

# 状态参量与砂土剪胀性判别方法

王运霞<sup>1,2</sup>, 赵成刚<sup>1</sup>

(1. 北京交通大学 土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 北方工业大学 建筑工程学院, 北京 100044)

**摘要:** 论述了砂土剪胀性特点和状态参数概念. 通过对现有试验结果的对比分析, 建立了相变线的概念, 提出了相变孔隙比和相变应力比的定义和计算公式. 提出了状态参量的计算公式和依据状态参量判别砂土剪胀(缩)的具体方法, 并建立了砂土的剪胀比计算公式. 为建立砂土本构模型提供依据.

**关键词:** 砂土; 剪胀性; 状态参量; 相变线; 剪胀比

**中图分类号:** TU 43

**文献标志码:** A

**文章编号:** 0254-0037(2011)05-0718-06

砂土在剪应力的作用下会产生体积膨胀, 这一现象最早是由英国学者 O. Reynolds<sup>[1]</sup> (1885 年) 发现的. 这一现象与正常固结黏土相比有很大区别. 剪胀性定义为砂土在剪应力作用下体积发生膨胀或者减小的现象<sup>[2]</sup>. 通常将剪切引起的体积膨胀称为剪胀(dilatancy), 体积减小称为剪缩或者负的剪胀(negative dilatancy)<sup>[2]</sup>. Taylor<sup>[3]</sup> (1948 年) 针对密实砂土讨论了剪胀对于抗剪强度的影响, 并用咬合(interlocking)来描述剪胀效应. Thuraiajah<sup>[4]</sup> (1961 年) 通过一系列排水与不排水的三轴试验, 用三轴试验标准术语来描述砂土的体胀(也包括体缩)的影响. Rowe<sup>[5]</sup> (1962 年) 提出体胀与主应力比的关系方程, 即剪胀方程是构成砂土弹塑性本构模型的基本关系式.

以临界状态线作为参照线描述砂土的状态参数, 可能会导致不能如实准确描述具有剪胀特性的砂土变形的全过程. 本文结合国内外试验结果, 提出了相变线的概念, 以此为参照标准, 提出了状态参量的新概念, 建立了剪胀比的计算公式, 可以较好地描述砂土在各种应力路径下的体积变化特性.

## 1 剪胀方程和状态参数

通常剪胀方程的基本形式为<sup>[5]</sup>

$$d = (\eta, c) \quad (1)$$

式中,  $d$  为剪胀比, 它是塑性体应变增量与塑性剪应变增量的比值;  $c$  为土的内部材料常数;  $\eta$  为应力比,  $\eta = q/p$ , 也有学者把剪胀方程表示为

$$d = \eta - M \quad (2)$$

式中  $M$  为达到临界状态线(CSL)时的应力比值.

利用式(2)建立土的本构模型时, 就正常固结黏土而言取得了较好的模拟效果; 但对于砂土, 其模拟效果并不理想. 产生这种状况的主要原因是, 对于正常固结土, 它的体变趋势是单向的(不断剪缩). 因此, 当应力比  $\eta$  等于常量时, 其孔隙比  $e$  和  $p'$  的关系是唯一的. 而对于砂土, 当应力比  $\eta$  等于常量时,  $e$  和  $p'$  的关系不唯一. 当砂土处于密实状态时, 在一定的  $\eta$  条件下,  $e$  随剪应力的变化有变大的趋势(体胀). 而对同样的砂土当它处于很松的状态时, 尽管  $\eta$  值仍与前述密实砂土的相同, 但  $e$  却随剪应力的变化有变小的趋势(体缩). 也就是说砂土的剪胀比  $d$  值不但依赖于  $\eta$ 、 $p'$  和材料常数  $c$ , 而且还依赖于它的松密状态, 式(2)不适合模拟砂土.

收稿日期: 2009-01-03.

基金项目: 北京市教委科技发展计划项目资助(KM200910009008).

作者简介: 王运霞(1967—), 女, 山西运城人, 副教授, 博士生.

就如何判断具有不同密实程度(即不同状态)的砂土在剪切应力作用下其体积变化的趋势(即剪胀还是剪缩), Been 等<sup>[6]</sup>引入“状态参数”(state parameter)  $\psi$  作为描述砂土松密程度的度量

$$\psi = e - e_c \tag{3}$$

式中,  $e$  为当前状态孔隙比或初始孔隙比;  $e_c$  为与  $e$  具有相同平均有效应力  $p'$  的位于临界状态线(CSL)上的孔隙比(称为临界状态孔隙比)如图1所示。

Bolton<sup>[7]</sup>提出了“相对剪胀指标”(relative dilatancy index)  $I_R$ , 该指标综合反映了孔隙比和平均有效应力对状态的影响. Ishihara<sup>[8]</sup>提出了“状态指标”(state index)  $I_s$ , 这一指标除能反映临界状态以外, 还可以反映准稳态和特别松散砂土稳态强度为零的特点。

这些方法都是以  $e - p'$  (或  $e - \ln p'$ ) 平面上的临界状态线(CSL)为参照而建立的。

文献[9]指出, 当砂土处于临界状态时它既不剪胀也不剪缩, 此时剪胀比  $d = 0$ 。文献[10-12]均以图1中的 CSL 作为划分砂土在剪应力作用下处于剪胀还是处于剪缩状态的判别线。当砂土位于 CSL 上方, 此时  $e > e_c$ , 按照式(3)  $\psi > 0$ , 表明砂土处于疏松状态, 它在剪应力的作用下将剪缩。当砂土位于 CSL 线的下方, 此时  $e < e_c$ , 则  $\psi < 0$ , 表明砂土处于密实状态, 它在剪切应力作用下将剪胀。以 CSL 作为砂土松密程度的划分标准没有包含相变状态, 介于剪缩和剪胀之间的特殊状态。比如中等密实的砂土, 由初始状态发展到最后的临界状态而破坏, 其应力路径并非直接达到临界状态, 而是先经过相变状态发展到临界状态。当砂土先由初始状态向相变状态过渡时, 这一过程砂土表现为体积减小, 即剪缩; 而后再由相变状态继续变形到达临界状态, 这一过程砂土表现为体积增大, 即剪胀。所以对于这种状态的砂土, 如果用 CSL 作为判别线来判断体变趋势, 按照式(3), 当前点必定落在 CSL 的下方, 结论是密砂, 体变趋势必然只有剪胀这个结果。显然这个结果没有反映出砂土先由当前状态到相变状态, 再由相变状态到临界状态的变形规律和变形过程。因此, 如果在初始状态时欲判断砂土的松密程度, 并依据其松密程度判断砂土下一步的体变趋势, 应该以相变状态作为划分砂土松密程度的分界点才比较符合实际。对于特别密实的砂土, 由初始状态发展到最后的临界状态而破坏, 其应力路径也是要先经过相变状态然后才能发展到临界状态, 也要经过剪缩和剪胀 2 个变化阶段, 只是砂土的密实度越大, 剪缩过程就越短, 在达到相变前的体积减小也就越不明显。

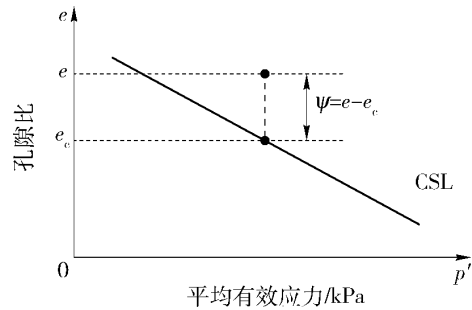


图1 状态参数的定义

Fig. 1 The concept of state parameter

## 2 相变状态特性

Ishihara 等<sup>[13]</sup>提出, 当平均有效应力  $p'$  不变时, 砂土在剪应力的作用下由体缩转变到体胀的界限状态。在相变状态点上砂土的体积变化为 0。Ishihara<sup>[8]</sup>给出了砂土在不排水条件下的三轴试验应力-应变曲线如图2所示。从理论上讲, 不论是松砂还是密砂在剪应力作用下开始时它总是剪缩的。松砂与密砂,

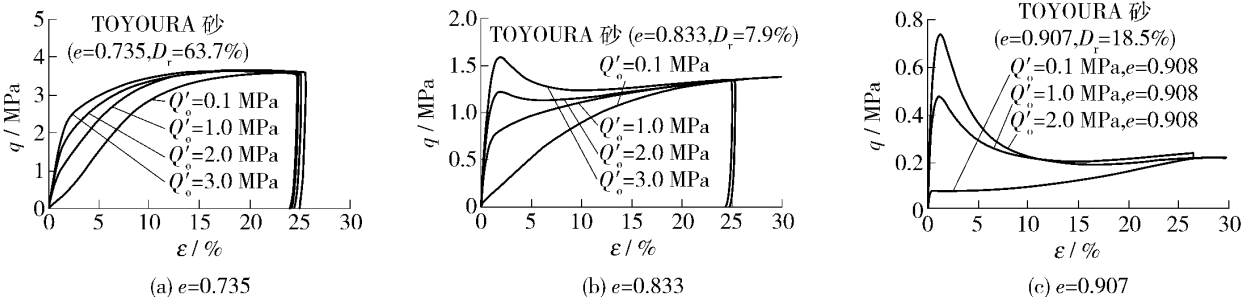


图2 不排水应力-应变曲线

Fig. 2 Undrained triaxial tests for  $e = 0.735$

由于其初始状态不同,在剪切过程中体变规律的区别主要表现为密砂的剪缩过程较短(越密实,其剪缩过程越短),到达相变状态点后,开始转入剪胀阶段,最后达到临界状态而破坏;而松砂的剪缩过程较长(越疏松,其剪缩过程越长),达到相变状态点后,剪缩过程消失,进入剪胀阶段,最后达到临界状态而破坏.很松散的砂土的相变状态实际上已趋近或等于临界状态.对于密砂,其相变状态较为明显;而很疏松的砂土,相变状态已经与临界状态重合.

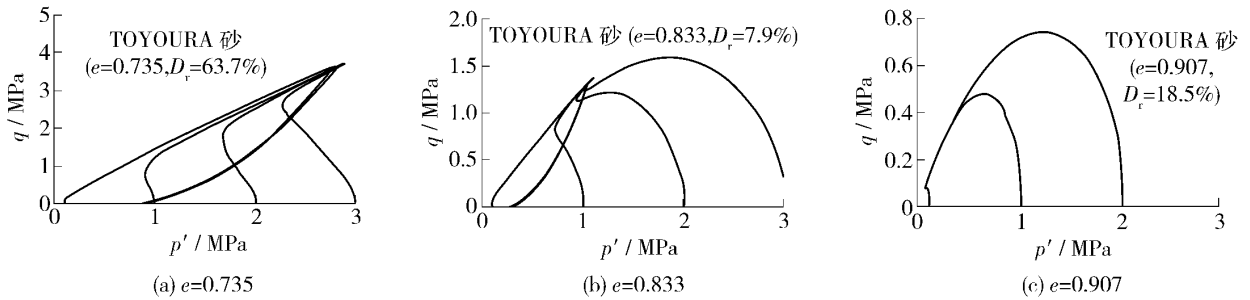


图3 不排水有效力路径

Fig. 3 Undrained triaxial tests for  $e = 0.833$

有效力路线是从初始状态开始,先经过相变状态后才到达临界状态,随着砂土初始孔隙比的增大,相变状态时的应力比  $\eta_p = (q/p)'_p$  会逐渐趋近于临界状态应力比  $M$ ,对于特别松散的砂土,其相变应力比达到临界状态应力比,即  $\eta_p = M$ ,如果保持孔隙比不变,当平均有效应力  $p'$  增加时,相变状态应力比  $\eta_p$  会逐渐趋近于临界状态应力比  $M$ ,有效力路径如图3所示.砂土受力达相变线时剪胀比  $d = 0$ 、体应变增量  $d\varepsilon_v = 0$ 、应力比等于相变应力比,即  $\eta = \eta_p$ .

### 3 相变线和状态参量

Yoshimine 等<sup>[14]</sup>给出几组关于相变状态线的试验结果,如图4所示.在  $e - p'$  坐标平面中,不同  $p'$  下的相变状态点与它所对应的孔隙比近似成线性关系.本文假定不同的平均应力  $p'$  和与该  $p'$  值的相变状态点所对应的孔隙比  $e_p$  (即相变孔隙比)为线性关系,把相变孔隙比和相应有效应力之间的关系曲线定义为相变状态线,简称相变线(phase transformation line,记为PTL).以相变线作为判断砂土松密程度的基本标准参照线,即

$$\xi = \frac{e(p')}{e_p(p')} \quad (4)$$

式中,  $e$  为当前状态孔隙比或初始孔隙比,它是平均有效应力  $p'$  的函数;  $e_p$  是与  $e$  具有相同  $p'$  值的位于相变线上的孔隙比,即相变状态孔隙比.

状态参量的物理意义在于它以相变状态孔隙比为参照标准,以一个比值来表示土所处的状态.状态参量表明了当前状态点到相变线的远近,综合考虑了应力水平和材料状态的影响.当应力点位于 CSL 上方(此时自然也位于 PTL 上方)时,表明土状态松散,在剪应力作用下体积将缩小即剪缩.距离 CSL 越远,土就越松散,剪缩量也就越大;当应力点位于 PTL 和 CSL 之间时,土体在剪应力作用下将发生先剪缩至 PTL 后再剪胀至 CSL 线而达到极限的体变规律.距

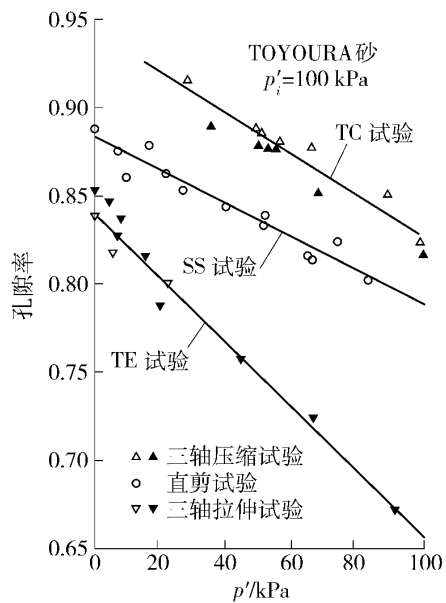


图4 相变点的  $p'_{pr}$  与  $e$  的关系

Fig. 4 The relation of effective mean principal stress at phase transformation  $p'_{pr}$  and void ratio

离 PTL 越近, 剪缩量就越小. 利用状态参量的概念可以准确判断砂土在初始时刻和任意时刻的剪胀趋势.

当  $e > e_c$  时, 表明应力点位于 CSL 上方, 砂土状态比较松散, 加荷后土样直接剪缩至临界状态, 达到极限. 所以对于松砂, 其相变孔隙比  $e_p$  接近临界孔隙比  $e_c$ , 特松散的砂土, 不存在相变状态,  $e_p$  和  $e_c$  相等.

当  $e = e_c$  时, 表明砂土初始状态恰好落在 CSL 上. 但这并不表示土样已经达到临界状态, 此时塑性应变还没有发生. 施加剪应力后土样先发生体缩, 达到相变线 PTL, 此时  $\xi = 1.0$ . 随后开始发生体胀即  $\xi > 1.0$ , 再次回到 CSL 时, 才达到临界状态, 满足条件  $\eta = M$ 、剪胀比  $d = 0$ 、 $d\varepsilon_v^p = 0$  和  $d\varepsilon_v = 0$ , 但是  $d\varepsilon_v^p > 0$ .

当  $e_p < e < e_c$  时, 表明应力点位于 PTL 和 CSL 之间(如图 5 所示), 土样处于中密至密实状态. 加荷后土样先剪缩达到 PTL, 此时  $\xi = 1.0$ , 之后开始剪胀, 到达 CSL 时发生破坏, 此时  $e = e_c$ .

当  $\xi = 1.0$  时, 表明土样非常密实, 应力点恰好落在 PTL 上, 加荷后, 土样直接发生剪胀,  $\xi > 1.0$ , 到达 CSL 时发生塑性流动, 达到极限. 图 5 利用相变线和临界状态线把  $e - \ln p'$  平面划分为 2 个区域, 临界状态线以上为剪缩区; 临界状态线和相变线之间为先剪缩后剪胀区. 对于所能获得的某一种砂土的相变线而言, 究其物理含义, 砂土不可能存在  $e < e_p$  即  $\xi < 1.0$  的实际状态. 因为相变孔隙比  $e_p$  是在某级荷载  $p'$  下的砂土的最密实状态时的孔隙比. 实际的同一类砂土试样只可能比这一状态松, 而不会更密, 充其量等于这一状态的密实度. 所以相变线的意义还在于定义了砂土在某一应力水平条件下的可能的应力状态的下限. 鉴于上述的分析, 本文提出的式(4)适用范围是  $\xi \geq 1.0$ .

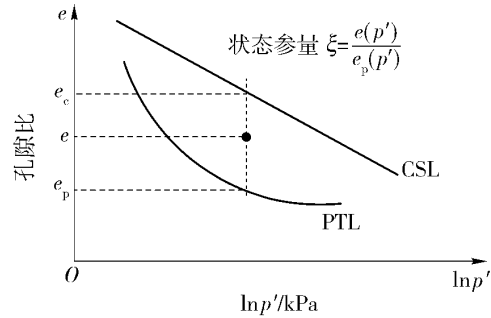


图 5 本文对状态参量的定义  
Fig. 5 The concept of state parameter in this paper

状态参量  $\xi$  以相变状态作为判断砂土在初始阶段时的体变趋势更符合实际情况, 相变线可以在实验室内通过常规三轴试验或其他实验手段确定,  $\xi$  为相对比值, 由它可知观测点与相变线的远近程度, 从而可以比较准确地判断观测点的体积变化趋势, 在建立方程时采用无量纲量会给计算和比较带来方便.

### 4 本文建议的相关表达式

1) 相变线在  $p - q$  平面上

在  $p - q$  平面上, 相变线应该位于临界状态线的下方, 并且通过原点, 假设为

$$q = M_{pT} p' \tag{5}$$

式中  $M_{pT}$  为相变应力比, 与状态参量无关.

$$M_{pT} = M e^k \tag{6}$$

式中,  $M$  为临界状态应力比;  $k$  为材料常数. 对于特别松散的砂子, 临界状态  $k = 0$ , 式(5)变为

$$q = M p' \tag{7}$$

根据式(6)有

$$k = \ln M_{pT} - \ln M \tag{8}$$

对于各种密度的砂子,  $M \geq M_{pT}$ , 可见  $k$  是一个非正的常数,  $k \leq 0$ .

2) 临界状态线在  $e - p'$  平面上

由临界土力学的知识可知, 一般土的临界状态孔隙比的经典计算公式为

$$e_c + 1 = \Gamma - \lambda \ln(p'/p_a) \tag{9}$$

其中  $\Gamma$  和  $\lambda$  为无量纲的材料常数;  $p_a$  为单位大气压;  $p'$  表示平均有效应力. 本文采用式(9)作为计算  $e_c$  的依据.

3) 相变线在  $e - p'$  平面上

由文献[14]可知, 在  $e - p'$  平面上, PTL 近似为一条直线. 假设相变孔隙比

$$e_p = N - \kappa(p'/p_a) \quad (10)$$

式中,  $N$  和  $\kappa$  为无量纲的材料常数;  $p_a$  和  $p'$  同上. 式(10)中包含了砂土的应力水平对  $e_p$  的影响. 同一类砂土, 在同一级应力水平下其  $e_p$  值相同.

#### 4) 剪胀方程

参考文献[10], 考虑把状态参量引入剪胀方程, 建议剪胀比计算表达式为

$$d = (\eta, c, \xi) = \left( e^{k\xi} - \frac{\eta}{M} \right) \quad (11)$$

式中,  $M$ 、 $\eta$ 、 $k$ 、 $\xi$  含义同前.  $\xi$  按照式(4)计算.

当  $e = e_p$  时, 应力点落在相变线上,  $\xi = 1$ , 变形特点是既不剪胀也不剪缩, 剪胀比应该为零. 按照(6)式和式(10), 计算的剪胀比的确等于0, 即

$$d = e^{k\xi} - \frac{\eta}{M} = e^k - \frac{M_{pT}}{M} = 0 \quad (12)$$

此时如果加荷, 试样直接发生剪胀, 直到达到临界状态而破坏. 在这一过程中,  $\xi > 1.0$ , 而剪胀比应该小于0. 由于应力比在此阶段一直小于临界应力比而大于相变应力比, 所以

$$d = \left( e^{k\xi} - \frac{\eta}{M} \right) < \left( e^k - \frac{M_{pT}}{M} \right) = 0 \quad (13)$$

$\eta = M_{pT}$  时,  $\xi = 1.0$ , 即  $d < 0$ , 发生剪胀.

当  $e = e_c$  时, 应力点落在 CSL 线上,  $\eta = M$ , 特点也是既不剪胀也不剪缩.

此时  $d = \left( e^{k\xi} - \frac{\eta}{M} \right) = (e^{0 \cdot \xi_c} - 1) = 0$   $e = e_c$  时,  $k = 0$ , 即  $d = 0$ , 既不剪胀也不剪缩.

当  $e_p < e < e_c$  时, 应力点位于 CSL 之下方 PTL 之上方, 此时对于剪胀比的分析判断分两个阶段进行:

第 I 阶段 从当前点到相变点的过程, 即  $e \rightarrow e_p$ , 此时  $1 < \xi$ , 处于剪缩过程.

$$d = e^{k\xi} - \frac{\eta}{M} > e^{k\xi} - \frac{M}{M} = e^{0 \cdot \xi_c} - 1 = 0$$

即  $d > 0$ , 可见, 砂土处于剪缩状态.

第 II 阶段 从相变点到临界状态点的过程, 即  $e_p \rightarrow e_c$ , 处于剪胀过程. 根据(12)式, 结论成立. 在此阶段  $\eta > M_{pT}$ , 所以有  $\frac{\eta}{M} > \frac{M_{pT}}{M}$ .

可见式(11)是一个综合考虑了应力水平和状态参量影响的剪胀比表达式, 能够满足各种应力状态的需要, 能够判断任意点所处的剪切状态. 配合  $\xi$  的大小和范围, 可以预测下一步的体变趋势.

## 5 结论

1) 土体在整个加载过程中体积的变化是先经过相变点, 然后才向临界状态方向变化. 初始变形阶段(达相变点前的阶段), 其体积变形表现为压缩; 从相变点到临界状态变形阶段, 其体积变形表现为膨胀.

2) 以临界状态作为参考状态建立起判断体胀或体缩的准则, 这与实际变形过程之间存在一定的误差, 当相变线与临界状态线比较接近时, 例如松砂, 其误差不大. 但当相变线与临界状态线相差较大时, 例如中密砂和密砂, 其误差就会较大.

3) 本文建立的状态参量概念, 可以较为准确地反映土体积变化的全过程. 以此为基础建立土的本构模型能真实地反映土的体积先剪缩后剪胀的变化过程和变形特点.

4) 本文建立的剪胀比计算公式, 可以描述剪缩和剪胀 2 种体积变形过程.

#### 参考文献:

- [1] REYNOLDS O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact with experimental illustrations [J]. Phil. Mag, 1885, 20(2): 469-482.

- [2] 张建民. 砂土的可逆性和不可逆性剪胀规律[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(1): 12-17.  
ZHANG Jian-min. Reversible and irreversible dilatancy of sand [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22(1): 12-17. (in Chinese)
- [3] TAYLOR D W. Fundamentals of soil mechanics [M]. New York: Wiley, 1948: 137-234.
- [4] THURAIRAJAH A. Some properties of kaolin and of sand [D]. PhD thesis, the Cambridge School of Technology, Cambridge University, 1961: 13-407
- [5] ROWE P W. The stress—dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact [M]. London: London Ser. A., 1962, 269: 500-527.
- [6] BEEN K, JEFFERIES M G. A state parameter for sands [J]. Geotechnique, 1985, 35(2): 99-112.
- [7] BOLTON M. The strength and dilatancy of sands [J]. Geotechnique, 1986, 36(3): 211-214.
- [8] ISHIHARA K. Liquefaction and flow failure during earthquakes [J]. Geotechnique, 1993, 43(3): 351-415.
- [9] ATKINSON J H, BRANSBY P L. The mechanics of soils [M]. London: McGraw-Hill, 1978: 25-55.
- [10] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils [J]. Geotechnique, 2000, 50(4): 449-460.
- [11] LI X S. A sand model with state-dependent dilatancy [J]. Geotechnique, 2002, 52(3): 173-186.
- [12] WAN R G, GUO P J. A pressure and density dependent dilatancy model for granular materials [J]. Soils and Foundations, 1999, 39(6): 1-11.
- [13] ISHIHARA K, TATSUOKA F, YASUADA S. Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stress [J]. Soils Found, 1975, 15(1): 29-44.
- [14] YOSHIMINE M, ROBERTSON P K, AND C E. ( FEAR) WRIDE. Undrained shear strength of clean sands to trigger flow liquefaction [J]. Can Geotech J, 1999, 36(4): 891-906.
- [15] MANZARI M T, DAFALIAS Y F. A critical state two-surface plasticity model for sands [J]. Geotechnique, 1997, 47(2): 255-272.
- [16] 罗刚, 张建民. 考虑物态变化的砂土本构模型 [J]. 水利学报, 2004, 35(7): 26-31.  
LUO Gang, ZHANG Jian-min. Constitutive model for sand considering the variation of its physical state [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, 35(7): 26-31. (in Chinese)

## State Parameter and the Differentiation Method of Sands Dilatancy

WANG Yun-xia<sup>1,2</sup>, ZHAO Cheng-gang<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China;

2. College of Architectural Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

**Abstract:** The characters of dilatancy of sands and the concept of the state parameter were discussed. By means of the comparative analysis of experimental results, the concept of phase transformation line was established. Phase transformation void ratio and phase transformation stress ratio were put forward. State parameter computing formula and a specific method for differentiating sands dilatancy according to state parameter were posed. A kind of method for computing sands dilatancy ratio was established. All of these research would help to provide foundation for creating sands constitutive model.

**Key words:** sand; dilatancy; state parameter; phase transformation line; dilation rate

(责任编辑 张士瑛)