infty$

(4°) $g_2(y)$ 当 y 有界时为有界函数；且当 $y\neq 0$时，$g_2(y)\neq 0$ 则组（1）之零解 $x=y=0$ 全局渐近稳定。

证明：考察函数：

$$V(x, y)=2\int_0^x \frac{f_1(\tau)f_4(\tau)-f_2(\tau)f_3(\tau)}{[f_2(\tau)]^2}d\tau+\left[\int_0^x \frac{f_4(\tau)}{f_2(\tau)}d\tau-y\right]^2$$

由条件（1°）、（3°）知$V(x, y)$为定正无限大。

设组（1）有：

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}\ \frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}$$

$$=2\left\{\frac{f_1(x)f_4(x)-f_2(x)f_3(x)}{[f_2(x)]^2}+\frac{f_4(x)}{f_2(x)}\left[\int_0^x \frac{f_4(\tau)}{f_2(\tau)}d\tau-y\right]\right\}\left[f_1(x)\right.$$

$$\left.+f_2(x)g_2(y)\right]-2\left[\int_0^x \frac{f_4(\tau)}{f_2(\tau)}d\tau-y\right]\left[f_3(x)+f_4(x)g_2(y)\right]$$

$$=2\cdot\frac{f_1(x)f_4(x)-f_2(x)f_3(x)}{[f_2(x)]^2}\left\{f_1(x)+f_2(x)\left[\int_0^x\frac{f_4(\tau)}{f_2(\tau)}d\tau+g_2(y)-y\right]\right\}$$

显然，当 $x=0$ 时， $\frac{dV}{dt}=0$。又由（1°）、（2°）知，当 $x\neq0$ 时，有

$$\frac{dV}{dt}=2x^2\cdot\frac{h_1(x)f_4(x)-h_2(x)f_3(x)}{[f_2(x)]^2}\left\{h_1(x)+h_2(x)\left[\int_0^x\frac{f_4(\tau)}{f_2(\tau)}d\tau+g_2(y)-y\right]\right\}<0$$

取 oy 轴作为点集M，由上述讨论可知：

$$\frac{dV}{dt}<0,\qquad \text{当点}(x,\ y)\notin M$$

$$\frac{dV}{dt}=0,\qquad \text{当点}(x,\ y)\in M$$

又由（4°）可知，在 oy 轴上除原点外不含组（1）的任何正半轨道，则据引理1知组（1）的零解 $x=y=0$ 全局渐近稳定。

容易看出，当令 $g_2(y)\equiv y$ 时，由定理1即得谷超豪[1]的相应的定理。

定理 2 设组（2）中之 $f_i(x)\in C[-\infty<x<+\infty]$，$(i=1,2,3,4)$；$g_j(y)\in C[-\infty<y<+\infty]$，$(j=2,4)$，且 $f_1(o)=f_3(o)=0$，$g_2(o)=g_4(o)=0$。$f_i(x)\neq0$，$(-\infty<x<+\infty)$，$(i=2,4)$。

若：（1°） $\int_0^x f_1(\tau)d\tau>0$，$(x\neq0)$， $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\int_0^x f_1(\tau)d\tau=+\infty$

（2°） $\int_0^y g_4(\tau)d\tau>0$，$(y\neq0)$， $\lim\limits_{|y|\to+\infty}\int_0^y g_4(\tau)d\tau=+\infty$

（3°） $[f_1(x)]^2+f_4(x)[g_4(y)]^2+f_1(x)f_2(x)g_2(y)+f_3(x)g_4(y)<0$ $(x^2+y^2>0)$，

则组（2）之零解 $x=y=0$ 全局渐近稳定。

证明：考察函数：

$$V(x,y)=\int_0^x f_1(\tau)d\tau+\int_0^y g_4(\tau)d\tau$$

由（1°）、（2°）知$V(x,y)$是定正无限大。

沿组（2）有：

$$\frac{dV}{dt}=f_1(x)[f_1(x)+f_2(x)g_2(y)]+g_4(y)[f_3(x)+f_4(x)g_4(y)]$$

$$=[f_1(x)]^2+f_4(x)[g_4(y)]^2+f_1(x)f_2(x)g_2(y)+f_3(x)g_4(y)<0$$

$$(x^2+y^2<0)$$

则据引理2知组（2）之零解 $x=y=0$ 全局渐近稳定。

推论 1 若将定理2中的条件（2°）、（3°）分别改为：

$$(2^\circ)' \quad \int_0^y g_4(\tau)d\tau<0,\ (y\neq 0),\quad \lim_{|y|\to+\infty}\int_0^y g_4(\tau)d\tau=-\infty$$

$$(3^\circ)' \quad [f_1(x)]^2-f_4(x)[g_4(y)]^2+f_1(x)f_2(x)g_2(y)-f_3(x)g_4(y)<0 \quad (x^2+y^2>0)$$

则定理 2 之结论显然仍成立。

推论 2 若将定理 2 中的条件（1°)、(3°) 分别改为：

$$(1^\circ)' \quad \int_0^x f_1(\tau)d\tau<0,\ (x\neq 0),\quad \lim_{|x|\to+\infty}\int_0^x f_1(\tau)d\tau=-\infty$$

$$(3^\circ)' \quad f_4(x)[g_4(y)]^2-[f_1(x)]^2-f_1(x)f_2(x)g_2(y)+f_3(x)g_4(y)<0 \quad (x^2+y^2>0)$$

则定理 2 之结论显然仍成立。

推论 3 若将定理 2 中的条件（1°)、(2°)、(3°) 分别改为：

$$(1^\circ)' \quad \int_0^x f_1(\tau)d\tau<0,\ (x\neq 0),\quad \lim_{|x|\to+\infty}\int_0^x f_1(\tau)d\tau=-\infty$$

$$(2^\circ)' \quad \int_0^y g_4(\tau)d\tau<0,\ (y\neq 0),\quad \lim_{|y|\to+\infty}\int_0^y g_4(\tau)d\tau=-\infty$$

$$(3^\circ)' \quad [f_1(x)]^2+f_4(x)[g_4(y)]^2+f_1(x)f_2(x)g_2(y)+f_3(x)g_4(y)>0 \quad (x^2+y^2>0)$$

则定理 2 之结论显然仍成立。

容易看出，当令 $g_2(y)\equiv g_4(y)\equiv y$ 时，由定理 2 也可得谷超豪[2]的相应的定理；而令 $f_2(x)\equiv f_4(x)\equiv 1$ 时，由定理 2 还可得张炳根[3]的相应的定理。

定理 3 设组（3）中之 $f_i(x)\epsilon C[-\infty<x<+\infty]$，$(i=1,2,3,4)$；$g_2(y)\epsilon C[-\infty<y<+\infty]$，且 $f_1(o)=f_3(o)=0$，$g_2(o)=0$；$f_i(x)\neq 0$，$(-\infty<x<+\infty)$，$(i=2,4)$。

若：$$(1^\circ) \quad \int_0^x f_1(\tau)d\tau>0,\ (x\neq 0),\quad \lim_{|x|\to+\infty}\int_0^x f_1(\tau)d\tau=+\infty$$

$$(2^\circ) \quad \int_0^y g_2(\tau)d\tau>0,\ (y\neq 0),\quad \lim_{|y|\to+\infty}\int_0^y g_2(\tau)d\tau=+\infty$$

$$(3^\circ) \quad \{[f_1(x)]^2+f_3(x)g_2(y)\}y+f_4(x)[g_2(y)]^2+f_1(x)f_2(x)g_2(y)<0 \quad (y\neq 0)$$

则组（3）之零解 $x=y=0$ 全局渐近稳定。

证明：考察函数：

$$V(x,y)=\int_0^x f_1(\tau)d\tau+\int_0^y g_2(\tau)d\tau$$

仿定理 2 据引理 2 证之，

显然，定理3亦有类似于定理2的推论，为简单起见，我们就不再一一赘述了。

另外，容易看出，若令 $g_2(y)\equiv 1$，由定理3也可得谷超豪[2]的相应的定理。

定理 4 设组（4）中之 $f_i(x)\in C[-\infty<x<+\infty]$，$(i=1,2,3,4)$；
$g_j(y)\in C[-\infty<y<+\infty]$，$(j=1,2,3,4)$，且 $f_1(o)=f_3(o)=0$，
$g_2(o)=g_4(o)=0$，$f_i(x)\neq 0$，$(-\infty<x<+\infty)$，$(i=2,4)$。

若：(1°) $\int_0^x f_1(\tau)d\tau>0$，$(x\neq 0)$，$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\int_0^x f_1(\tau)d\tau=+\infty$

(2°) $\int_0^y g_4(\tau)d\tau>0$，$(y\neq 0)$，$\lim\limits_{|y|\to+\infty}\int_0^y g_4(\tau)d\tau=+\infty$

(3°) $[f_1(x)]^2g_1(y)+f_4(x)[g_4(y)]^2+f_1(x)f_2(x)g_2(y)+$
$+f_3(x)g_3(y)g_4(y)<0 \qquad (x^2+y^2>0)$

则组（4）之零解 $x=y=0$ 全局渐近稳定。

证明：考察函数：

$$V(x,y)=\int_0^x f_1(\tau)d\tau+\int_0^y g_4(\tau)d\tau$$

仿定理2据引理2证之，

不难看出，当令 $g_1(y)\equiv g_3(y)\equiv 1$，$g_2(y)\equiv g_4(y)=y$，由此定理也可得谷超豪[2]的相应的定理；同样，若令 $g_1(y)\equiv g_3(y)\equiv 1$，$f_2(x)\equiv f_4(x)\equiv 1$，由此定理还可得张炳根[3]的相应的定理。

参 考 文 献

[1] Е. А. Барбашин И Красовский：Об Устойцвости Дбижения В Челом. Д. А. Н. СССР 1952，ТОМ LXXXVT，№3. P.453—456.

[2] 谷超豪，二阶非线型方程稳定性问题的一解，数学学报，1954，4卷3期，P.347—354.

[3] 张炳根，二阶常微分方程组的解的全局稳定性，数学学报，1959，9卷4期，P.442—444.

[4] Г.Н. 杜波兴，运动稳定性理论的基础，俞玉森，陆博务译，高教出版社，1959年。