

形位误差的最小二乘评定法及其电算

王永波 卓兴仁

(机械工程系)

摘 要

本文叙述了以最小二乘法评定形位误差的特点,提出了各有特点的两种“最小二乘”形位误差解算方法,即线性化逐次迭代法和优化方法(模式搜索法),所编制的电算程序经实测计算表明结果精确而快捷。本文还提出了一个新的评定指标:“最小二乘”均方误差,并对其作了初步的阐述和比较。

The least squares evaluation method for form and position errors and the Calculation by computer

Wang Yong-po Zhuo Xing-ren

Abstract

This paper describes the characteristics which evaluate the form and position errors by least squares method. It proposes two calculation methods about form and position errors of “the least squares method”. That is linearization, successive iteration and method of optimization (mode search method). The programmings are shown that the calculation is accurate enough and the operation is fast. It also proposes and explains a new evaluating index—errors of “least squares” root-mean square.

本文于1980年9月2日收到。

一、引 言

最小二乘法在计量学中有着越来越广泛的应用。在形位误差方面，日前在一些带电子计算机的圆度仪上已有实际应用，但在其它项目上的应用还很少。本文将探讨用最小二乘法来评定和计算各项形位误差。

形状误差是实际形状对理想形状的变动量。由于对理想形状相对于实际形状的位置规定的方法不同，因而就产生不同的评定方法。国家标准规定按“最小条件”来评定形状误差。按“最小条件”评定具有获得唯一最小误差值的特点，但有时从零件功能要求出发，需要用最小二乘评定法或其它评定法来评定形状误差。此时按国家标准规定应在设计时给定某一种检测方案，且该误差值的评定和仲裁均以给定的检测方案所体现的评定方法为准。另就最小条件评定法可得唯一最小误差值的特点来说，似有某些例外。经我们的计算，在求轴线任意方向直线度误差时，所算的一例按“最小条件”其值不是最小，而“最小二乘”误差值反而更小（见本文计算实例）。这是由于“最小条件”和“最小二乘”两种评定体系所确定的实际轴线不同所致，这一情况对被测要素为轴线的形状和位置误差的评定均可能有所影响。此外，根据检测条件，采用最小二乘等多种评定方法作为最小条件法的近似评定方法，这也是允许的。因此，研究用最小二乘法评定形位误差乃是一件有益的工作。

对各种评定方法的评议，从根本上说应当是以能最可靠地反映零件使用功能的评定方法为最佳。当然，零件的使用功能是多种多样的。而目前关于各种评定方法对零件使用功能反映的可靠程度的研究还不能说已经足够了。从发展的观点看，也要求对多种评定方法进行更深入的研究，以便对比鉴别。因此，探讨用最小二乘法来评定和计算形位误差也是有益的。

二、形位误差和最小二乘法

等精度重复测量的结果表明，测量误差中的随机误差多可采用正态分布规律来描述。在测量所得的一系列测得值中最可靠地反映真值的值称为最佳值，测得值和最佳值之差常称为残差。根据概率的计算，在等精度重复测量所得一系列测得值中，其最佳值应满足

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \min \quad (1)$$

式中： X_i ——测得值（ $i=1, 2, \dots, n$ ）；
 \bar{X} ——最佳值。

(1)式表明，最佳值为使残差平方和为最小的那个值，再以最佳值代替真值计算测量误差，此即为在评定测量误差中所应用的最小二乘原理。

形状误差是实际形状对理想形状的变动量。实际形状对理想形状的偏差是由加工误差和测量误差造成的，在没有显著的系统误差情况下正常地进行加工和测量时，这个偏差就可看成为随机误差。因此，可以用最小二乘原理来确定理想形状相对于实际形状的最佳位置，从而评定形状误差的大小。在形状误差的评定中，理想形状是已知的，由形状误差种类的不同分别为直线、平面、圆、圆柱等。

对各类形状误差，按最小二乘原理确定理想形状相对于实际形状的最佳位置的原则是：

实际形状上各点到理想形状的距离的平方和为最小。根据这一原则建立目标函数，求解目标函数的极小值，即可具体确定理想形状的位置，进而可按最小二乘形状误差的评定指标评定出误差值。

形状误差评定中最小二乘原理的具体应用，以给定平面内的直线度为例，加以说明。

已知实际线（图1）上各被测点坐标值为 (x_i, y_i) ， $i=1, 2, \dots, n$ 。评定该实际线最小二乘形状误差的方法步骤如下：

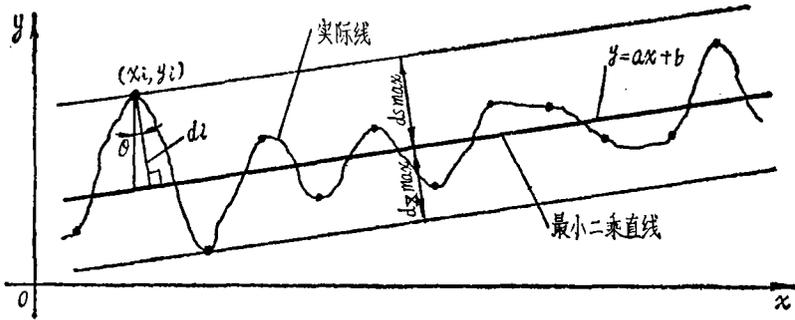


图 1

(一) 按最小二乘原理建立目标函数

以实际线上各被测点到一条直线的垂直距离 (d_i) 的平方和为最小，所求出的这条直线是反映实际线最佳位置的理想直线，称为“最小二乘直线”（图1），其表达式为

$$y = ax + b \quad (2)$$

(2) 式中 a 、 b 系数待定，为一条位置待定的直线。

以所有被测点对 (2) 式这条直线的垂直距离的平方和作为目标函数 S ，则

$$S = \sum d_i^2 = \sum [y_i - f(x_i)]^2 \cos^2 \theta^*$$

因 $\text{tg } \theta = a$ ，则 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ 。

$$S = F(a, b) = \sum [y_i - (ax_i + b)]^2 \left(\frac{1}{1+a^2} \right) \quad (3)$$

(二)、求解目标函数的极值，确定理想形状的位置

根据最小二乘原理，当由 (3) 式解出目标函数 S 为最小时的 a 、 b ，即可确定实际线最佳位置的理想直线即“最小二乘直线”的位置。

当 $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ ， $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$ 时，可得 S_{\min} 值

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a} &= (\sum x_i^2 - \sum y_i^2)a + (\sum x_i y_i)a^2 + (2\sum y_i)ab - (\sum x_i)a^2 b \\ &\quad - nab^2 + (\sum x_i)b - \sum x_i y_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} &= (\sum x_i)a + nb - \sum y_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

* 以 \sum 代替 $\sum_{i=1}^n$ ，下同。

由(4)式解出 a, b

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ b &= \frac{\sum y_i - (\sum x_i)a}{n} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: $A = n \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i$

$B = n \sum x_i^2 - n \sum y_i^2 + (\sum y_i)^2 - (\sum x_i)^2$

$C = \sum x_i \cdot \sum y_i - n \sum x_i y_i = -A$

从(5)式看, a, b 可以有两组根, 一组使 S 值为最小, 另一组则使 S 值很大。取使 S 值为最小的一组根 a, b 代入(2)式, 求得“最小二乘直线”为 $y = ax + b$ 。

(三)、评定实际线的最小二乘形状误差

1. 给定平面内直线度的“最小二乘”误差值 $f_{\text{二乘}}$: 平行于最小二乘直线的包容实际线且距离为最小的二平行直线之间的距离(图1)。

$$f_{\text{二乘}} = d_{s_{\max}} + d_{x_{\max}}$$

式中: $d_{s_{\max}}, d_{x_{\max}}$ ——从最小二乘直线到该线的上面和下面最远被测点的垂直距离。

2. 给定平面内直线度的“最小二乘”均方误差 $\sigma_{\text{二乘}}$ 。国家标准中规定的形状误差值和上述“最小二乘”误差值 $f_{\text{二乘}}$, 其值均仅取决于少数几个最大偏差点, 而未能反映出形状误差曲线的全部特性^[1]。为此, 我们提出另一个误差评定指标 $\sigma_{\text{二乘}}$, 称“最小二乘”均方误差。 $\sigma_{\text{二乘}}$ 是以最小二乘直线为基准的误差值的均方根偏差, 其值为实际线上各点至最小二乘直线的距离平方平均值的平方根:

$$\sigma_{\text{二乘}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum [(y_i - ax_i - b) \cos \theta]^2}{n}}$$

“最小二乘”均方误差的特点在于: $\sigma_{\text{二乘}}$ 和所有被测点有关, 又能偏重于反映较大偏差点的影响, 但不只是由最高、最低点决定其误差值。

上述两项评定指标 $f_{\text{二乘}}$ 和 $\sigma_{\text{二乘}}$, 若评定结果的比值恒定, 则实质上可视为一种评定指标。但根据我们的初步实测统计(见本文应用实例), $f_{\text{二乘}}$ 与 $\sigma_{\text{二乘}}$ 的比值在 2.82~6.04 之间变化, 平均比值为 3.96。这表明 $f_{\text{二乘}}$ 与 $\sigma_{\text{二乘}}$ 的比值有较大幅度的变化。从被测件测得的轮廓图分析, 比值大者其轮廓有局部区域的较大起伏, 比值小者其轮廓各处起伏比较均匀。若有 $f_{\text{二乘}}$ 值相同而 $\sigma_{\text{二乘}}$ 值不同的二个零件, 使用时功能效果是否相同? 有可能出现这种情况: 局部的较大凸起部份在过盈配合中受压变小, 在间隙配合中则磨损较快; 而局部的凹陷部份对配合零件的使用功能影响较小。因而, 在最小二乘形状误差的两种评定指标中, 是否“最小二乘”均方误差能更好地反映误差对零件使用功能的影响, 这是值得进一步探讨试验的一个问题。

曾有人用近似方法求解过理想直线的最佳位置^[2], 其中以 $y_i - f(x_i)$ 代替被测点到最小二乘直线的距离, 这样只能算出近似结果。本文对各项误差的评定都严格按照最小二乘原理, 计算结果以保证达到要求的精度为目标, 计算方法则着眼于电算。这既保证了评定方法的严格和计算结果的精确性, 又是快捷的。从发展的观点看, 这样做是必要的也是可行的。

本文中各实际形状的测量采用所谓布点法，即以有限个测点来代替整个实际形状。测得值的坐标系可以是直角坐标也可以是极坐标。

三、形状误差的最小二乘表达式

根据最小二乘原理，各项形状误差的理想形状的最佳位置按前节所述原则求解，即可得最小二乘平面、空间直线、圆、圆柱（图 2 a、b、c、d）。由最小二乘法的特点可知，所求出的理想形状的最佳位置具有唯一性。

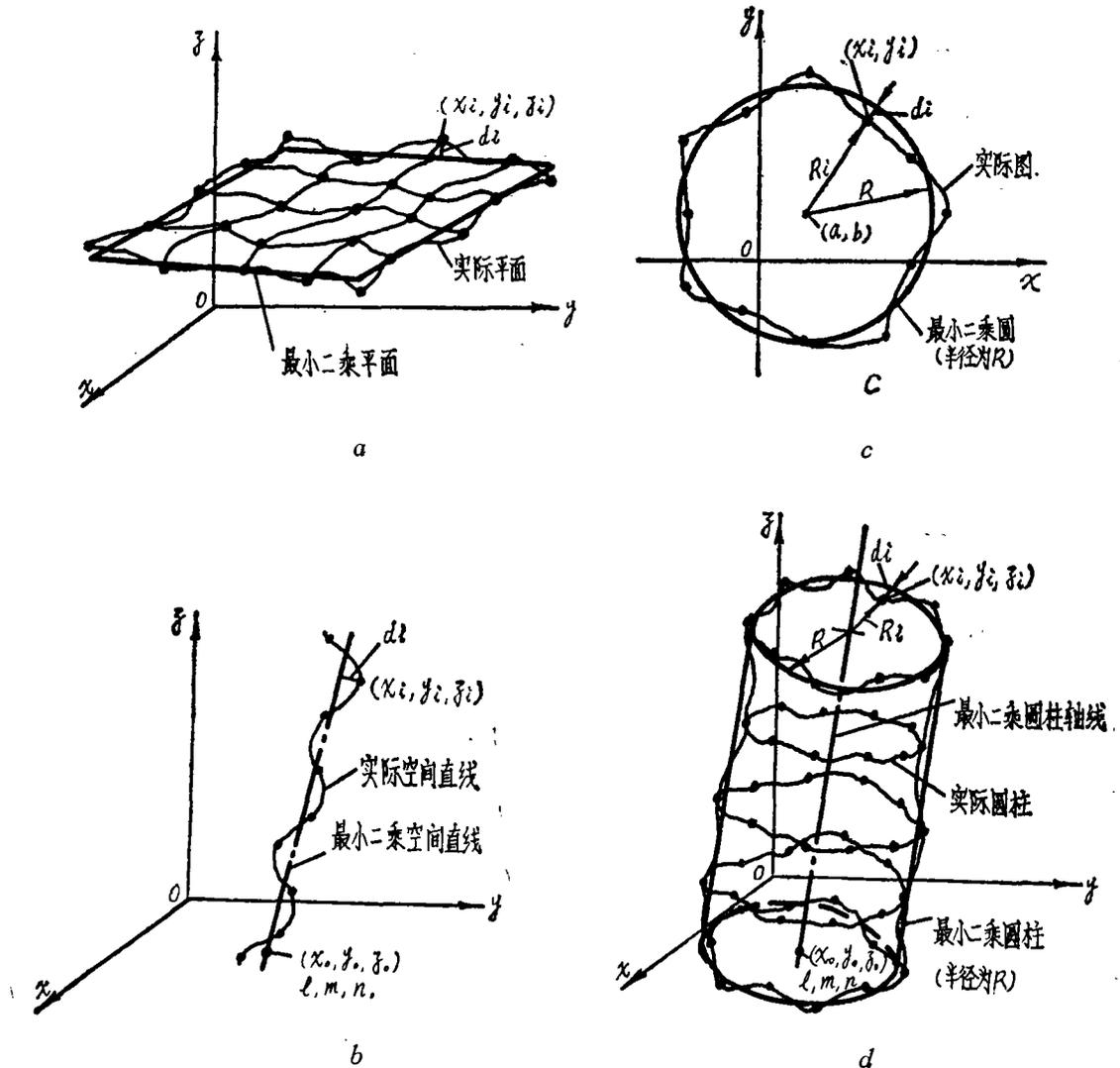


图 2

求解理想形状最佳位置的目标函数为

$$S = \sum d_i^2$$

形状误差种类不同, d_i 的计算式亦不同, 故各形状误差目标函数可具体表示为

平面度:
$$S = F(A, B, C, D) = \Sigma \left(\frac{Ax_i + By_i + Cz_i + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)^2 \quad (6)$$

任意方向直线度:
$$S = F(x_0, y_0, z_0, l, m, n) = \Sigma \left\{ (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2 - \frac{[l(x_i - x_0) + m(y_i - y_0) + n(z_i - z_0)]^2}{l^2 + m^2 + n^2} \right\}$$

圆度:
$$S = F(a, b, R) = \Sigma (R_i - R)^2 = \Sigma (\sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - R)^2$$

圆柱度:
$$S = F(x_0, y_0, z_0, l, m, n, R) = \Sigma (R_i - R)^2 = \Sigma \left\{ \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} - \frac{[l(x_i - x_0) + m(y_i - y_0) + n(z_i - z_0)]^2}{l^2 + m^2 + n^2} - R \right\}^2$$

当 $S = S_{\min}$ 时, 可求出各最小二乘形状, 其方程为

最小二乘平面: $Ax + By + Cz + D = 0$

最小二乘空间直线: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

最小二乘圆: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

最小二乘圆柱: $R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - \frac{[l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0)]^2}{l^2 + m^2 + n^2}$

各“最小二乘”误差值为

平面度 $f_{\text{二乘}} = d_{s\max} + d_{x\max}$

式中: $d_{s\max}, d_{x\max}$ —— 从最小二乘平面到实际平面的上面和下面最远被测点的垂直距离。

任意方向直线度 $f_{\text{二乘}} = 2d_{\max}$

式中: d_{\max} —— 被测点至最小二乘空间直线的最大距离。

圆度、圆柱度 $f_{\text{二乘}} = R_{\max} - R_{\min}$

式中: R_{\max}, R_{\min} —— 从最小二乘圆心 (或圆柱轴线) 到实际圆 (或圆柱面) 上最远和最近被测点的距离。

各“最小二乘”均方误差可统一表示为

$$\sigma_{\text{二乘}} = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{n}}$$

四、求解目标函数的极值

除给定平面内直线度目标函数的极值能通过解方程直接求解之外, 其余各项形状误差的目标函数都是不宜直接求解的非线性函数, 因而需要寻求其它的求解方法。优化方法是求解非线性方程组的一种有力手段; 将非线性方程组线性化后求解也是一种常用办法。这两种方法各有特点, 现分别加以说明。

(一) 用解线性化方程逐次迭代法求解

对难以直接求解的非线性方程组，可将其线性化后求解。而从初始值出发逐次迭代，则可得到所要求的精确解。其应用以平面度为例说明如下：

在求解平面度目标函数的极小值时，为简化解算，设最小二乘平面的法线方向系数 $C=1$ ，这仅要求勿将被测平面置于与 z 轴平行的位置，即不使出现 $C=0$ 即可。这样，将目标函数 (6) 式改写为

$$S = F(A, B, C) = \sum \left(\frac{Ax_i + By_i + z + C}{\sqrt{1 + A^2 + B^2}} \right)^2 \quad (7)$$

为求解平面度目标函数的极小值，将 (7) 式对 A 、 B 、 C 求偏导数，并使其为零，则结果为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A} &= A(E - G - 2CR) + BU + C(P - AC) - 2AB(V + CQ) \\ &\quad + (B^2 - A^2)(W + BU + CP) + AB^2(E - F) + W = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial B} &= B(F - G - 2CR) + AU + C(Q - BC) - 2AB(W + CP) \\ &\quad + (A^2 - B^2)(V + AU + CQ) + A^2B(F - E) + V = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial C} &= AP + BQ + nC + R = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{式中: } E &= \sum x_i^2 & F &= \sum y_i^2 & G &= \sum z_i^2 \\ P &= \sum x_i & Q &= \sum y_i & R &= \sum z_i \\ U &= \sum x_i y_i & V &= \sum y_i z_i & W &= \sum x_i z_i \end{aligned}$$

(8) 式为三元非线性方程组，将 (8) 在初始值 A_0 、 B_0 、 C_0 处按泰勒级数展开并取一次项将其线性化后再求解。线性化后的方程组为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A} &= f(A, B, C) = f(A_0, B_0, C_0) + (A - A_0) \frac{\partial}{\partial A} f(A_0, B_0, C_0) \\ &\quad + (B - B_0) \frac{\partial}{\partial B} f(A_0, B_0, C_0) + (C - C_0) \frac{\partial}{\partial C} f(A_0, B_0, C_0) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial B} &= \varphi(A, B, C) = \varphi(A_0, B_0, C_0) + (A - A_0) \frac{\partial}{\partial A} \varphi(A_0, B_0, C_0) \\ &\quad + (B - B_0) \frac{\partial}{\partial B} \varphi(A_0, B_0, C_0) + (C - C_0) \frac{\partial}{\partial C} \varphi(A_0, B_0, C_0) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial C} &= \psi(A, B, C) = \psi(A_0, B_0, C_0) + (A - A_0) \frac{\partial}{\partial A} \psi(A_0, B_0, C_0) \\ &\quad + (B - B_0) \frac{\partial}{\partial B} \psi(A_0, B_0, C_0) + (C - C_0) \frac{\partial}{\partial C} \psi(A_0, B_0, C_0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

为求解 (9) 式，需先求出函数 $f(A, B, C)$ ， $\varphi(A, B, C)$ ， $\psi(A, B, C)$ 对变量 A 、 B 、 C 的偏导数，其结果为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial A} f(A, B, C) &= B[B(E-F) - 2V - 2CQ] - 2A(W + BU + CP) \\
&\quad - C(C + 2R) + E - G \\
\frac{\partial}{\partial B} f(A, B, C) &= B[2W + 3BU + 2CP + 2A(E-F)] \\
&\quad - A(AU + 2V + 2CQ) + U \\
\frac{\partial}{\partial C} f(A, B, C) &= B(BP - 2AQ) - A(AP + 2C + 2R) + P \\
\frac{\partial}{\partial A} \varphi(A, B, C) &= A[2V + 3AU + 2CQ + 2B(F-E)] - B(BU \\
&\quad + 2W + 2CP) + U \\
\frac{\partial}{\partial B} \varphi(A, B, C) &= A[A(F-E) - 2W - 2CP] - 2B(V + AU + CQ) \\
&\quad - C(C + 2R) + F - G \\
\frac{\partial}{\partial C} \varphi(A, B, C) &= A(AQ - 2BP) - B(BQ + 2C + 2R) + Q \\
\frac{\partial}{\partial A} \psi(A, B, C) &= P \\
\frac{\partial}{\partial B} \psi(A, B, C) &= Q \\
\frac{\partial}{\partial C} \psi(A, B, C) &= n
\end{aligned} \tag{10}$$

由被测平面上三个距离较远的点确定初始值 A_0 、 B_0 、 C_0 ，以 A_0 、 B_0 、 C_0 代 (10) 式中之 A 、 B 、 C 后再代入 (9) 式，得三元线性方程组：

$$\left. \begin{aligned}
a_1 A + b_1 B + c_1 C &= d_1 \\
a_2 A + b_2 B + c_2 C &= d_2 \\
a_3 A + b_3 B + c_3 C &= d_3
\end{aligned} \right\} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\text{式中：} \quad a_1 &= \frac{\partial}{\partial A} f(A_0, B_0, C_0) & b_1 &= \frac{\partial}{\partial B} f(A_0, B_0, C_0) \\
c_1 &= \frac{\partial}{\partial C} f(A_0, B_0, C_0) & d_1 &= -f(A_0, B_0, C_0) + a_1 A_0 + b_1 B_0 + c_1 C_0 \\
a_2 &= \frac{\partial}{\partial A} \varphi(A_0, B_0, C_0) & b_2 &= \frac{\partial}{\partial B} \varphi(A_0, B_0, C_0) \\
c_2 &= \frac{\partial}{\partial C} \varphi(A_0, B_0, C_0) & d_2 &= -\varphi(A_0, B_0, C_0) + a_2 A_0 + b_2 B_0 + c_2 C_0 \\
a_3 &= \frac{\partial}{\partial A} \psi(A_0, B_0, C_0) & b_3 &= \frac{\partial}{\partial B} \psi(A_0, B_0, C_0) \\
c_3 &= \frac{\partial}{\partial C} \psi(A_0, B_0, C_0) & d_3 &= -\psi(A_0, B_0, C_0) + a_3 A_0 + b_3 B_0 + c_3 C_0
\end{aligned}$$

用消去法解 (11) 式得

$$A = \Delta_1 / \Delta \quad B = \Delta_2 / \Delta \quad C = \Delta_3 / \Delta$$

$$\text{式中: } \Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

此 A 、 B 、 C 之值即为最小二乘平面方程中系数的第一次近似解。当第一次近似解不满足要求时，则将 A 、 B 、 C 作为新的初始值 A_0 、 B_0 、 C_0 代入 (10) 式重复上述计算过程，由电算逐次迭代直到达到要求的精度为止。

形状误差其它项目的目标函数求极小值也用上述方法去处理。只是有的项目由于变量加多，方程数目也就更多。

限于篇幅，任意方向直线度、圆度、圆柱度的计算方程，都不在此一一列出。

按解线性化方程组逐次迭代法的解算结果编制电算程序。实际计算表明，当初始值选取得恰当，一般只需少数几次迭代便可达到所要求的精确值，故该法的计算速度较快。关于计算精度，本文按最小二乘形状对其精确位置的最大差取为 $0.01\mu\text{m}$ 。

对有的形状误差，例如圆度，当能满足精确调整对中要求及表面轮廓完整、连续的条件时，将目标函数按富里哀级数展开取一次项，此时的解算过程可较为简单。

(二) 用优化方法求解

优化方法是随着电子计算机的出现而迅速发展起来的一种对目标函数求最优解即求极值的方法，特别是在目标函数求导数有困难或根本无法求导数时，可用比较目标函数值的直接法求极值，而求函数值和比较过程都是借助电子计算机的自动计算来完成的。

本文采用线性化逐次迭代和优化两种方法求解目标函数，这一方面可作解法本身的繁简，计算值是否稳定，计算时间长短等方面的比较。另一方面也可以作为探讨如何简化测量仪器专用计算机硬件设计的合理方法的一些初步工作。

下面用优化方法中的模式搜索法求解各项形状误差的目标函数的极小值。

1. 模式搜索法（步长加速法）的算法要点^[8]

这是一种直接求优法。此法比较直观，原理比较简单，计算机用程序也不长，且适合于目标函数变量较少的小型无约束最优化问题。实践证明，效果良好。形状误差目标函数的变量都在 6 个以下，且都可归结为无约束问题。故应用模式搜索法来求解极小值是很合适的。这个方法有两类“移动”：

(1) 探测性移动：从初始点开始以步长 α 沿各坐标轴方向探测，其目的是探求有利方向，获得一具有较小目标函数值的点。此点叫作基点。

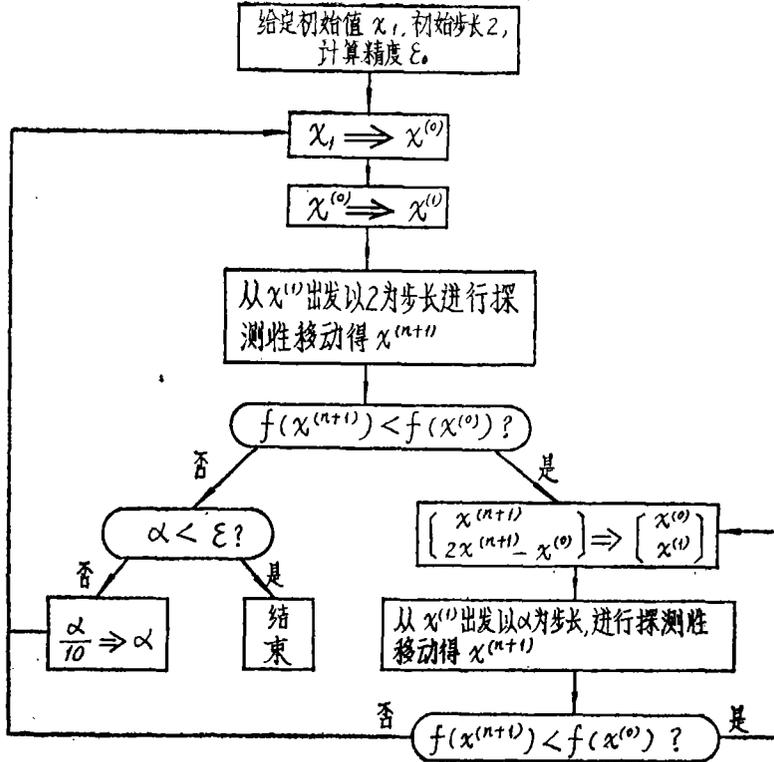
(2) 模式移动：是循着有利方向的一种加速移动。连接相邻两个基点所指的方向很可能是一个比较理想的函数值下降方向。

(3) 搜索过程和终止：模式搜索法的核心是结合使用探测性移动和模式移动。

从第一个基点（初始点） x_1 出发进行探测性移动得 $x^{(n+1)}$ (n 是题目的变量数)。倘若 $f(x^{(n+1)}) < f(x_1)$ ，那么这个 $x^{(n+1)}$ 就是第二个基点 x_2 ，接着从 x_2 进行模式移动，记得所点为 $x^{(1)}$ ， $x^{(1)} = 2x_2 - x_1$ 。不管 $x^{(1)}$ 能否使函数值下降，总是从它出发进行探测性移动，于是得 $x^{(n+1)}$ 。倘若 $f(x^{(n+1)}) < f(x_2)$ 就又得到了一个新基点 $x_3 = x^{(n+1)}$ 。接着又可进行模式移动。一直进行到探测性移动所得的 $x^{(n+1)}$ 不再是基点，即 $f(x^{(n+1)})$

$\geq f(x_k)$ 时为止。这时就要减少步长 α ，当 α 减少到一定程度（即所给定的计算精度 ε_0 ）时，即可结束计算。

2. 算法框图



注：框图中“步长 2”均应为“步长 α ”

3. 计算结果

对平面度、任意方向直线度、圆度、圆柱度的最小二乘评定法电算的结果表明，和第一种求解法的计算结果完全一致。

计算中根据本题目的性质，步长 α 和计算精度 ε_0 是不固定的，而是按变量对函数值影响的大小，对各变量取不同值。因而使计算结果比较满意。

模式搜索法不仅可以求解按最小二乘评定法确定的目标函数的极值，而且也可求解按最小条件评定法确定的目标函数的极值。

为了能有所比较，我们用模式搜索法又求出了按“最小条件”评定的各项形状误差值。（见计算及应用实例）。

用于按坐标值检测原则布点测量的，本文所述的两种解算方法，都能消除测取数据时偏心（对圆度）、偏轴（对圆柱度）对评定结果的影响，对直线度、平面度在测量时被测轮廓在坐标系中的安置位置，许可有较大范围的变动，因而测量时均不要求严格的精确调整、找正，这对于用某些不便精确调整找正的测量设备（如坐标测量机）来评定形状误差是有利的。

这两种方法还适于计算评定不完整、不连续形状（如一段圆弧、一部份圆柱面、带花键或键槽的圆、圆柱形状）的最小二乘形状误差。

五、计算及应用实例

按本文所述的两种解算方法编制的计算程序，对给定平面内直线度、任意方向直线度、平面度、圆度和圆柱度都进行了数据的实测和电算、并取得结果。现仅就任意方向直线度、圆柱度的计算及在圆度方面的应用举例如下：

（一）求轴线任意方向直线度误差

实测一个 $\phi 25$ 车削的心轴，取 10 个截面，每个截面测 12 个点，截面之间的距离为 12.5mm。测得数据如表一，计算结果见表二。

（二）、求圆柱度误差

实测一个 $\phi 20$ 磨过的心轴，在表面上以螺旋线方式测出 61 个点，螺距 30mm，每个螺距上取 12 点。测得数据如表三，计算结果见表四。

（三）应用实例

本文所述的解算方法及编制的电算程序，可用于研究最小二乘评定法与其他评定方法评定结果之间的关系。表五是对 50 个在多台机床上车或磨削的轴类零件，按测量坐标值检测原则布点实测，经电算得出的最小条件法和最小二乘评定法评定的圆度误差的统计结果。由表五的统计数据可得表六所列的不同评定方法及评定指标评定结果之间最大、最小及平均比值。

表一

测值 mm 截面号	角度					
	0°	30°	60°	90°	120°	150°
1	12.4910	12.4930	12.4951	12.5010	12.4970	12.4941
2	12.4990	12.5106	12.5030	12.5035	12.4943	12.4875
3	12.5066	12.5058	12.5061	12.5057	12.4978	12.4915
4	12.5050	12.5092	12.5094	12.5077	12.4993	12.4985
5	12.5110	12.5038	12.5055	12.5037	12.4957	12.5070
6	12.5087	12.5035	12.5064	12.5053	12.5083	12.4885
7	12.5012	12.4933	12.4956	12.4956	12.5055	12.4860
8	12.5065	12.5093	12.5052	12.4964	12.4894	12.4891
9	12.5116	12.4931	12.4927	12.4925	12.5080	12.5052
10	12.5062	12.5036	12.5033	12.4945	12.4915	12.4890

续表一

测值 mm 截面号	角度					
	180°	210°	240°	270°	300°	330°
1	12.4935	12.4835	12.4842	12.4903	12.4920	12.4980
2	12.4834	12.4800	12.4796	12.4847	12.4920	12.4981
3	12.4880	12.4830	12.4814	12.4892	12.4987	12.5010
4	12.4883	12.4804	12.4812	12.4895	12.5094	12.5117
5	12.4850	12.4796	12.4788	12.4859	12.4978	12.5042
6	12.4897	12.4788	12.4816	12.4869	12.4983	12.5070
7	12.4851	12.4730	12.4743	12.4923	12.4965	12.4966
8	12.4847	12.4763	12.4778	12.4832	12.4986	12.5052
9	12.4870	12.4710	12.4723	12.4790	12.5126	12.5003
10	12.4888	12.4743	12.4809	12.4824	12.4988	12.5000

计算结果 (μm)

表二

“最小二乘” 误差值	12.07
“最小二乘” 均方误差	2.83
“最小条件” 误差值	12.89

表三

测值 mm 轴距	角度					
	0°	30°	60°	90°	120°	150°
0~27.5	10.0006	9.9995	10.0020	9.9957	9.9952	9.9914
30~57.5	9.9993	9.9980	9.9980	9.9975	9.9917	9.9950
60~87.5	10.0000	10.0001	9.9995	10.0017	9.9993	9.9960
90~117.5	10.0047	10.0015	10.0057	9.9997	10.0008	9.9900
120~147.5	10.0012	10.0021	10.0028	9.9982	9.9994	9.9980
150	10.0054					

续表三

测值 mm	角度	180°	210°	240°	270°	300°	330°
		轴距					
0~27.5		9.9922	9.9940	9.9970	9.9987	9.9934	9.9992
30~57.5		9.9920	9.9993	9.9924	9.9903	9.9913	9.9970
60~87.5		9.9943	9.9982	9.9988	9.9955	9.9970	10.0012
90~117.5		9.9928	9.9985	9.9981	9.9989	10.0033	10.0033
120~147.5		9.9947	9.9968	10.0020	9.9998	10.0032	10.0023
150							

计算结果(μm)

表四

“最小二乘”误差值	13.24
“最小二乘”均方误差	3.05
“最小条件”误差值	11.96

表五

编 号	基 本 尺 寸	加 工 方 法	圆度误差值(μm)			比 值		编 号	基 本 尺 寸	加 工 方 法	圆度误差值(μm)			比 值	
			$f_{\text{最小}}$	$f_{\text{二乘}}$	$\sigma_{\text{二乘}}$	$\frac{f_{\text{二乘}}}{f_{\text{最小}}}$	$\frac{f_{\text{二乘}}}{\sigma_{\text{二乘}}}$				$f_{\text{最小}}$	$f_{\text{二乘}}$	$\sigma_{\text{二乘}}$	$\frac{f_{\text{二乘}}}{f_{\text{最小}}}$	$\frac{f_{\text{二乘}}}{\sigma_{\text{二乘}}}$
1	$\phi 18$	车	12.71	13.35	3.57	1.05	3.74	26	$\phi 26$	磨	5.54	6.47	1.38	1.17	4.69
2	$\phi 18$	车	17.96	20.01	5.10	1.11	3.92	27	$\phi 26$	磨	4.88	5.07	1.31	1.04	3.87
3	$\phi 20$	磨	4.48	4.79	1.18	1.07	4.06	28	$\phi 28$	磨	7.97	8.42	2.03	1.06	4.18
4	$\phi 20$	磨	6.05	6.84	1.77	1.13	3.86	29	$\phi 28$	磨	11.41	12.12	2.82	1.06	4.30
5	$\phi 20$	磨	12.27	13.39	3.04	1.09	4.40	30	$\phi 30$	磨	9.13	9.32	2.30	1.02	4.05
6	$\phi 20$	磨	5.68	6.06	1.23	1.07	4.93	31	$\phi 30$	磨	11.08	12.08	2.24	1.09	5.39
7	$\phi 20$	磨	2.36	2.76	0.82	1.17	3.37	32	$\phi 38$	车	6.99	8.20	1.91	1.17	4.30
8	$\phi 20$	磨	4.16	5.05	1.40	1.21	3.61	33	$\phi 38$	车	7.71	9.67	2.19	1.25	4.42
9	$\phi 20$	磨	5.59	5.90	1.86	1.06	3.17	34	$\phi 38$	车	8.39	9.44	1.88	1.13	5.02
10	$\phi 20$	磨	3.26	3.38	1.11	1.04	3.06	35	$\phi 38$	车	12.73	13.39	4.09	1.05	3.27

续上表

11	φ 20 磨	2.87	3.28	1.04	1.01	3.15	36 φ 38 车	12.60	14.14	2.34	1.12	6.04
12	φ 20 磨	2.61	2.96	0.94	1.13	3.15	37 φ 38 车	9.00	10.05	2.47	1.12	4.07
13	φ 20 磨	2.88	3.20	0.95	1.11	3.37	38 φ 38 车	5.17	5.38	1.46	1.04	3.68
14	φ 20 磨	2.80	3.24	0.89	1.16	3.64	39 φ 40 磨	3.90	4.14	1.10	1.06	3.76
15	φ 20 磨	4.40	4.46	1.25	1.01	3.57	40 φ 44 车	8.84	8.97	2.43	1.01	3.69
16	φ 22 磨	4.11	4.20	1.00	1.02	4.20	41 φ 44 车	4.97	5.35	1.42	1.08	3.77
17	φ 22 磨	5.56	6.17	1.57	1.11	3.93	42 φ 44 车	7.13	8.00	2.13	1.12	3.76
18	φ 24 磨	4.31	4.67	1.27	1.08	3.68	43 φ 44 车	13.29	14.78	3.92	1.11	3.77
19	φ 24 磨	5.48	5.74	1.51	1.05	3.80	44 φ 45 车	23.80	24.26	5.65	1.02	4.30
20	φ 25 车	9.28	11.02	3.44	1.19	3.20	45 φ 45 车	13.62	15.08	2.75	1.11	5.48
21	φ 25 车	13.16	16.18	4.46	1.23	3.63	46 φ 55 车	15.30	17.61	3.90	1.15	4.52
22	φ 25 车	18.00	21.68	6.39	1.20	3.39	47 φ 55 车	13.13	14.80	3.52	1.13	4.21
23	φ 25 车	7.98	9.03	3.13	1.13	2.89	48 φ 70 车	13.80	15.58	3.17	1.13	4.91
24	φ 25 车	29.99	32.25	11.43	1.08	2.82	49 φ 70 车	13.22	13.90	2.97	1.05	4.68
25	φ 25 车	12.35	13.14	3.80	1.06	3.46	50 φ 96 车	14.06	16.40	4.04	1.17	4.06

表六

比 值	最小值	最大值	平均值
$f_{二乘}/f_{最小}$	1.01	1.25	1.10
$f_{二乘}/\sigma_{二乘}$	2.82	6.04	3.96

图 3 为以评定方法的相对误差 $e = \frac{f_{二乘} - f_{最小}}{f_{最小}}$ 为横坐标, 将实测所得的相对误差分布

范围均分为七组, 以频率为纵坐标绘出的直方图和经验分布图。由图 3 可知, 最小二乘评定法误差对一批零件来说表现为单向随机误差, 其分布规律经分析近似偏心分布(瑞利分布)。

故可按偏心分布的随机误差来分析计算最小二乘评定方法误差的平均值 \bar{e} 和均方误差 σ , 并绘出偏心分布图。经计算

$$\bar{e} = 0.10$$

$$\sigma = 0.057$$

偏心分布通常取 5.25σ 作为它的实际分布范围。误差 ε 在 $0 \sim 5.25\sigma$ 范围内的概率为 99.73%。由此可确定最小二乘评定方法误差的实际分布范围为：

$$\varepsilon = 0 \sim 5.25\sigma = 0 \sim 0.30$$

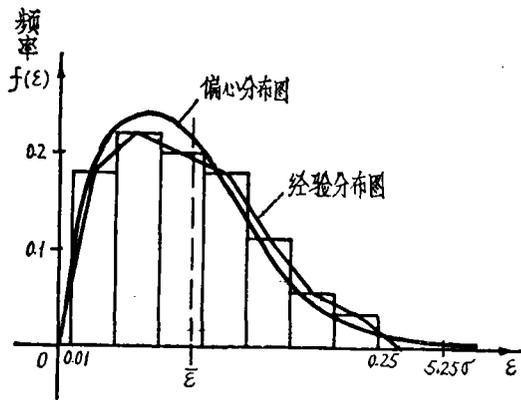


图 3

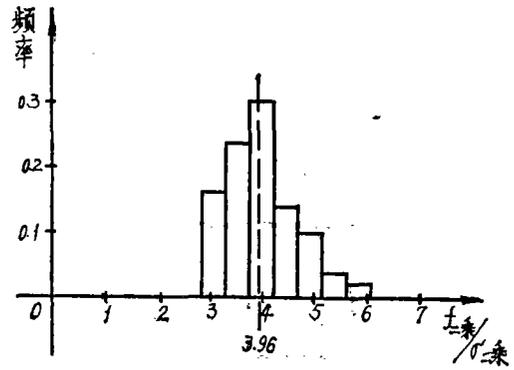


图 4

但需说明，此一结论是对前述具体条件下的 50 个测得值的统计结果。条件不同，结论将有所差异，若条件接近，且所测数据够多时，此差异通常不会太大。根据 ε 的分布规律及分布范围，视检测时要求和情况的不同，即可对最小二乘评定方法误差作出适当的处理。

图 4 为“最小二乘”误差与“最小二乘”均方误差二种评定指标的评定结果之间的比值的直方图。

六、关于位置误差的评定

位置误差是实际位置对理想位置的变动量，理想位置由基准要素的理想形状位置确定。用最小二乘法评定位置误差的要点在于：按最小二乘原理来确定基准要素的理想形状的位置，并以此为基准来确定被测要素的理想位置。其误差值的确定，视误差类型的不同，用定向或定位最小包容区域的宽度 $f_{\text{二乘}}$ 或直径 $\phi f_{\text{二乘}}$ 来表示。对于跳动类位置误差，为体现测量方便的特点，其最小二乘基准轴线的位置多不按最小二乘法来精确确定，而仍用模拟法等来近似体现。

用最小二乘法评定位置误差，由于它所确定的基准要素的理想形状的位置具有唯一性（即基准的位置唯一确定），因而评定出的被测要素的位置误差具有唯一性的特点。且按最小二乘法所确定的基准位置不是仅取决于基准要素的少数几个最大偏差点，而是与基准要素上所有测点有关。

现以同轴度为例说明如何用最小二乘法评定位置误差。

设圆柱面 B 的轴线为被测轴线，基准要素如 A 所示（图 5a）。

分别在 A 、 B 圆柱面上取 n 和 m 个截面，测得数据后按最小二乘法求出各截面上的最小二乘圆心：

$$a_i(x_{a_i}, y_{a_i}, z_{a_i}) \quad i=1, 2, \dots, n;$$

$$b_i(x_{b_i}, y_{b_i}, z_{b_i}) \quad i=1, 2, \dots, m.$$

解任意方向直线度的目标函数的极值，求出基准要素理想形状的位置，即求出最小二乘基准轴线（图 5b），再计算出被测轴线上各点（ b_i ）到最小二乘基准轴线的距离，则被测轴线

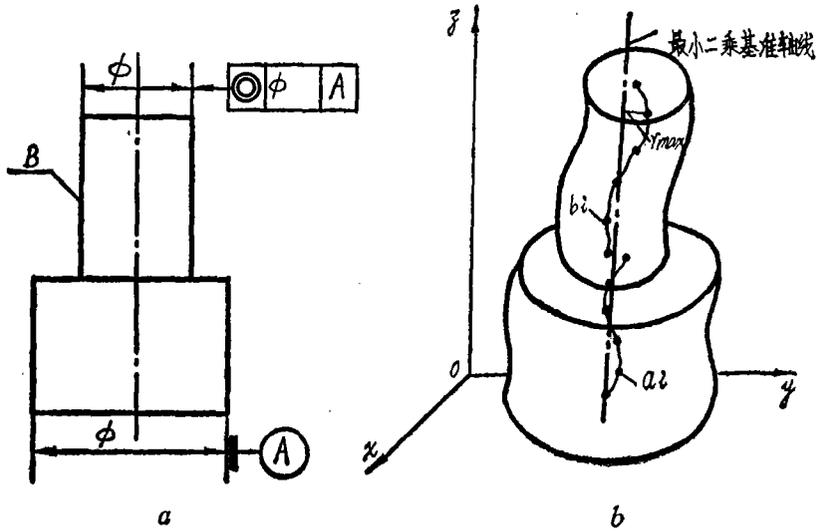


图 5

对基准线的同轴度误差 $\phi f_{\text{二乘}}$ 为

$$\phi f_{\text{二乘}} = 2r_{\text{max}}$$

式中： r_{max} ——被测轴线上各点到最小二乘基准轴线的距离的最大值。

按上例所述方法编制的计算程序及计算结果表明，当形状误差严格按最小二乘原理评定，并解决了精确计算的方法以后，位置误差的最小二乘评定和计算就简单多了。

其他各项位置误差的计算，均可按上述例子类推

七、结 束 语

1. 形位误差评定方法、指标的进一步发展，将涉及到各种评定方法、指标在反映零件使用功能可靠性方面的研究。最小二乘法的最大特点是它所确定的理想形状的位置与所有被测点有关，而本文提出的评定指标“最小二乘”均方误差，其值亦与所有被测点有关，再考虑到 $f_{\text{二乘}}$ 与 $\sigma_{\text{二乘}}$ 的比值有较大的变动这一事实，评定指标 $\sigma_{\text{二乘}}$ 在反映零件实际功能的可靠性方面是否更好一些，是一个可供研究时参考的想法。

2. 本文所述及的形位误差最小二乘评定法及电算程序具有定义严格，解算结果精确，计算速度快捷的特点。按本文所述的优化法，线性化逐次迭代法求解和编制的电算程序可直接用于计算机上进行形位误差的实际计算，亦可用于研究各种评定方法评定结果之间的关系。同时本文也为目前大力研制的带电子计算机的精密形位误差测试仪器（如圆柱度仪等）提供了一个可供选择的 minimum 二乘评定解算法，而此类精密贵重仪器，毫无疑问应当具有给出多种评定方法的评定结果的功能。

3. 形位误差最小二乘评定法作为一个评定系统，本文对线、面轮廓度尚未涉及。

4. 上述编制的所有程序用于 *DJS—6* 机。

本文在准备过程中，得到了我枝应用数学系赵子科老师的许多帮助，文稿送请清华大学梁晋文教授、北京工业学院林洪桦副教授审阅，承蒙提出宝贵修改意见，谨志谢意！

参 考 文 献

- [1] 林洪桦，应用函数逼近论分析形状误差测量结果的探讨，一九七八年全国形位误差测试技术交流会报告。
- [2] A. J. Scarr, C. Eng, F. I. Mech. E, Use of the least squares line and plane in the measurement of straightness and flatness, IME proceedings, 1967—68, Vol 182, part I No. 23, p531~536.
- [3] 北京工业大学计算站编，无约束最优化算法及其理论。